Karlsruher Institut für Technologie

2. Übung zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

Wintersemester 2017/18

Marcus Müller | 13. November 2017

COMMUNICATIONS ENGINEERING LAB (CEL)

Zusammenfassung

- **Bedingte Wahrscheinlichkeit:**

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad \text{mit } P(B) > 0 \qquad \text{(Def. 3.1-1)}$$

- **Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:**
  $\{A_n\}$ sei eine vollständige Ereignisdisjunktion von Ω und $\forall n : P(A_n) > 0$

$$P(B) = \sum_{n=1}^{N} P(B|A_n)P(A_n) \qquad \text{(Satz 3.1-1)}$$

- **Formel von Bayes**:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad \text{mit } P(A) > 0,\ P(B) > 0 \qquad \text{(Satz 3.1-1)}$$

- **Unabhängigkeit** von Ereignissen:

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B) \qquad \text{(Def. 3.2-1)}$$

Aufgabe 6

Eine Population gelber Animationsfiguren, die *Minions*, werde nach den Merkmalen *Körpergröße* und *Augenanzahl* unterschieden: 80% haben zwei Augen, die anderen nur eins. Von den zweiäugigen werden 20% als groß angesehen, 70% als mittelgroß und der Rest als klein. Von den einäugigen Minions sind 5% groß, 60% mittelgroß und der Rest klein.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig bestimmtes Minion klein (mittelgroß, groß)?

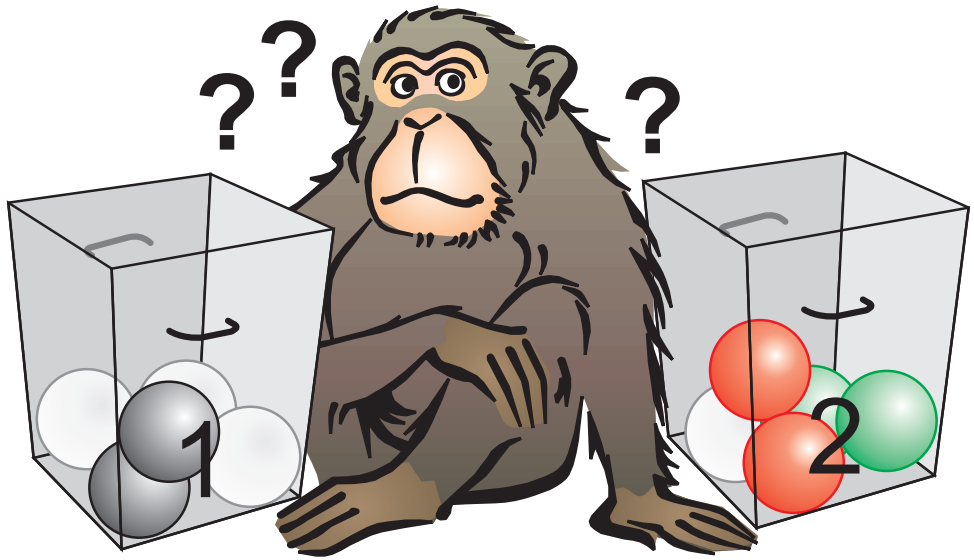
b) Für eine besondere Aufgabe wird eines der Minions zufällig ausgewählt. Man stellt fest, dass es sich nicht um ein kleines Minion handelt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das ausgewählte Minion einäugig?

Aufgabe 7

Ein Schimpanse hat zwei Urnen vor sich: Urne 1 enthält drei weiße und zwei schwarze, Urne 2 eine weiße, zwei grüne und zwei rote Kugeln. Über das Verhalten des Schimpansen ist bekannt, dass er mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 in die erste und mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 in die zweite Urne greift.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Schimpanse eine weiße Kugel zieht?

b) Der Schimpanse darf nun solange Kugeln (ohne Zurücklegen) ziehen, bis er eine rote Kugel wählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er maximal drei Kugeln zieht?



Aufgabe 7 b) Spielverläufe

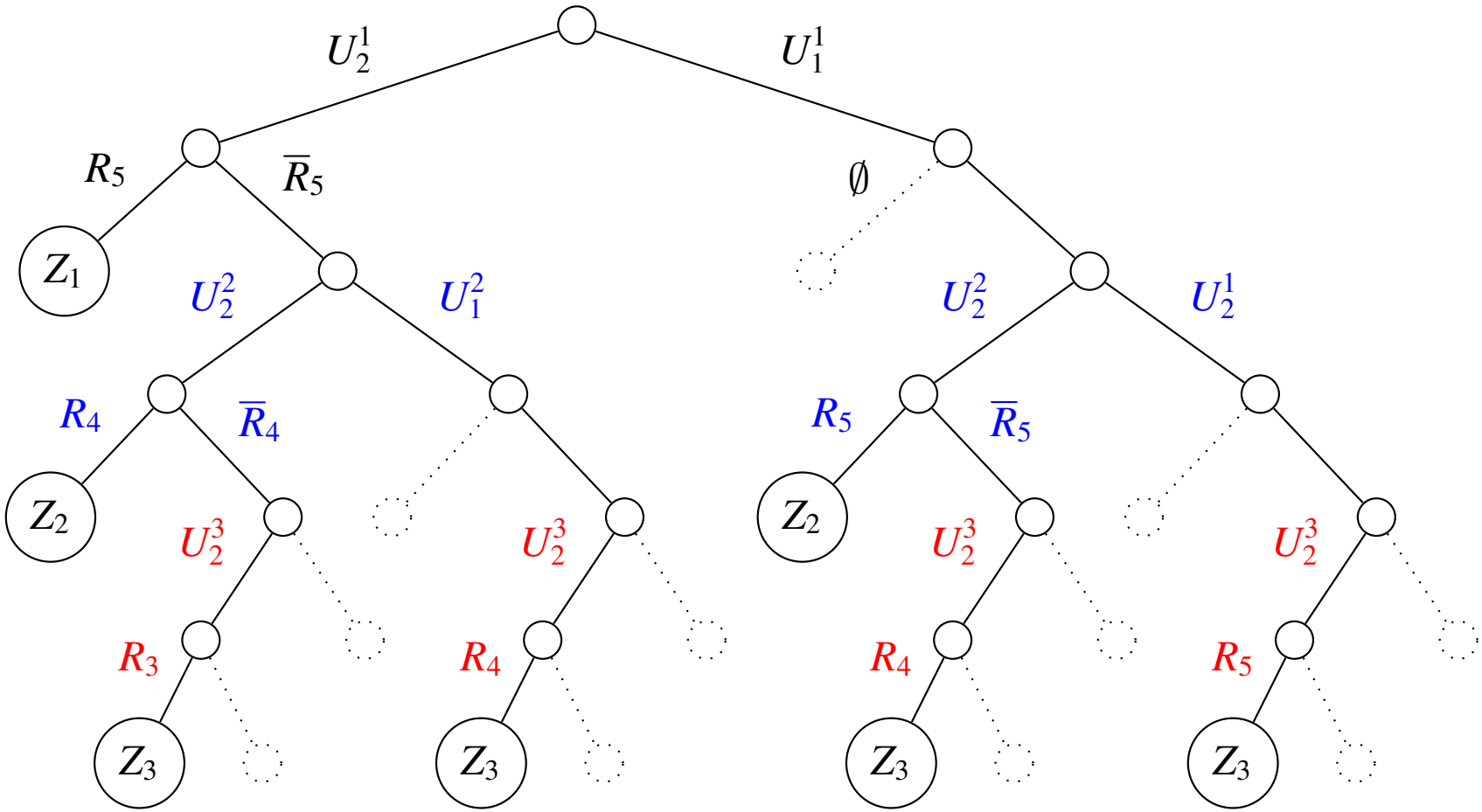


Abbildung 4: Mögliche Spielverläufe mit zugehörigen Ereignissen

Zusammenfassung

- **Zufallsvariable X:** Eine Funktion $X = X(\omega) : \omega \to \mathbb{R}$, die jedem Ergebnis aus Ω eine reelle Zahl zuordnet, so dass $X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{B}, \forall a \in \mathbb{R}$ gilt. (Def. 4.1-1)

- **Verteilungsfunktion** einer ZV X:

$$F_X(x) := P(X \leq x) \qquad \text{(Def. 4.1-2)}$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, \mathrm{du} \qquad \text{(Def. 4.1-4)}$$

- Eigenschaften einer **Dichte**:

$$\text{(i)} \quad f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{(Def. 4.1-4)}$$

$$\text{(ii)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{dx} = 1 \qquad \text{(Kap. 4.1)}$$

- „Dichte“ für diskrete ZVs:

$$f_X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X = x_n)\ \delta(x - x_n) \qquad \text{(4.1-12)}$$

Aufgabe 8

Ein dreistelliger, binärer Zufallsgenerator ist aus drei unabhängigen 1Bit-Zählern aufgebaut. Bei jedem Zähler treten die Null und die Eins mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.

a) Geben Sie Ergebnismenge an und definieren Sie eine Zufallsvariable X für die zugehörigen dezimalen Werte.

b) Skizzieren Sie die Verteilung von X. Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X.

c) Um die Verteilung zu verändern werden die Ausgänge zweier unabhängiger Zufallsgeneratoren additiv miteinander verbunden. Das Resultat wird mit der Zufallsvariablen Y beschrieben. Berechnen und zeichnen Sie die Verteilung von Y.

Aufgabe 8 b) Verteilungsfunktion

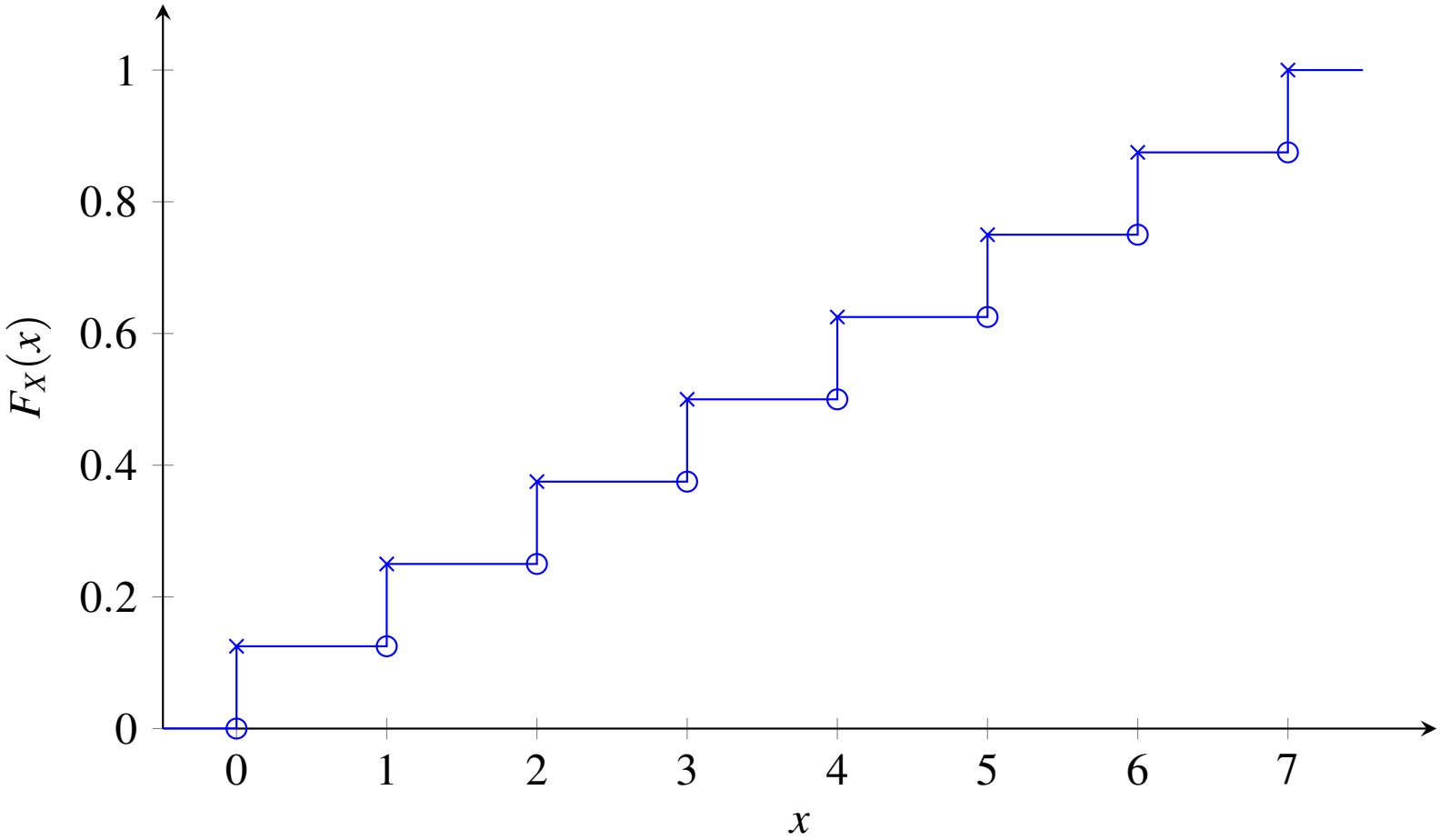


Abbildung 5: Verteilungsfunktion der ZV X

Aufgabe 8 c) Verteilungsfunktion

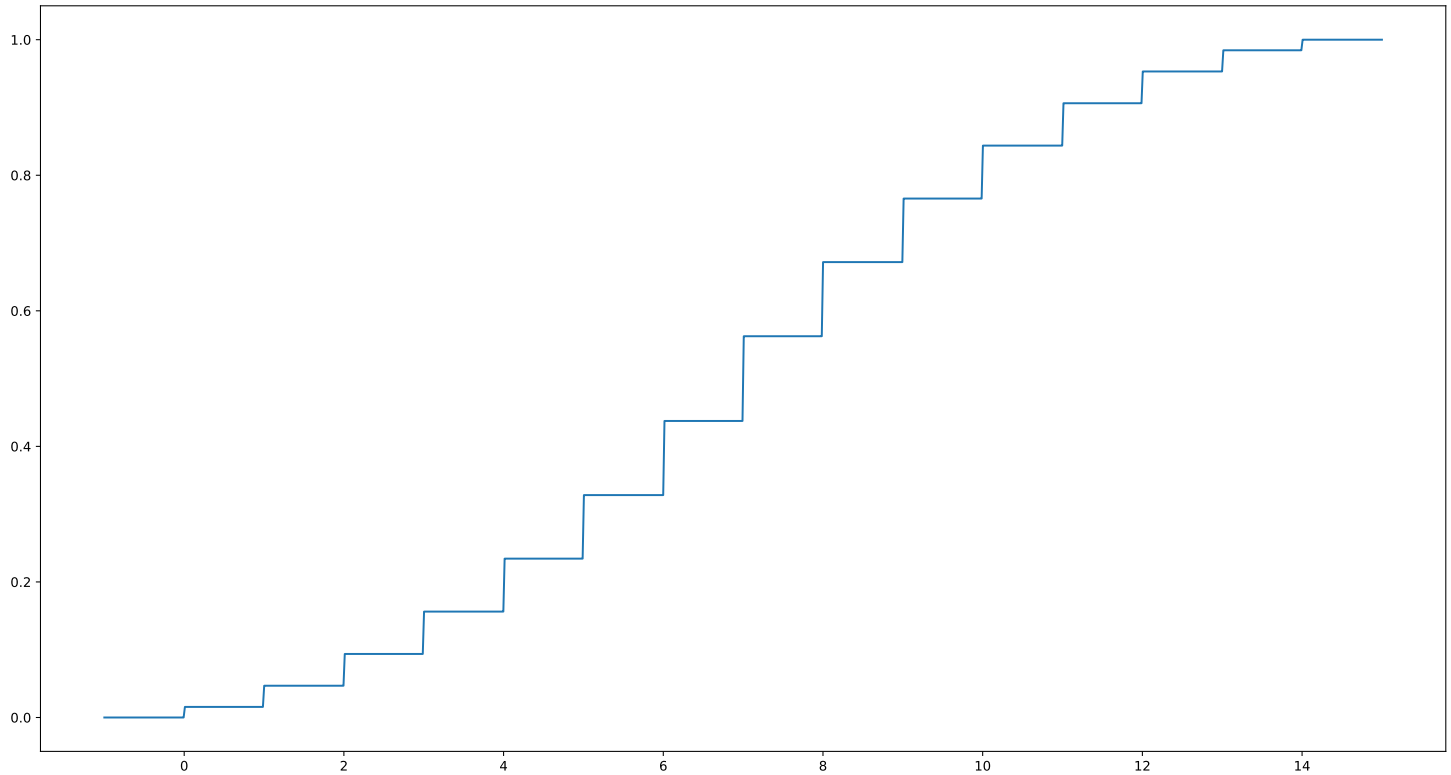


Abbildung 6: "Verteilungsfunktion der ZV Y

Aufgabe 9

Eine CPU funktioniert mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_{\text{CPU}} = 10^{-2}$ innerhalb der Garantiezeit nicht mehr. Ein Händler möchte berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit p_{defekt} ist, dass er von seinen 200 verkauften CPUs höchstens 2 zurücknehmen muss.

a) Was für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung liegt vor und warum?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_{defekt}?

c) Gibt es eine Verteilung, die das Problem approximiert? Wenn ja, welche und wie groß ist der Approximationsfehler?

Aufgabe 9:

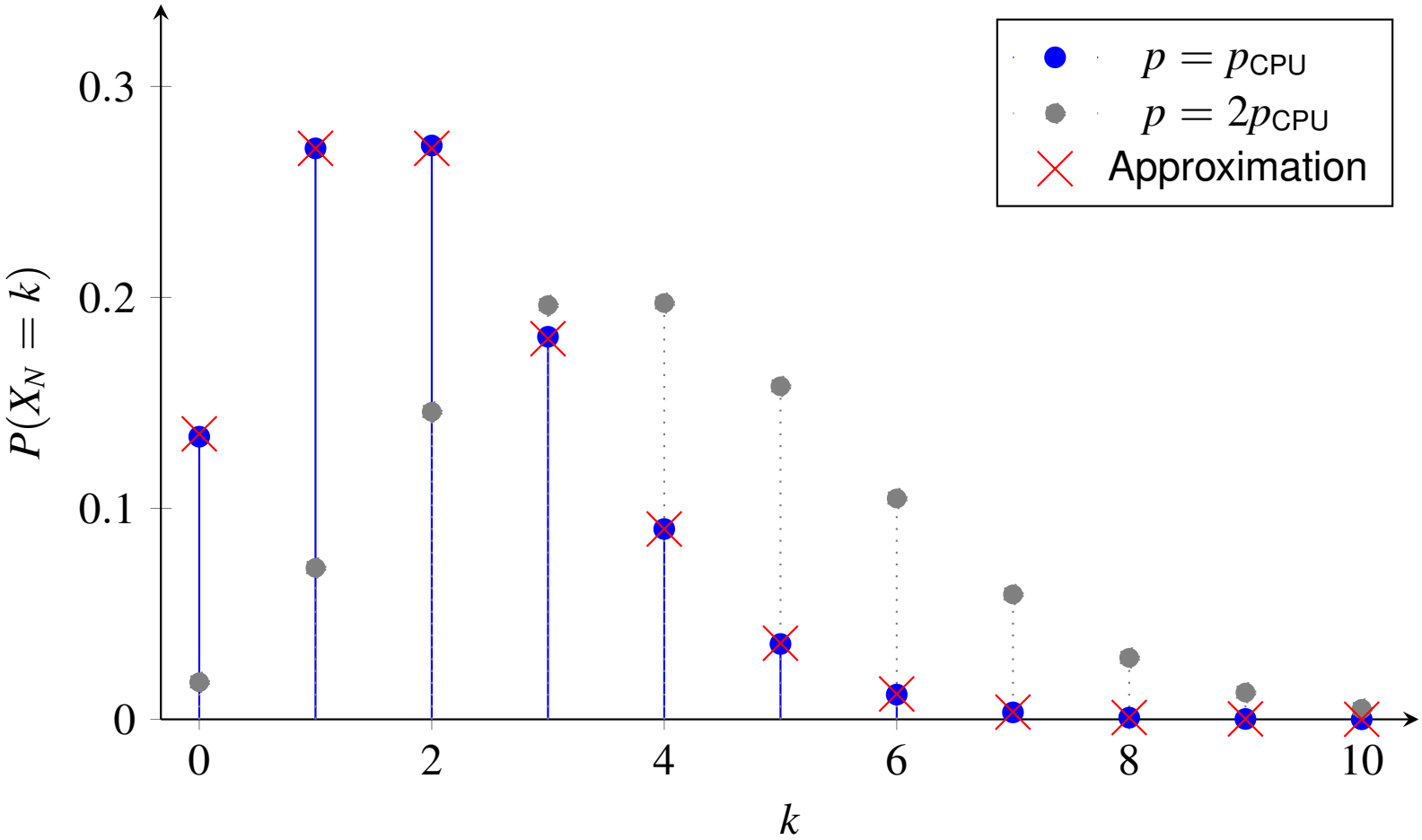


Abbildung 7: Verteilung der Anzahl defekter CPUs