Karlsruher Institut für Technologie
Communications Engineering Lab
Dr.-Ing. Holger Jäkel

Wahrscheinlichkeitstheorie – Lösungen zu Übung 2

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 6

Eine Population gelber Animationsfiguren, die *Minions*, werde nach den Merkmalen *Körpergröße* und *Augenanzahl* unterschieden: 80% haben zwei Augen, die anderen nur eins. Von den zweiäugigen werden 20% als groß angesehen, 70% als mittelgroß und der Rest als klein. Von den einäugigen Minions sind 5% groß, 60% mittelgroß und der Rest klein.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig bestimmtes Minion klein (mittelgroß, groß)?

b) Für eine besondere Aufgabe wird eines der Minions zufällig ausgewählt. Man stellt fest, dass es sich nicht um ein kleines Minion handelt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das ausgewählte Minion einäugig?

Lösung

- Ergebnisraum: Alle möglichen Kombinationen der beiden Merkmale

$$\begin{aligned} \Omega &= \big\{(h, n_A);\ h \in \{\text{Groß, Mittelgroß, Klein}\},\ n_A \in \{1{,}2\}\big\} \\ |\Omega| &= 6 \quad \to \text{nicht alle Elementarereignisse sind gleichhäufig} \Rightarrow \textbf{kein} \text{ Laplace!} \end{aligned}$$

- Ereignisse:

$$\begin{aligned} N_i &= \{\text{„Minion mit i Auge(n) bestimmt“}\} = \big\{(h, n_A) \in \Omega \mid n_A = i\big\} \qquad i \in \{1{,}2\} \\ K &= \{\text{„kl. Minion“}\} = \big\{(h, n_A) \in \Omega;\ h = \text{Klein}\big\} \\ M &= \{\text{„mittelgr. Minion“}\} = \{\dots\} \\ G &= \{\text{„gr. Minion“}\} = \{\dots\} \end{aligned}$$

- Gegebene Wahrscheinlichkeiten: $P(N_2) = 0{,}8$ sowie $P(N_1) = 1 - P(N_2) = 0{,}2$ und

$P(\cdot\|\cdot)$	N_1	N_2
G	0,05	0,2
M	0,6	0,7
K	0,35	0,1

a) Gesucht sind $P(K)$, $P(M)$, $P(G)$.

Lösung mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(K) &= P(K\Omega) = P\big(K(N_1 + N_2)\big) = P(KN_1 + KN_2) = P(KN_1) + P(KN_2) \\ &= P(K|N_1)\,P(N_1) + P(K|N_2)\,P(N_2) = 0{,}35 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}15 \\ P(M) &= P(M|N_1)\,P(N_1) + P(M|N_2)\,P(N_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}68 \\ P(G) &= \dots = 0{,}17 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(K + M + G) = P(K) + P(M) + P(G) = 1{,}00 = P(\Omega)$$

b) Gesucht ist $P(A_1|\overline{K})$ bei $P(K|A_1)$ gegeben. $P(A_1) > 0$, $P(\overline{K}) > 0$

Lösung mit Satz von Bayes:

$$P(A_1|\overline{K}) = \frac{P(\overline{K}|A_1)\,P(A_1)}{P(\overline{K})} = \frac{\big(1 - P(K|A_1)\big)\,P(A_1)}{1 - P(K)} = \frac{(1 - 0{,}35) \cdot 0{,}2}{1 - 0{,}15} = 0{,}153$$

Aufgabe 7

Ein Schimpanse hat zwei Urnen vor sich: Urne 1 enthält drei weiße und zwei schwarze, Urne 2 eine weiße, zwei grüne und zwei rote Kugeln. Über das Verhalten des Schimpansen ist bekannt, dass er mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 in die erste und mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 in die zweite Urne greift.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Schimpanse eine weiße Kugel zieht?

b) Der Schimpanse darf nun solange Kugeln (ohne Zurücklegen) ziehen, bis er eine rote Kugel wählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er maximal drei Kugeln zieht?

Lösung

a) Spielverläufe als Pfade in einem Baum. Mittels Formel der totalen Wahrscheinlichkeit auswerten.

$$W = \{\text{ weiße Kugel gezogen}\} \qquad U_n = \{\text{ greift in Urne n}\} \qquad n = 1{,}2$$

$$P(W) = P(U_1)\,P(W|U_1) + P(U_2)\,P(W|U_2) = 0{,}7 \cdot \frac{3}{7} + 0{,}3 \cdot \frac{1}{5} = 0{,}48$$

b) Ereignisse:

- $U_n^z = \{\text{im Zug z in Urne n gegriffen}\}\,; \qquad n \in \{1{,}2\};\ z \in \mathbb{N}$
  $\rightarrow \forall z : P(U_1^z) = 0{,}7$
- $R_K = \{\text{ rote Kugel gezogen (bei K Kugeln in Urne 2)}\}\,; \qquad K \in \{5{,}4{,}3{,}2\}$
  $\rightarrow P(R_K) = \frac{2}{K}$
- $Z_i = \{\text{ Spiel endet nach genau i Zügen}\}\,; \qquad i \in \{1{,}2{,}3{,}\ldots\}$

Gesucht: $P(Z_1 + Z_2 + Z_3)$. Nach Abbildung 4 ist

$Z_1 = U_2^1\,R_5$

$\Rightarrow P(Z_1) = P(U_2^1 R_5) = P(R_5|U_2^1)\;P(U_2^1) = 0{,}12$

$Z_2 = U_2^1\,\overline{R_5}\,U_2^2\,R_4 + U_1^1\,R_2^2\,R_5$

$\Rightarrow P(Z_2) = 0{,}111$

$Z_3 = U_2^1\,\overline{R_5}\,(U_2^2\,\overline{R_4}\,U_2^3\,R_3 + U_1^2\,U_2^3\,R_4) + U_1^1\,(U_2^2\,\overline{R_5}\,U_2^3\,R_4 + U_2^1\,U_2^3\,R_5)$

$\Rightarrow P(Z_3) = 0{,}102$

$\Rightarrow P(Z_1 + Z_2 + Z_3) = 0{,}333$

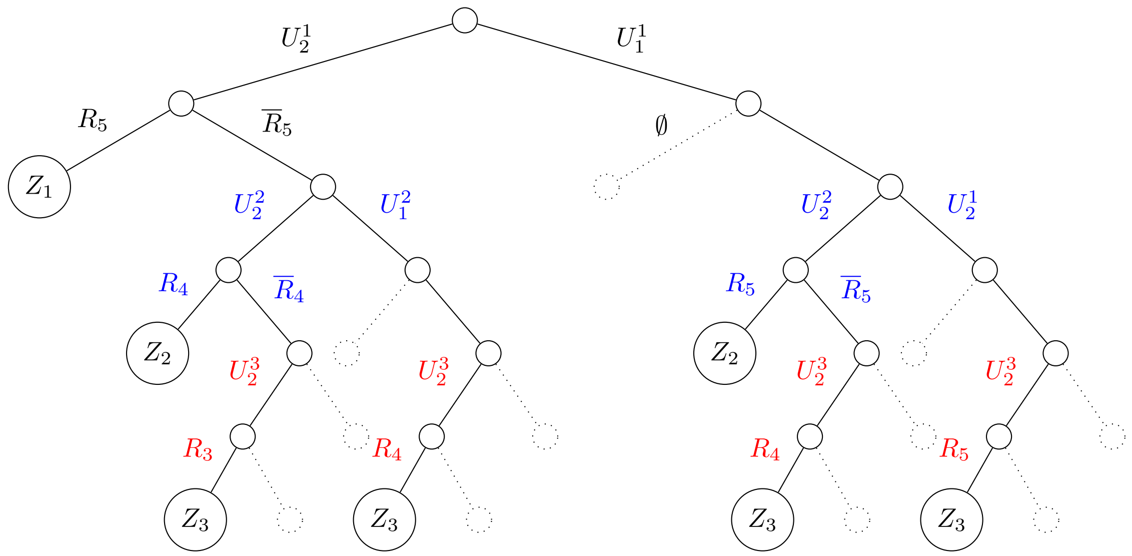

Abbildung 4: Mögliche Spielverläufe mit zugehörigen Ereignissen

Aufgabe 8

Ein dreistelliger, binärer Zufallsgenerator ist aus drei unabhängigen 1Bit-Zählern aufgebaut. Bei jedem Zähler treten die Null und die Eins mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.

a) Geben Sie Ergebnismenge an und definieren Sie eine Zufallsvariable X für die zugehörigen dezimalen Werte.

b) Skizzieren Sie die Verteilung von X. Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X.

c) Um die Verteilung zu verändern werden die Ausgänge zweier unabhängiger Zufallsgeneratoren additiv miteinander verbunden. Das Resultat wird mit der Zufallsvariablen Y beschrieben. Berechnen und zeichnen Sie die Verteilung von Y.

Lösung

a) $\Omega = \big\{(b_1,\, b_2,\, b_3) \;:\; b_i \in \{0{,}1\},\, i = 1{,}2{,}3\big\}$
Zufallsvariable: $X : \Omega \to \mathbb{R} : \quad X\big(\,(b_1,\, b_2,\, b_3)\,\big) = 4 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + b_3 \;\Rightarrow X \in \{0,...,7\}$

b) $X(\omega)$ hier eineindeutig. Für $x \in \{0,...,7\}$:

$$P(X = x) = P\left(\Big\{\underbrace{(b_1,b_2,b_3)}_{\omega} \in \Omega \mid X\big(\,(b_1,b_2,b_3)\big) = x\Big\}\right) = \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ X(\omega)=x}} P\big(\{\omega\}\big) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{1}{8}$$

Verteilungsfunktion der ZV X:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ X(\omega)\le x}} = \begin{cases} 0 & ,\, x < 0 \\ \frac{1}{8}\lceil x \rceil & ,\, 0 \le x < 7 \\ 1 & ,\, x \ge 7 \end{cases}$$

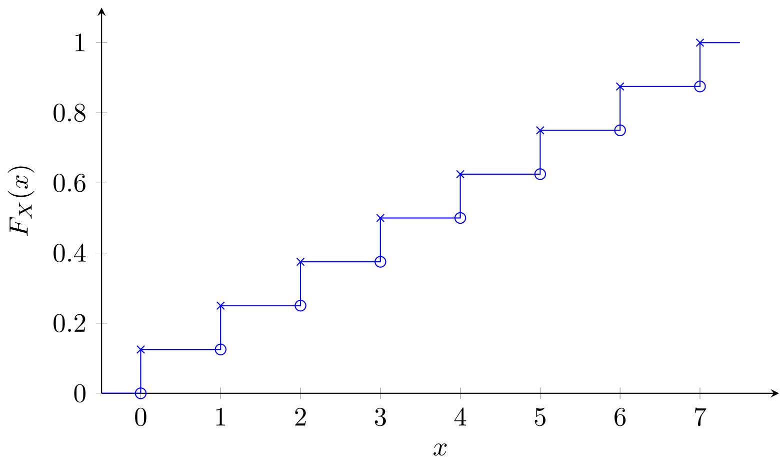

Abbildung 5: Verteilungsfunktion der ZV X

„Dichte" für diskrete ZVs:

$$f_X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = x_n)\, \delta(x - x_n) = \sum_{n=0}^{7} \frac{1}{8}\, \delta(x - n)$$

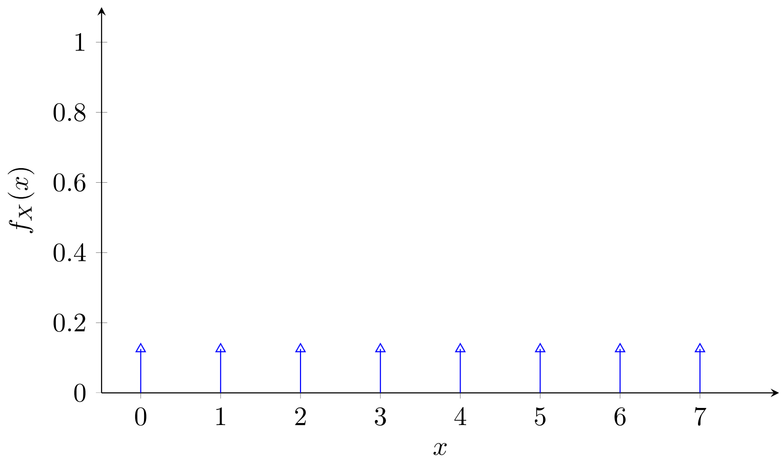

Abbildung 6: „Dichte" der ZV X

c) Mit $Y = X_1 + X_2$ können hier Zahlen von Null bis 14 vorkommen.

$$P(Y = k) = P(X_1 + X_2 = k) = \sum_{\substack{i=0 \\ i+j=k}}^{7} \sum_{j=0}^{7} P(X_1 = i)\, P(X_2 = j) = \sum_{\substack{i=0 \\ i+j=k}}^{7} \sum_{j=0}^{7} \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{8} = \frac{N_k}{64}$$

Dabei ist N_k die Anzahl der möglichen Summanden für das Ergebnis k:

$$\begin{array}{lll}
k = 0: & (i,j) \in \{(0,0)\} & \Rightarrow N_k = 1 \\
k = 1: & (i,j) \in \{(0,1),\ (1,0)\} & \Rightarrow N_k = 2 \\
k = 2: & (i,j) \in \{(0,2),\ (1,1),\ (2,0)\} & \Rightarrow N_k = 3 \\
 & \vdots & \\
k = 7: & (i,j) \in \{(0,7),\ (1,6),\ (2,5),\ \cdots,\ (6,1),\ (7,0)\} & \Rightarrow N_k = 8 \\
k = 8: & (i,j) \in \{(1,7),\ (2,6),\ (3,5),\ \cdots,\ (6,2),\ (7,1)\} & \Rightarrow N_k = 7 \\
 & \vdots & \\
k = 14: & (i,j) \in \{(7,7)\} & \Rightarrow N_k = 1
\end{array}$$

$$P(Y = k) = \begin{cases} \frac{1}{64}\ (1 + k), & 0 \le k < 7 \\ \frac{1}{64}(15 - k), & 7 \le k < 15 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \sum_{k=0}^{14} P(Y = k)\, \delta(y - k)$$

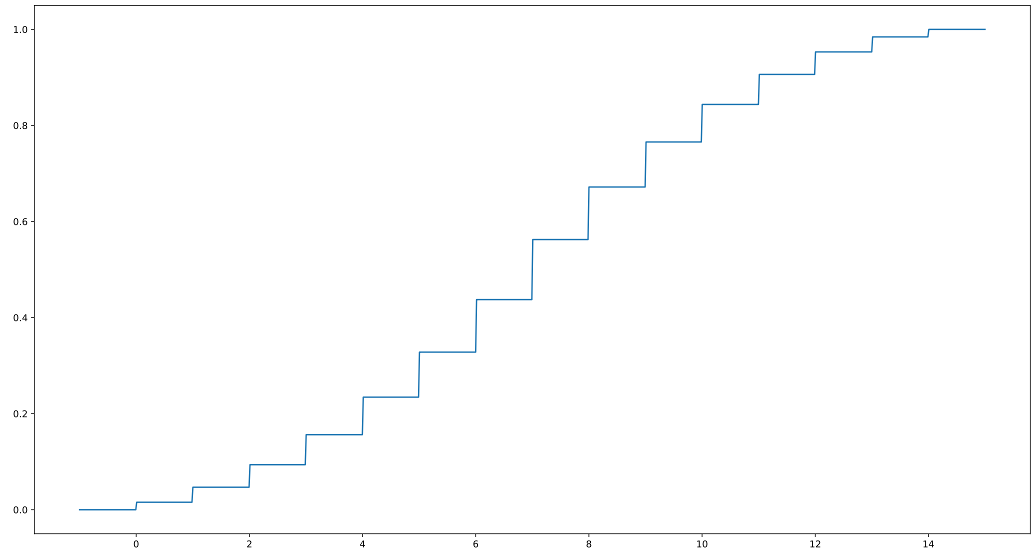

Abbildung 7: "Verteilungsfunktion der ZV Y

Aufgabe 9

Eine CPU funktioniert mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_{\text{CPU}} = 10^{-2}$ innerhalb der Garantiezeit nicht mehr. Ein Händler möchte berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit p_{defekt} ist, dass er von seinen 200 verkauften CPUs höchstens 2 zurücknehmen muss.

a) Was für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung liegt vor und warum?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_{defekt}?

c) Gibt es eine Verteilung, die das Problem approximiert? Wenn ja, welche und wie groß ist der Approximationsfehler?

Lösung

a) Modell: 200 identische Zufallsexperimente mit zwei Ausgängen (defekt oder nicht). Geht man von unabhängigen Defekten aus, liegt ein Bernoullisches Versuchsschema vor. Für die Zufallsvariable X_N, die Anzahl defekter CPUs von $N = 200$ verkaufen ergibt sich eine Binomialverteilung:

$$P(X_N = k) = \binom{N}{k} p_{\text{CPU}}^k (1 - p_{\text{CPU}})^{N-k} \qquad p_{\text{CPU}} = 0{,}01; \quad k \in \{0, 1, \dots, 200\}$$

b) Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse in $\{X_{200} \leq 2\}$:

$$\begin{aligned} p_{\text{defekt}} &= P(X_{200} \leq 2) \\ &= P(X_{200} = 0) + P(X_{200} = 1) + P(X_{200} = 2) \\ &= \binom{200}{0} 0{,}01^0\, 0{,}99^{200} + \binom{200}{1} 0{,}01^1 \cdot 0{,}99^{199} + \binom{200}{2} 0{,}01^2 \cdot 0{,}99^{198} \\ &\approx 0{,}134 + 0{,}271 + 0{,}272 = 0{,}6767 \end{aligned}$$

c) Die Werte einer Binomialverteilung sind für große N und kleine p (numerisch) schwierig zu berechnen. Die Poissonverteilung kann in solchen Fällen als Approximation für X_N verwenden werden:

$$P(\tilde{X} = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Mit $\lambda = pN = 2$ ergibt sich die Näherung von p_{defekt} zu:

$$\tilde{p}_{\text{defekt}} = P(\tilde{X} \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} P(\tilde{X} = k) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} = 5e^{-\lambda} \approx 0{,}6767$$

Der Approximationsfehler ist $|\tilde{p}_{\text{defekt}} - p_{\text{defekt}}| = 2{,}28 \cdot 10^{-6}$.

Zusatzmaterial

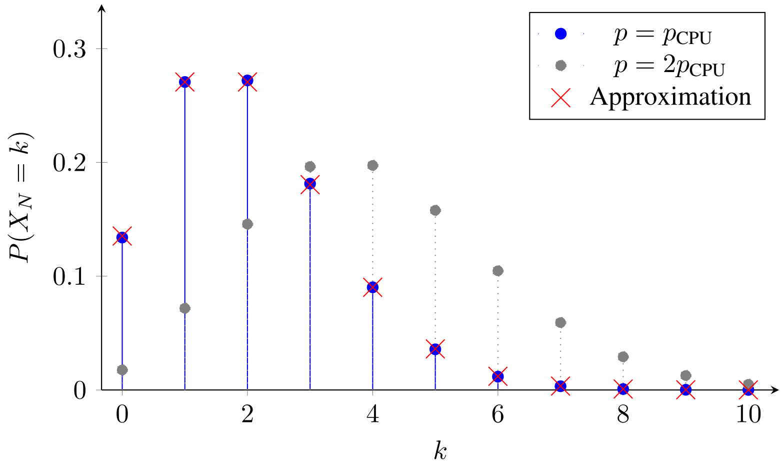

Abbildung 8: Verteilung der Anzahl defekter CPUs

Zusammenfassung

- **Bedingte Wahrscheinlichkeit:**

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad \text{mit } P(B) > 0 \qquad \text{(Def. 3.1-1)}$$

- **Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:**
$\{A_n\}$ sei eine vollständige Ereignisdisjunktion von Ω und $\forall n : P(A_n) > 0$

$$P(B) = \sum_{n=1}^{N} P(B|A_n)P(A_n) \qquad \text{(Satz 3.1-1)}$$

- **Formel von Bayes**:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad \text{mit } P(A) > 0,\ P(B) > 0 \qquad \text{(Satz 3.1-1)}$$

- **Unabhängigkeit** von Ereignissen:

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B) \qquad \text{(Def. 3.2-1)}$$

- **Zufallsvariable X:** Eine Funktion $X = X(\omega) : \omega \to \mathbb{R}$, die jedem Ergebnis aus Ω eine reelle Zahl zuordnet, so dass $X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{B}, \forall a \in \mathbb{R}$ gilt. (Def. 4.1-1)

- **Verteilungsfunktion** einer ZV X:

$$\begin{aligned} F_X(x) &:= P(X \leq x) && \text{(Def. 4.1-2)} \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\ \mathrm{du} && \text{(Def. 4.1-4)} \end{aligned}$$

- Eigenschaften einer **Dichte**:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} && f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} && \text{(Def. 4.1-4)} \\ &\text{(ii)} && \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{dx} = 1 && \text{(Kap. 4.1)} \end{aligned}$$

- „Dichte“ für diskrete ZVs:

$$f_X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X = x_n)\ \delta(x - x_n) \qquad \text{(4.1-12)}$$