Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruher Institut für Technologie
Communications Engineering Lab
Dr.-Ing. Holger Jäkel

CEL

Wahrscheinlichkeitstheorie – Übungsblatt 3

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 10

Ein Glücksrad mit sieben Feldern (1...7) werde 15 mal gedreht. Ausgehend von Feld 1 tritt jedes folgende nur halb so häufig auf wie das vorherige.

a) Geben Sie die Verteilung der bei einmaligem Drehen des Glücksrads angezeigten Feldnummer an.

b) Jetzt wird 15 mal gedreht und gezählt wie oft die jeweiligen Felder auftreten. Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung liegt vor? Begründung!

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten genau viermal Feld 1, zweimal Feld 2 und einmal Feld 6 auf?

Aufgabe 11

Die Zufallsvariable $X(\omega)$ besitze die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} C \cdot x\, e^{-ax^2} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

mit dem Parameter $a > 0$.

a) Man bestimme den Koeffizienten C.

b) Man berechne und skizziere die Verteilungsfunktion $F_X(x)$.

c) Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis $\{\omega : 1 < X(\omega) \leq 2\}$?

Aufgabe 12

Mittels eines Sensors soll die zufällige Größe X gemessen werden. Die Dichte von X ist

$$f_X(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x}, & \text{für } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zur Messung stehen zwei verschiedene Modelle zur Verfügung: Sensor I setzt alle Werte $x \leq 2$ fehlerfrei auf den Ausgang um. Für alle anderen Werte wird der Sensor übersteuert und es wird nur der Maximalwert 2 ausgegeben. Das alternative Modell, Sensor II, hat identische Funktionalität, allerdings können Werte bis $x = 3$ fehlerfrei ausgegeben werden.

a) Die Wahrscheinlichkeit einer Übersteuerung p_c soll maximal 2% sein. Reicht der Arbeitsbereich von Sensor I aus oder muss der hochwertigere Sensor II verwendet werden?

b) Man gebe die Dichte $f_Y(y)$ der vom verwendeten Sensor ausgegebenen Messwerte Y an.

c) Um wie viel Prozent verschiebt sich der Erwartungswert der ausgegebenen Werte Y im Vergleich zu $E(X)$?

Aufgabe 13

Man zeige für eine stetige Zufallsvariable X, für die die ersten beiden Momente existieren, und $Y = aX + b$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ folgende Beziehungen:

a) $E(Y) = aE(X) + b$

b) $D^2(Y) = a^2 D^2(X)$

c) $D^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$

d) $S(Y) = S(X)$; mit der Schiefe einer Zufallsvariable

$$S(X) = \frac{E(X^3) - 3D^2(X)E(X) - E^3(X)}{D^3(X)}$$

Aufgabe 14

Gegeben sei die Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}x^2 & \text{, für } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

a) Man berechne die Verteilungsfunktion und Dichte von $Y = e^{-X}$.

b) Man berechne den Erwartungswert von Y.