

3. Übung zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

Wintersemester 2017/18

Marcus Müller | 27. November 2017

COMMUNICATIONS ENGINEERING LAB (CEL)



■ Verteilungsfunktion einer ZV X :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) \, du \quad (\text{Def. 4.1-2,4})$$

■ Eigenschaften einer Dichte:

$$(i) \quad f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{Def. 4.1-4})$$

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \, dx = 1 \quad (\text{Kap. 4.1})$$

■ Erwartungswert:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, dx \quad \stackrel{X \text{ diskret}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n \quad (5.1-1,2)$$

■ Varianz:

$$\text{var}(X) = D^2(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - E^2(X) \quad (5.1-5)$$

■ Funktionen von ZV: $Y = g(X)$

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^N \frac{f_X(x_k)}{|g'(x_k)|} \text{ mit } x_1, \dots, x_N: \text{Lösungen der Gleichung } y = g(x) \quad (4.2-9)$$

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (5.1-7)$$

■ Charakteristische Funktion:

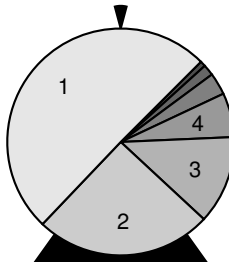
$$\varphi(s) = E(e^{jsX}) \stackrel{X \text{ diskret}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} e^{jsx_n} \cdot p_n \quad (\text{Def. 5.2-1})$$

$$E(X^k) = j^{-k} \varphi^{(k)}(0) \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.2-6)$$

Aufgabe 10

Ein Glücksrad mit sieben Feldern (1...7) werde 15 mal gedreht. Ausgehend von Feld 1 tritt jedes folgende nur halb so häufig auf wie das vorherige.

- Geben Sie die Verteilung der bei einmaligem Drehen des Glücksrads angezeigten Feldnummer an.
- Jetzt wird 15 mal gedreht und gezählt wie oft die jeweiligen Felder auftreten. Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung liegt vor? Begründung!
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten genau viermal Feld 1, zweimal Feld 2 und einmal Feld 6 auf?



Aufgabe 10 a)

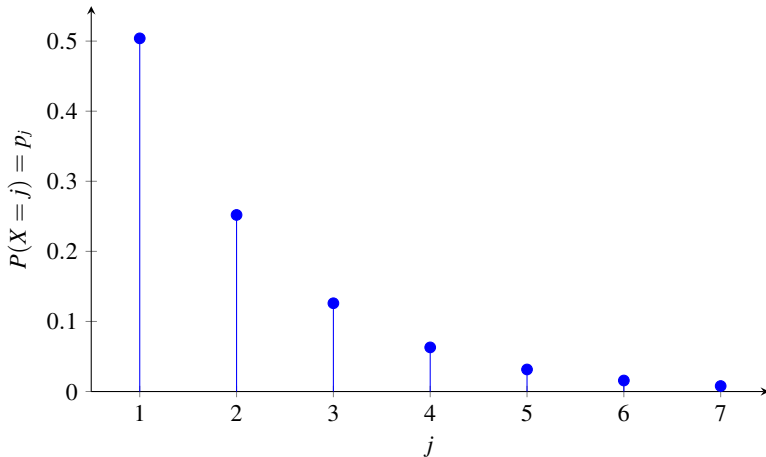


Abbildung 8: Verteilung der angezeigten Feldnummer

Die Zufallsvariable $X(\omega)$ besitze die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} C \cdot x e^{-ax^2} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

mit dem Parameter $a > 0$.

- Man bestimme den Koeffizienten C .
- Man berechne und skizziere die Verteilungsfunktion $F_X(x)$.
- Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis $\{\omega : 1 < X(\omega) \leq 2\}$?

Aufgabe 11 a) Wahrscheinlichkeitsdichte

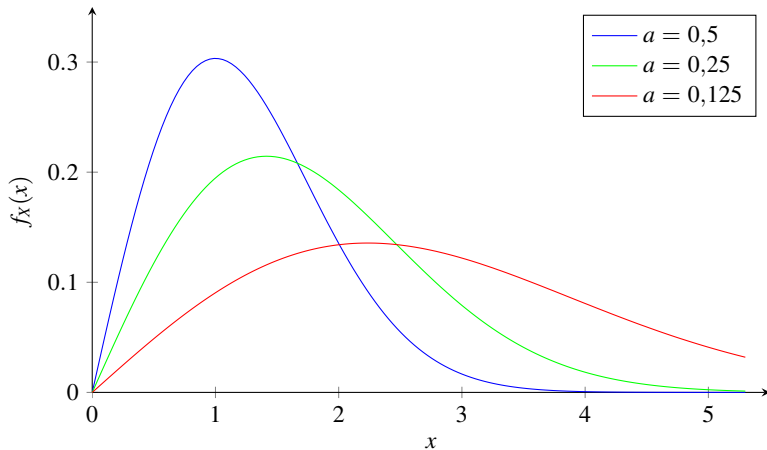


Abbildung 9: Wahrscheinlichkeitsdichte der ZV X .

Aufgabe 11 b) Verteilungsfunktion

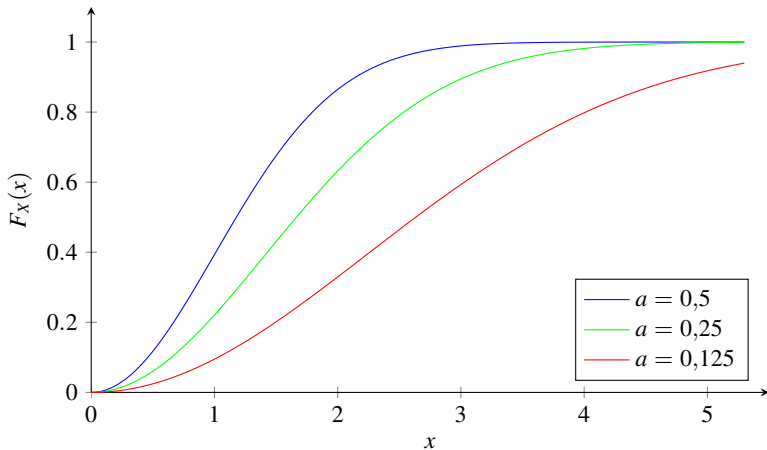


Abbildung 10: Verteilungsfunktion der ZV X

Aufgabe 11 c) Integrationsbereich

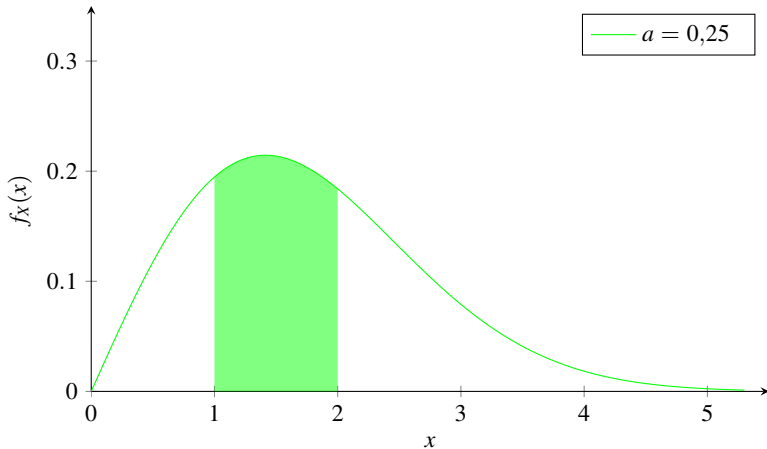


Abbildung 11: Wahrscheinlichkeitsdichte der ZV X . Mit Integrationsbereich für c)

Mittels eines Sensors soll die zufällige Größe X gemessen werden. Die Dichte von X ist

$$f_X(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x}, & \text{für } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zur Messung stehen zwei verschiedene Modelle zur Verfügung: Sensor I setzt alle Werte $x \leq 2$ fehlerfrei auf den Ausgang um. Für alle anderen Werte wird der Sensor übersteuert und es wird nur der Maximalwert 2 ausgegeben. Das alternative Modell, Sensor II, hat identische Funktionalität, allerdings können Werte bis $x = 3$ fehlerfrei ausgegeben werden.

- Die Wahrscheinlichkeit einer Übersteuerung p_c soll maximal 2% sein. Reicht der Arbeitsbereich von Sensor I aus oder muss der hochwertigere Sensor II verwendet werden?
- Man gebe die Dichte $f_Y(y)$ der vom verwendeten Sensor ausgegebenen Messwerte Y an.
- Um wie viel Prozent verschiebt sich der Erwartungswert der ausgegebenen Werte Y im Vergleich zu $E(X)$?

Aufgabe 12 a) Übersteuerung

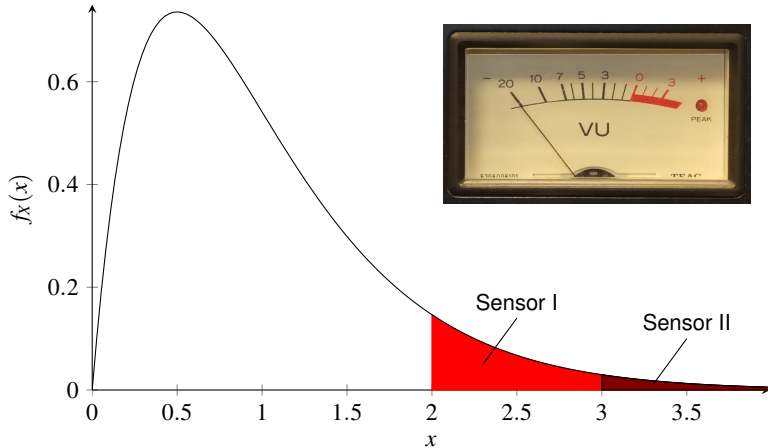


Abbildung 12: Dichtefunktion der ZV X

Aufgabe 12 b) Verteilungsfunktion

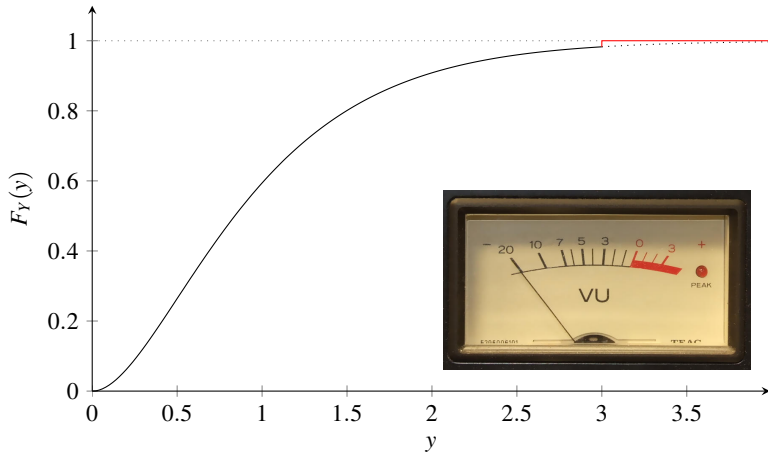


Abbildung 13: Verteilungsfunktion der ZV Y

Aufgabe 13

Man zeige für eine stetige Zufallsvariable X , für die die ersten beiden Momente existieren, und $Y = aX + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ folgende Beziehungen:

- a) $E(Y) = aE(X) + b$
- b) $D^2(Y) = a^2 D^2(X)$
- c) $D^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$
- d) $S(Y) = S(X)$; mit der Schiefe einer Zufallsvariable

$$S(X) = \frac{E(X^3) - 3D^2(X)E(X) - E^3(X)}{D^3(X)}$$

Aufgabe 14

Gegeben sei die Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}x^2 & , \text{ für } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

- a) Man berechne die Verteilungsfunktion und Dichte von $Y = e^{-X}$.
- b) Man berechne den Erwartungswert von Y .

Aufgabe 14: Wahrscheinlichkeitsdichte für X

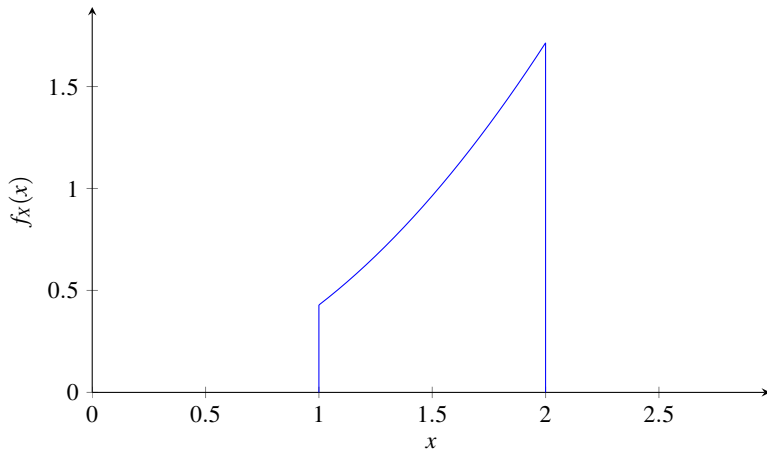


Abbildung 14: Dichtefunktion der ZV X

Aufgabe 14: Wahrscheinlichkeitsdichte für Y

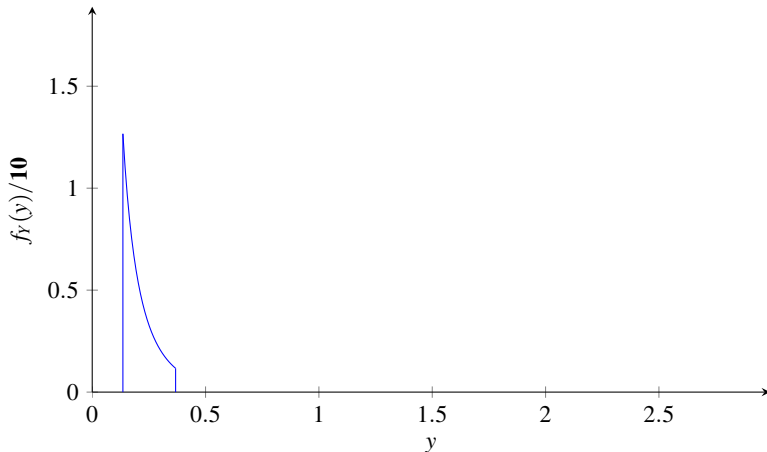


Abbildung 15: Dichtefunktion der ZV Y