Karlsruher Institut für Technologie
Communications Engineering Lab
Dr.-Ing. Holger Jäkel

Wahrscheinlichkeitstheorie – Lösungen zu Übung 3

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 10

Ein Glücksrad mit sieben Feldern (1...7) werde 15 mal gedreht. Ausgehend von Feld 1 tritt jedes folgende nur halb so häufig auf wie das vorherige.

a) Geben Sie die Verteilung der bei einmaligem Drehen des Glücksrads angezeigten Feldnummer an.

b) Jetzt wird 15 mal gedreht und gezählt wie oft die jeweiligen Felder auftreten. Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung liegt vor? Begründung!

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten genau viermal Feld 1, zweimal Feld 2 und einmal Feld 6 auf?

Lösung

a) Feld 1 tritt mit der Wahrscheinlichkeit p_1 auf. Für die folgenden Felder gilt:

$$p_2 = \frac{p_1}{2} \;;\quad p_3 = \frac{p_2}{2} = \frac{p_1}{4} \;;\quad \dots \quad \Rightarrow \quad p_j = \frac{p_1}{2^{j-1}} \qquad j = 1, \dots, 7$$

Die Summe aller Feldwahrscheinlichkeiten muss eins ergeben:

$$\sum_{j=1}^{7} p_j = p_1 \sum_{j=1}^{7} \frac{1}{2^{j-1}} = p_1 \sum_{j=0}^{6} \left(\frac{1}{2}\right)^j \overset{\text{endl. geo. Reihe}}{=} p_1 \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\frac{1}{2}} = \frac{127}{64} p_1 \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow p_1 = \frac{64}{127} \approx 0{,}507$$

b) Es werden $N = 15$ unabhängige WDH eines Zufallsexperimentes mit mehr als zwei verschiedenen Ausgängen ausgeführt $\Rightarrow$ Polynomialverteilung.

Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_7 \in \{0{,}1, \dots ,15\}$ beschreiben die Anzahl der Treffer auf das jeweilige Feld. Dabei ist stets $X_1 + X_2 + \ldots + X_7 = 15$:

$$P(X_1 = k_1 \wedge X_2 = k_2 \wedge \ldots \wedge X_7 = k_7) = \frac{N!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_7!} \cdot p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_7^{k_7}$$

Dabei ist $\sum_{j=1}^{7} k_j = 15$ und $\sum_{j=1}^{7} p_j = 1$.

c) Von 15 mal Drehen treten, neben viermal Feld 1, zweimal Feld 2 und einmal Feld 6, achtmal eines der anderen Felder auf. Anstatt alle möglichen Variationen davon zu berechnen, werden diese zu einem Feld „R“ zusammengefasst behandelt:

$$P(X_1 = 4 \wedge X_2 = 2 \wedge X_6 = 1 \wedge \underbrace{X_3 + X_4 + X_5 + X_7}_{=:X_R} = 8)$$

$$= \frac{15!}{4!\,2!\,1!\,8!} \cdot p_1^4 p_2^2 p_6^1 \cdot (\underbrace{p_3 + p_4 + p_5 + p_7}_{p_R})^8 \approx 0{,}032\%$$

Zusatzmaterial

a)

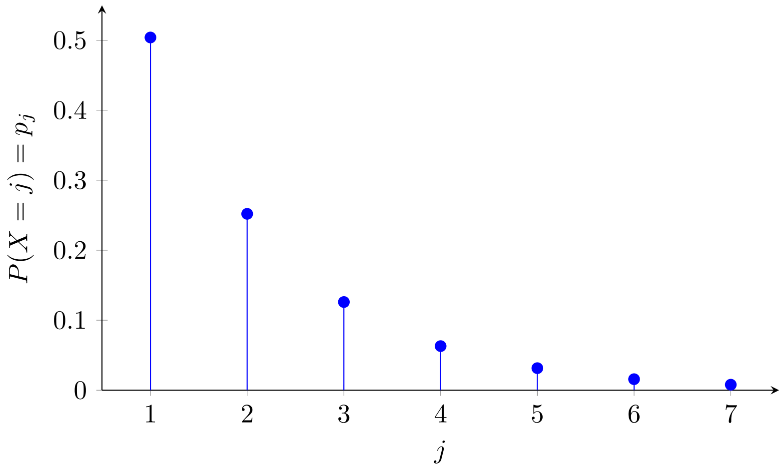

Abbildung 9: Verteilung der angezeigten Feldnummer

Aufgabe 11

Die Zufallsvariable $X(\omega)$ besitze die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} C \cdot x\, e^{-ax^2} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

mit dem Parameter $a > 0$.

a) Man bestimme den Koeffizienten C.

b) Man berechne und skizziere die Verteilungsfunktion $F_X(x)$.

c) Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis $\{\omega : 1 < X(\omega) \leq 2\}$?

Lösung

a) Der Koeffizienten C muss so gewählt werden, dass $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = C \int_0^{\infty} xe^{-ax^2} dx = -\frac{C}{2a} \cdot \int_a^{\infty} -2axe^{-ax^2} dx$$
$$= -\frac{C}{2a} \left[e^{-ax^2}\right]_0^{\infty} = -\frac{C}{2a}(0-1) = \frac{C}{2a} \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow C = 2a$$

b) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u) du$

$x < 0: \quad F_X(x) = 0$

$x \geq 0: \quad F_X(x) = F_X(0) + \int_0^x f_X(u)\, du = 0 - \left[e^{-au^2}\right]_0^x = 1 - e^{-ax^2}$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 1 - e^{-ax^2} & , x \geq 0 \end{cases}$$

c) Mit Dichte oder direkt mit der Verteilungsfunktion:

$$P(\,1 < X \leq 2) = \int_1^2 f_X(u)\, du = F_X(2) - F_X(1) = e^{-a} - e^{-4a}$$

Zusatzmaterial

a) Wahrscheinlichkeitsdichte

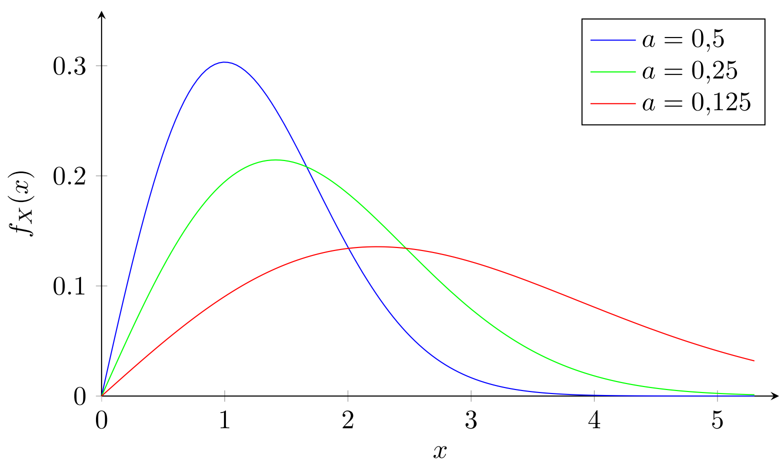

Abbildung 10: Wahrscheinlichkeitsdichte der ZV X.

b) Verteilungsfunktion

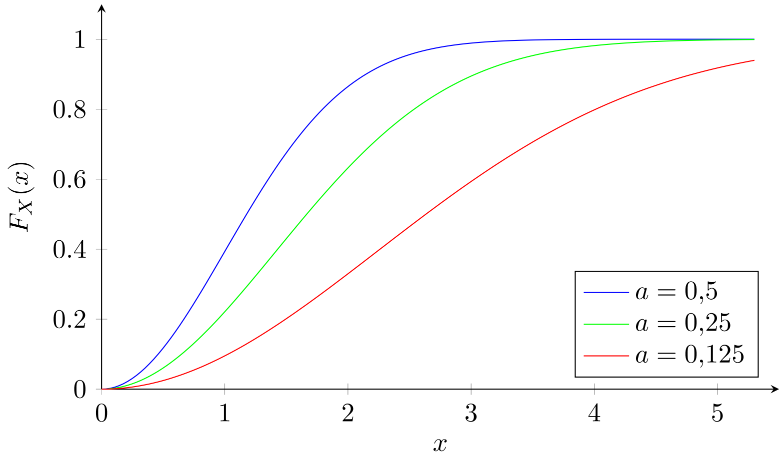

Abbildung 11: Verteilungsfunktion der ZV X

c) Integrationsbereich

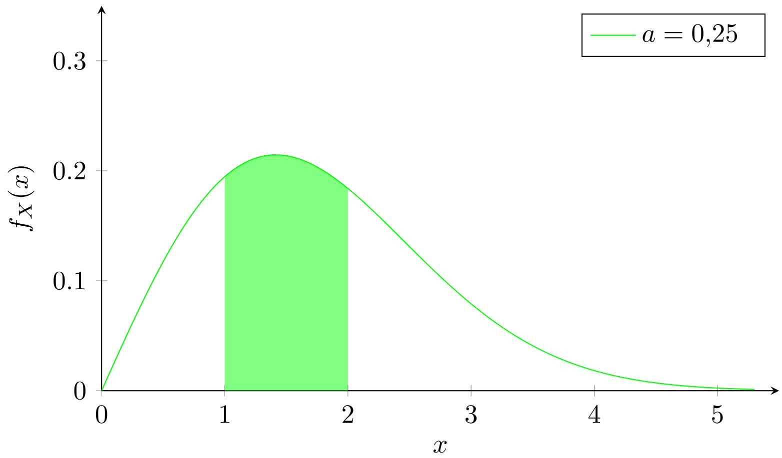

Abbildung 12: Wahrscheinlichkeitsdichte der ZV X. Mit Integrationsbereich für c)

Aufgabe 12

Mittels eines Sensors soll die zufällige Größe X gemessen werden. Die Dichte von X ist

$$f_X(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x}, & \text{für } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zur Messung stehen zwei verschiedene Modelle zur Verfügung: Sensor I setzt alle Werte $x \leq 2$ fehlerfrei auf den Ausgang um. Für alle anderen Werte wird der Sensor übersteuert und es wird nur der Maximalwert 2 ausgegeben. Das alternative Modell, Sensor II, hat identische Funktionalität, allerdings können Werte bis $x = 3$ fehlerfrei ausgegeben werden.

a) Die Wahrscheinlichkeit einer Übersteuerung p_c soll maximal 2% sein. Reicht der Arbeitsbereich von Sensor I aus oder muss der hochwertigere Sensor II verwendet werden?

b) Man gebe die Dichte $f_Y(y)$ der vom verwendeten Sensor ausgegebenen Messwerte Y an.

c) Um wie viel Prozent verschiebt sich der Erwartungswert der ausgegebenen Werte Y im Vergleich zu $E(X)$?

Lösung

a) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass X größer als $x_c \in \{2; 3\}$ ist.

$$\begin{aligned} p_{c,x_c} &= P(\,X > x_c) = \int_{x_c}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x \overset{x_c \geq 0}{=} \int_{x_c}^{\infty} 4xe^{-2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[4x \cdot \tfrac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{x_c}^{\infty} - \int_{x_C}^{\infty} 4 \cdot \tfrac{1}{-2}e^{-2x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2x_C e^{-2x_c} + 2\left[\tfrac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{x_c}^{\infty} = (2x_c + 1)e^{-2x_c} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit einer Übersteuerung ergibt sich für Sensor I zu $p_{c,2} = 9{,}16\%$ und für Sensor II zu $p_{c,3} = 1{,}74\%$. Es muss also Sensor II verwendet werden.

b) Für $y < 3$ ist Y stetig. Die Verteilung bleibt hier unverändert.

$$\tilde{f}_Y(y) = \begin{cases} f_X(y) & , \; y < 3 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} = \begin{cases} 4xe^{-2x} & , \; 0 \leq y < 3 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeitsmasse in $y \geq 3$ ergibt einen diskreten Anteil bei $y = 3$. Insgesamt:

$$f_Y(y) = \tilde{f}_Y(y) + p_{c,3} \cdot \delta(y - 3)$$

c) Gesucht ist die relative Abweichung $\delta = \left(E(Y) - E(X)\right)/E(X)$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = 4\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{Formelsammlung}}{=} 4 \cdot \left[\frac{e^{-2x}}{(-2)^3} \cdot (4x^2 + 4x + 2)\right]_0^\infty = 1$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^3 y \cdot \tilde{f}(y)\,\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p_{c,3} \cdot \delta(y-3)\,\mathrm{d}y$$

$$= \left[\frac{e^{-2y}}{-2} \cdot (4y^2 + 4y + 2)\right]_0^3 + 3p_{c,3} = 1 - 25e^{-6} + 21e^{-6} = 1 - 4e^{-6} \approx 0{,}9901$$

Damit ist $\delta = -4e^{-6} \approx -0.99\%$.

Zusatzmaterial

a) Übersteuerung

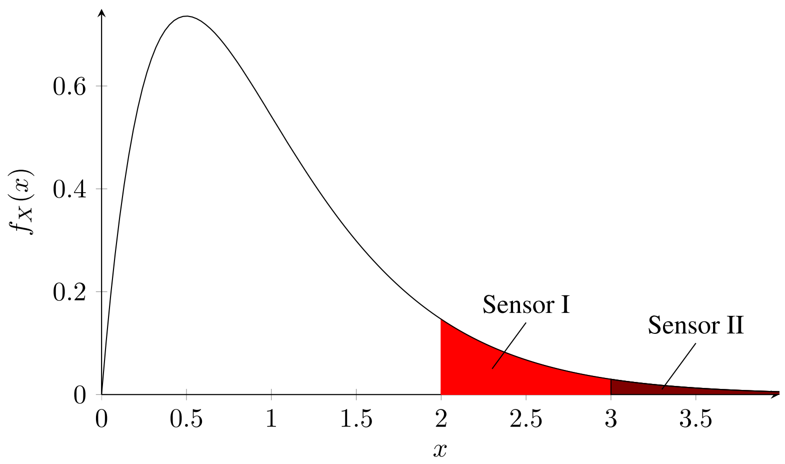

Abbildung 13: Dichtefunktion der ZV X

b) Verteilungsfunktion

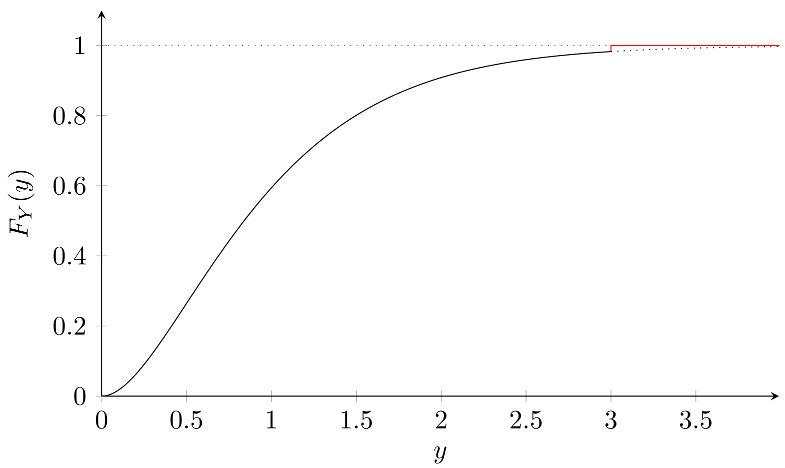

Abbildung 14: Verteilungsfunktion der ZV Y

Aufgabe 13

Man zeige für eine stetige Zufallsvariable X, für die die ersten beiden Momente existieren, und $Y = aX + b$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ folgende Beziehungen:

a) $E(Y) = aE(X) + b$

b) $D^2(Y) = a^2 D^2(X)$

c) $D^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$

d) $S(Y) = S(X)$; mit der Schiefe einer Zufallsvariable

$$S(X) = \frac{E(X^3) - 3D^2(X)E(X) - E^3(X)}{D^3(X)}$$

Lösung

a) Zusammenhang in Definition des Erwartungswert-Operators einsetzen:

$$\begin{aligned} E(Y) = E\,(aX+b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b)\, f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= a \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x}_{E(X)} + b \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x}_{1} = aE(X) + b \quad \square \end{aligned}$$

b) Es ist $Y = g(X) = aX + b$:

$$\begin{aligned} D^2(Y) = D^2\big(g(X)\big) &= E\left(\Big[g(X) - E\big(g(X)\big)\Big]^2\right) \overset{a)}{=} E\left(\big[aX + b - E(aX+b)\big]^2\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(ax + b - aE(x) - b\big)^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = a^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \big(x - E(X)\big)^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = a^2 D^2(X) \quad \square \end{aligned}$$

c) Durch Ausmultiplizieren erhält man:

$$\begin{aligned} D^2(X) = E\Big(\big[X - E(X)\big]^2\Big) &= E\big(X^2 - 2X \cdot E(X) + E^2(X)\big) \\ &= E(X^2) - E\big(2E(X) \cdot X\big) + E\big(E^2(X)\big) \\ &= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + E^2(X) \cdot \underbrace{E(1)}_{1} = E(X^2) - E^2(X) \quad \square \end{aligned}$$

d) Mit $S(Y) = S(aX + b)$ folgt:

$$\begin{aligned} S(aX+b) &= a^{-3}D^{-3}(X) \cdot \begin{pmatrix} a^3E(X^3) + 3a^2E(X^2)b + 3aE(X)b^2 + b^3 - 3a^2D^2(X)(aE(X)+b) \\ -a^3E^3(X) - 3a^2E^2(X)b - 3aE(X)b^2 - b^3 \end{pmatrix} \\ &= a^{-3}D^{-3}(X) \cdot \big(\ a^3E(X^3) + 3a^2D^2(X)b - 3a^3D^2(X)E(X) - 3a^2D^2(X)b - a^3E^3(X) \ \big) \\ &= \quad D^{-3}(X) \cdot \big(\ E(X^3) - 3D^2(X)E(X) - E^3(X) \ \big) = S(X) \quad \square \end{aligned}$$

Schneller geht es mit folgender Definition der Schiefe: $S(X) = E([(X - E(X))/D(X)]^3)$

$$S(aX+b) = E\left(\left[\frac{aX + b - aE(X) - b}{aD(X)}\right]^3\right) = S(X) \quad \square$$

Aufgabe 14

Gegeben sei die Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}x^2 & \text{, für } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

a) Man berechne die Verteilungsfunktion und Dichte von $Y = e^{-X}$.

b) Man berechne den Erwartungswert von Y.

Lösung

a) Verteilungsfunktionen $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,\mathrm{d}u$ berechnen:

$$\begin{aligned} x < 1: &\quad F_X(x) = 0 \\ 1 \leq x \leq 2: &\quad F_X(x) = F_X(1) + \int_1^x \tfrac{3}{7}u^2\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{7}\left[u^3\right]_1^x = \tfrac{1}{7}(x^3-1) \\ 2 < x \quad : &\quad F_X(x) = F_X(2) + 0 = 1 \end{aligned}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \; x < 1 \\ \frac{1}{7}(x^3-1) & , \; 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & , \; \text{sonst} \end{cases}$$

Zusammenhang der Verteilungsfunktionen $F_Y(y)$ und $F_X(x)$ bestimmen:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(e^{-X} \leq y) = P\big(-X \leq \ln(y)\big) = P\big(X \geq -\ln(y)\big) \\ &= 1 - F_X\big(-\ln(y)\big) \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \begin{cases} 1-0 & , \; -\ln(y) < 1 \\ 1 - \frac{1}{7}\big(-\ln^3(y) - 1\big) & , \; 1 \leq -\ln(y) \leq 2 \\ 1-1 & , \; -\ln(y) > 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , \; y < e^{-2} \\ \frac{1}{7}\big(8 + \ln^3(y)\big) & , \; e^{-2} \leq y \leq e^{-1} \\ 1 & , \; \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Dichte von Y:

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{7}\ln^2(y) \cdot \frac{1}{y} & , \; e^{-2} \leq y \leq e^{-1} \\ 0 & , \; \text{sonst} \end{cases}$$

b) Entweder direkt mit $f_Y(y)$ aus a) oder mit $Y = e^{-X}$ und der Dichte von X:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \tfrac{3}{7}\int_{e^{-2}}^{e^{-1}} \ln^2(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \tfrac{3}{7}\Big[y \cdot \ln^2(y)\Big]_{e^{-2}}^{e^{-1}} - \tfrac{3}{7}\int_{e^{-2}}^{e^{-1}} y \cdot 2\ln(y)\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \\
&= \tfrac{3}{7}\Big[y \cdot \ln^2(y)\Big]_{e^{-2}}^{e^{-1}} - \tfrac{3}{7}\Big[2y \cdot \ln(y)\Big]_{e^{-2}}^{e^{-1}} + \tfrac{3}{7}\int_{e^{-2}}^{e^{-1}} 2y \cdot \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \\
&= \tfrac{3}{7}\Big[y\ln^2(y) - 2y\ln(y) + 2y\Big]_{e^{-2}}^{e^{-1}} = \tfrac{3}{7}\left(5e^{-1} - 10e^{-2}\right) \approx 0{,}208
\end{aligned}$$

Hier wurde absichtlich keine Transformation der Integrationsvariable vorgenommen; das passiert im Folgenden:

$$E(Y) = E\left(e^{-X}\right) = \int_1^2 e^{-x} \cdot \tfrac{3}{7}x^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{3}{7}\left[\frac{e^{-x}}{-1}(x^2+2x+2)\right]_1^2 = \tfrac{3}{7}(-10e^{-2} + 5e^{-1})$$

Zusatzmaterial

Wahrscheinlichkeitsdichte für X

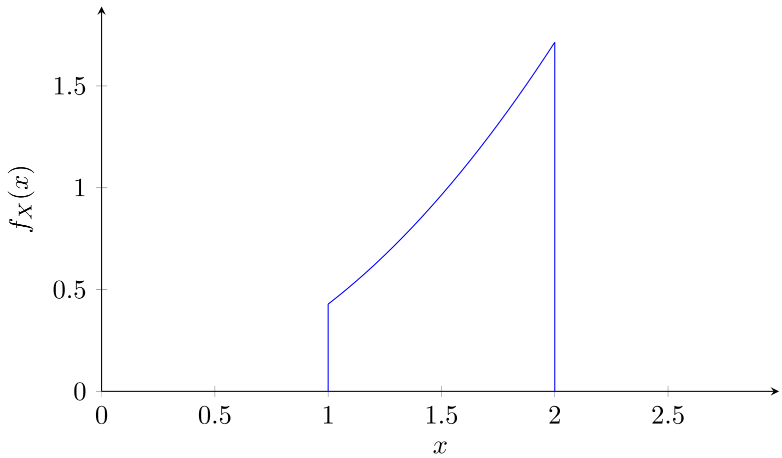

Abbildung 15: Dichtefunktion der ZV X

Wahrscheinlichkeitsdichte für Y

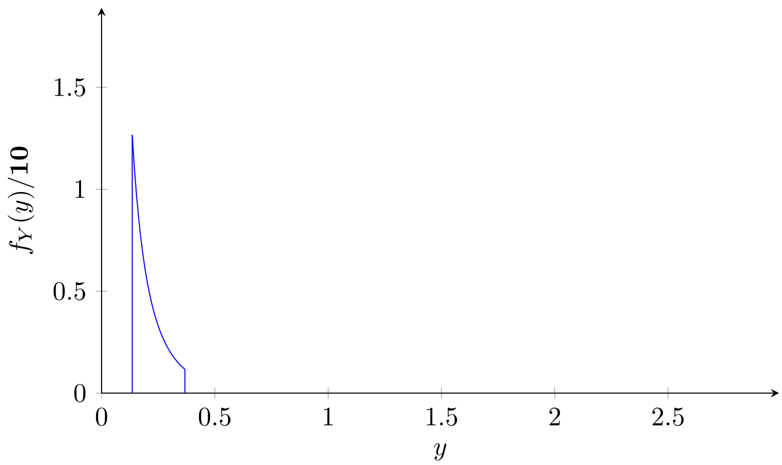

Abbildung 16: Dichtefunktion der ZV Y

Zusammenfassung

- **Verteilungsfunktion** einer ZV X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{(Def. 4.1-2,4)}$$

- Eigenschaften einer **Dichte**:

$$\text{(i)} \qquad f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{(Def. 4.1-4)}$$

$$\text{(ii)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1 \qquad \text{(Kap. 4.1)}$$

- **Erwartungswert:**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x \quad \overset{X \text{ diskret}}{=} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n \qquad \text{(5.1-1,2)}$$

- **Varianz:**

$$\mathrm{var}(X) = D^2(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - E^2(X) \qquad \text{(5.1-5)}$$

- **Funktionen von ZV:** $Y = g\,(X)$

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^{N} \frac{f_X(x_k)}{|g'(x_k)|} \text{ mit } x_1, \ldots, x_N\text{: Lösungen der Gleichung } y = g(x) \qquad \text{(4.2-9)}$$

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(5.1-7)}$$

- **Charakterische Funktion:**

$$\varphi(s) = E(e^{jsX}) \quad \overset{X \text{ diskret}}{=} \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{jsx_n} \cdot p_n \qquad \text{(Def. 5.2-1)}$$

$$E(X^k) = j^{-k} \varphi^{(k)}(0) \qquad k = 1{,}2, \ldots \qquad \text{(5.2-6)}$$