Karlsruhe Institute of Technology

4. Übung zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

Wintersemester 2017/18

Marcus Müller | 11. Dezember 2017

COMMUNICATIONS ENGINEERING LAB (CEL)

Zusammenfassung

- **Funktionen von ZV:** $Y = g(X)$

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^{N} \frac{f_X(x_k)}{|g'(x_k)|} \text{ mit } x_1, \ldots, x_N \text{: Lösungen der Gleichung } y = g(x) \qquad (4.2\text{-}9)$$

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, \mathrm{d}x \qquad (5.1\text{-}7)$$

- **Normalverteilung** $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ mit $\sigma > 0$:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (\text{Def. } 6.8\text{-}1)$$

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad (\text{Kap. } 6.8)$$

Für die Verwendung der Tabelle aus dem Buch: $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$

Zusammenfassung (weiter)

- **2D Verteilungsfunktion**:

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u \qquad \text{(Def. 7.1-2)}$$

- **Randdichte**:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, \mathrm{d}y \qquad \text{(Def. 7.2-1)}$$

- **Bedingte Dichte**:

$$f_X(x|Y = y_1) = \frac{f_{XY}(x, y_1)}{f_Y(y_1)}, \text{ wenn } f_Y(y_1) > 0 \qquad \text{(Def. 7.2-2)}$$

- **Gemeinsame Dichte unabhängiger Zufallsvariablen** X, Y:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \qquad \text{(Def. 7.3-1)}$$

Aufgabe 14

Gegeben sei die Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}x^2 & \text{, für } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

a) Man berechne die Verteilungsfunktion und Dichte von $Y = e^{-X}$.

b) Man berechne den Erwartungswert von Y.

Aufgabe 14: Wahrscheinlichkeitsdichte für X

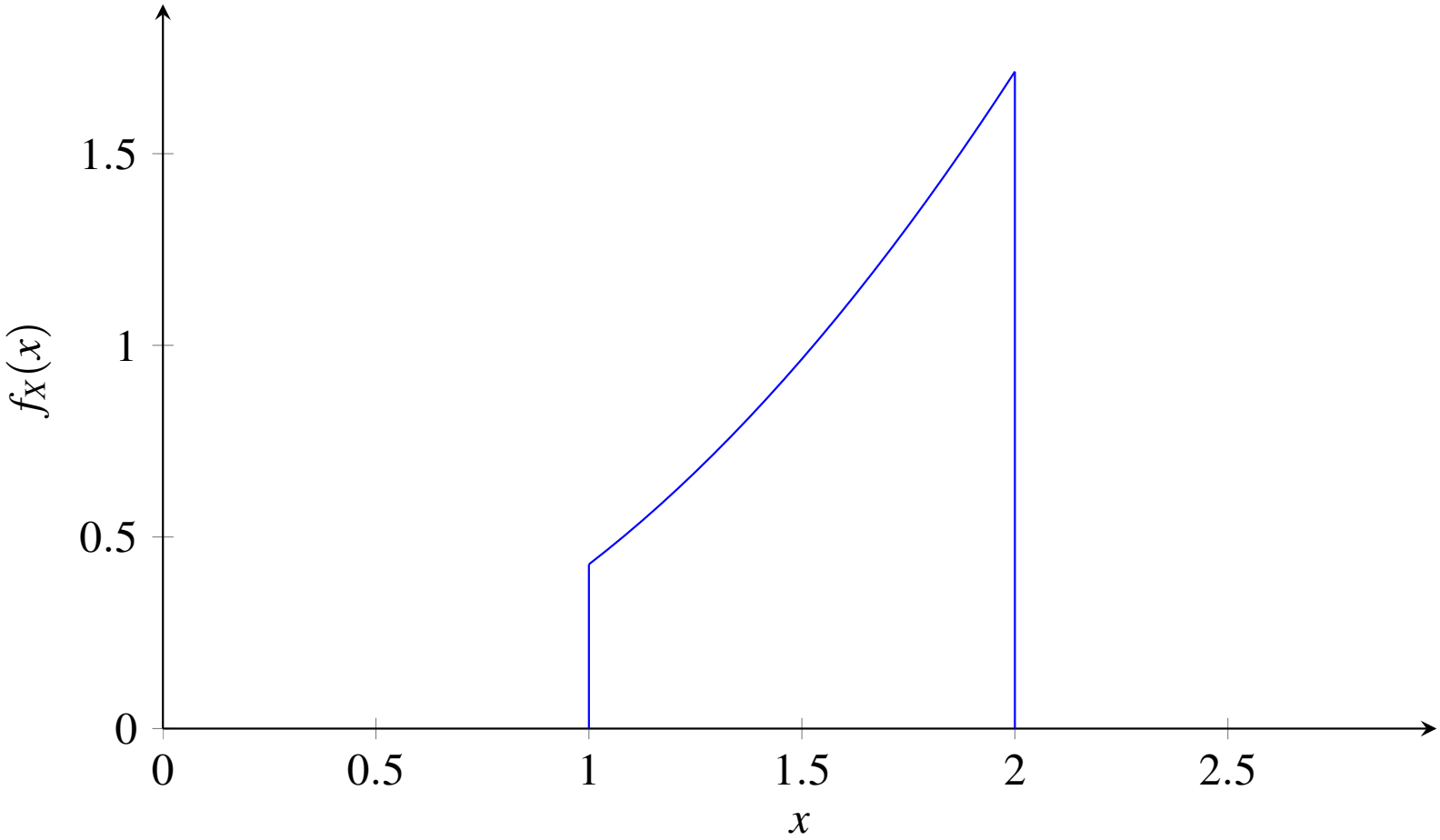


Abbildung 15: Dichtefunktion der ZV X

Aufgabe 14: Wahrscheinlichkeitsdichte für Y

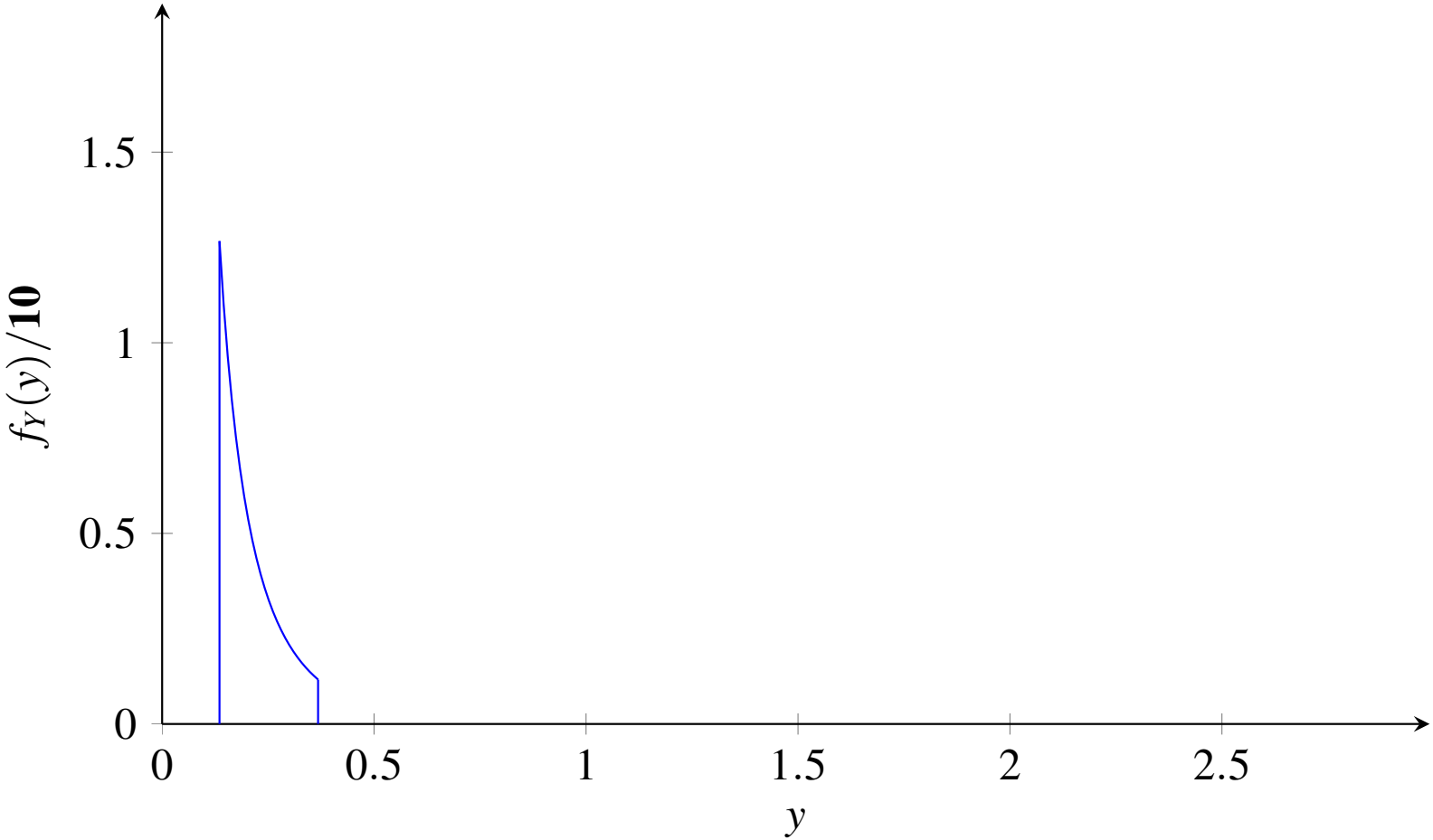


Abbildung 16: Dichtefunktion der ZV Y

Aufgabe 15

In einem Produktionsprozess werden Ladegeräte für Mobiltelefone hergestellt. Bevor die Ladegeräte mit den Mobiltelefonen zusammen verpackt werden, wird die Ladespannung von jedem Ladegerät einmal gemessen. Die Messwerte der Ladespannungen der verschiedenen Ladegeräte genüge näherungsweise einer normalverteilten Zufallsvariablen mit $\mu = 5$ Volt und $\sigma = 0{,}07$ Volt. Alle Ladegeräte, bei denen die Messung um mehr als 4 % vom Sollwert $S = 5$ Volt abweicht, sollen aussortiert werden.

a) Wie viel Prozent der Ladegeräte werden aussortiert?

b) Der Hersteller möchte seinen Produktionsprozess so verbessern, dass nur noch halb soviele Ladegeräte wie in a) aussortiert werden. Auf welchen Wert müsste er dazu σ senken?

c) Durch einen Produktionsfehler verschiebt sich der Mittelwert μ auf $5{,}1$ Volt (σ ist $0{,}07$ Volt). Wie groß ist jetzt der Prozentsatz, der aussortiert wird?

Aufgabe 15 a) Ladespannung normal

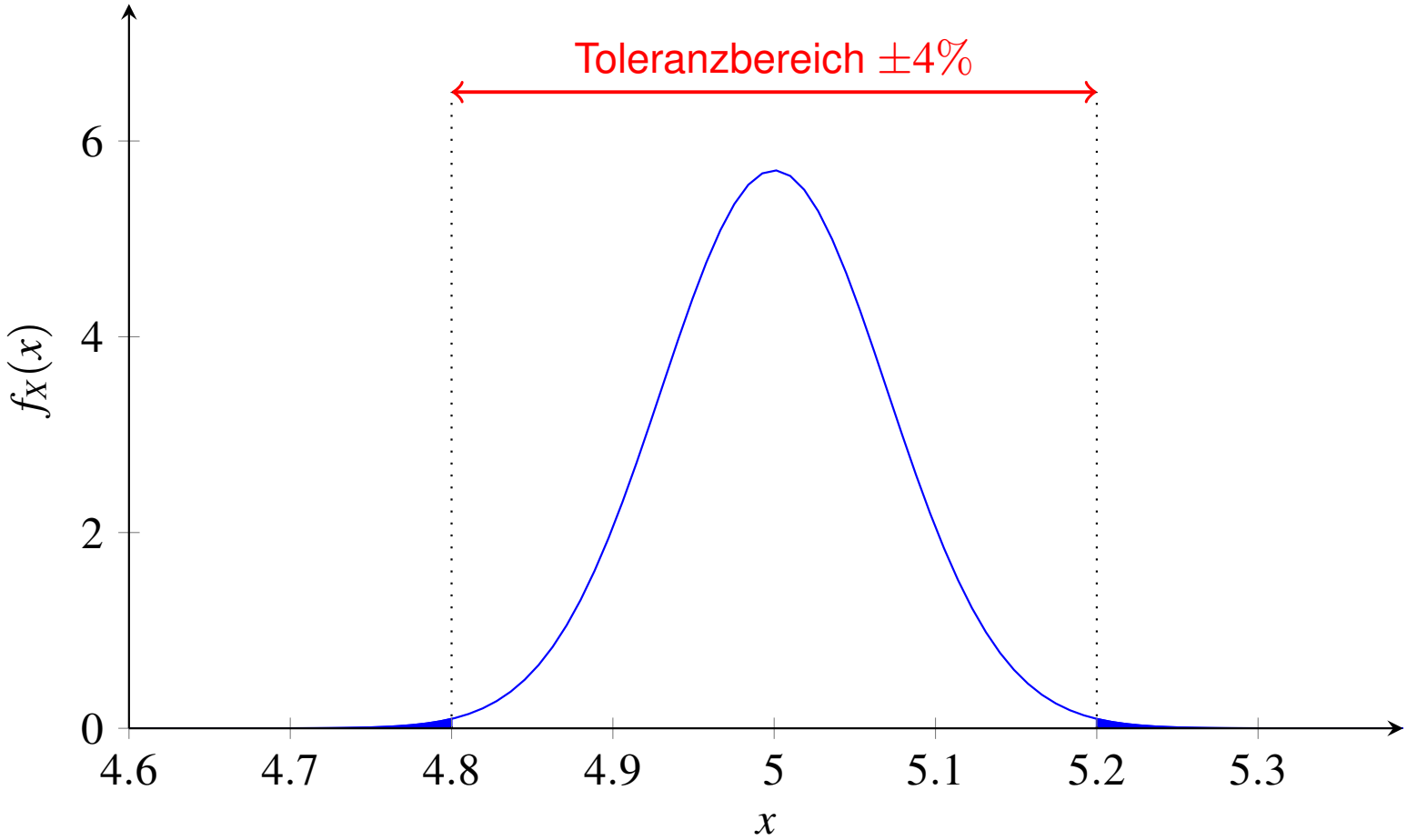


Abbildung 17: Dichte der gemessenen Ladespannung bei $\mu = 5$ und $\sigma = 0{,}07$

Aufgabe 15:

Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,64	0,9958546	**3,08**	**0,9989650**	4,10	0,9999793
2,66	0,9960929	3,15	0,9991836	4,15	0,9999833
2,68	0,9963188	3,20	0,9993128	4,20	0,9999866
2,70	0,9965330	3,25	0,9994229	4,25	0,9999893
2,72	0,9967359	3,30	0,9995165	**4,30**	**0,9999914**
2,74	0,9969280	3,35	0,9995959	4,35	0,9999931
2,76	0,9971099	3,40	0,9996630	4,40	0,9999945
2,78	0,9972820	3,45	0,9997197	4,45	0,9999957
2,80	0,9974448	3,50	0,9997673	4,50	0,9999966
2,82	0,9975988	3,55	0,9998073	4,55	0,9999973
2,84	0,9977443	3,60	0,9998408	4,60	0,9999978
2,86	**0,9978817**	3,65	0,9998688	4,65	0,9999983
2,88	0,9980116	3,70	0,9998922	4,70	0,9999986

Abbildung 18: Standardnormalverteilung (hinter der 7. Nachkommastelle gerundet)

Aufgabe 15 b) Ladespannung bei verbessertem Prozess

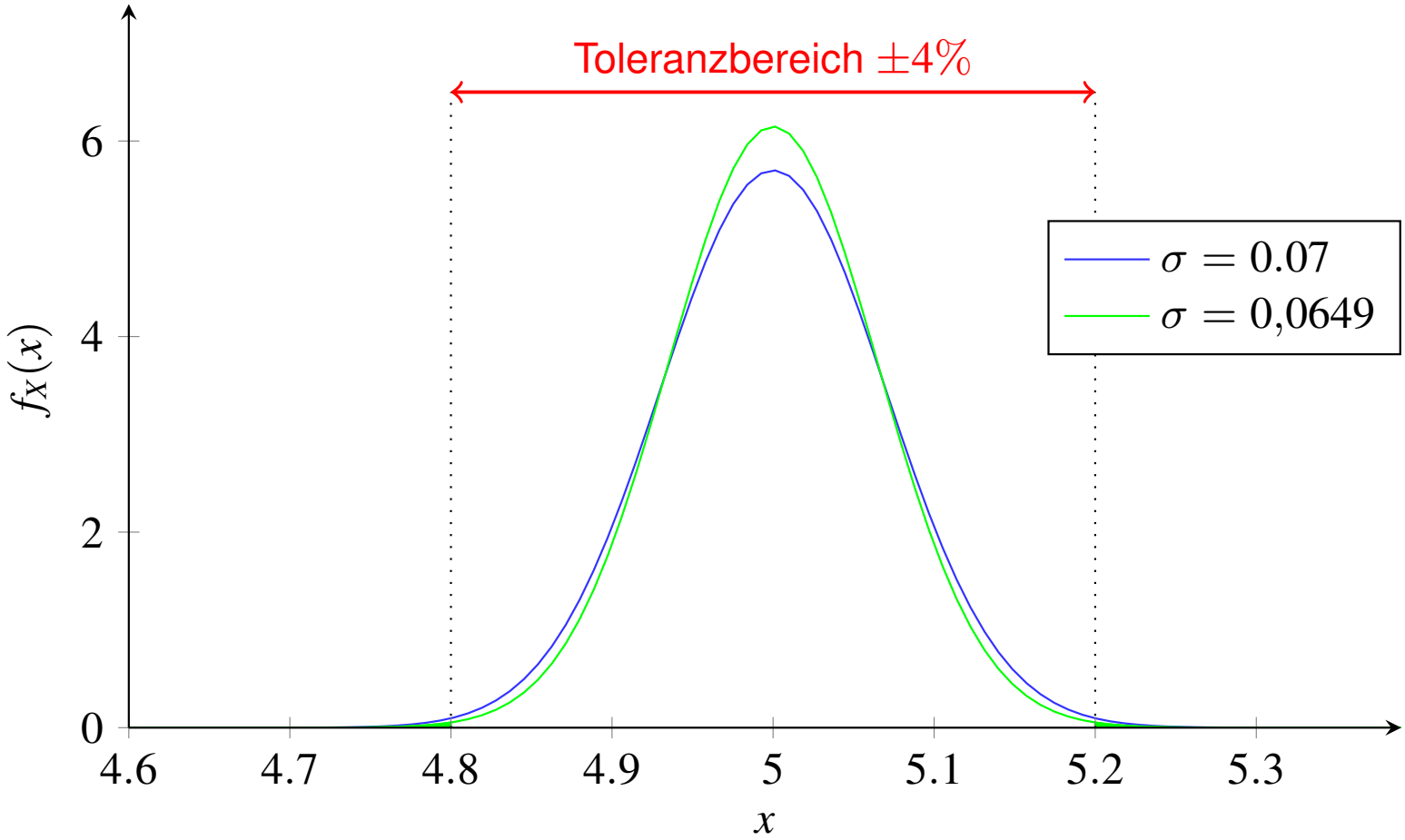


Abbildung 19: Dichte der gemessenen Ladespannung bei $\mu = 5$ und $\sigma = 0{,}0649$

Aufgabe 15 c) Ladespannung bei Produktionsfehler

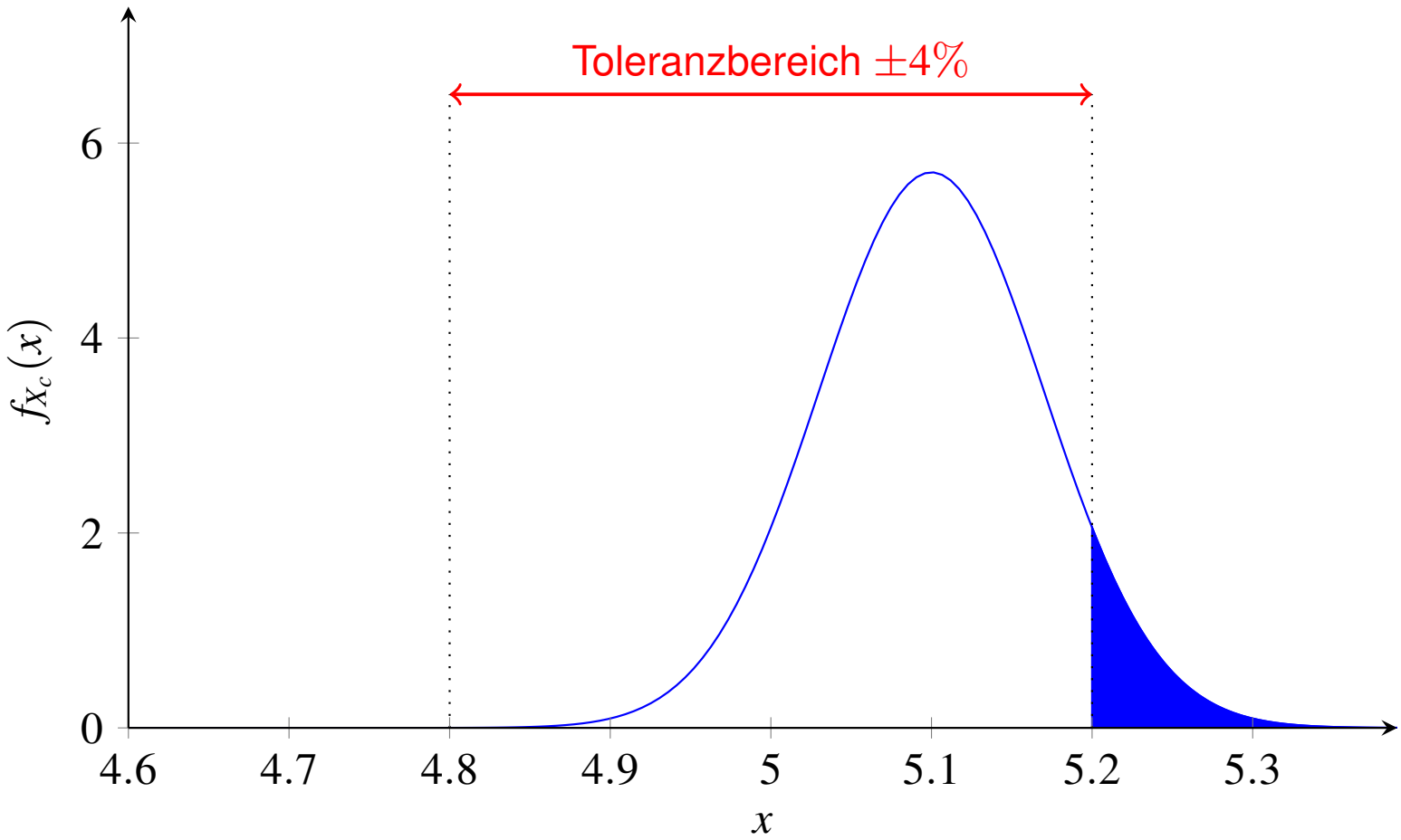


Abbildung 20: Dichte der gemessenen Ladespannung bei $\mu = 5.1$ und $\sigma = 0{,}07$

Aufgabe 15:

Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,64	0,9958546	**3,08**	**0,9989650**	4,10	0,9999793
2,66	0,9960929	3,15	0,9991836	4,15	0,9999833
2,68	0,9963188	3,20	0,9993128	4,20	0,9999866
2,70	0,9965330	3,25	0,9994229	4,25	0,9999893
2,72	0,9967359	3,30	0,9995165	**4,30**	**0,9999914**
2,74	0,9969280	3,35	0,9995959	4,35	0,9999931
2,76	0,9971099	3,40	0,9996630	4,40	0,9999945
2,78	0,9972820	3,45	0,9997197	4,45	0,9999957
2,80	0,9974448	3,50	0,9997673	4,50	0,9999966
2,82	0,9975988	3,55	0,9998073	4,55	0,9999973
2,84	0,9977443	3,60	0,9998408	4,60	0,9999978
2,86	**0,9978817**	3,65	0,9998688	4,65	0,9999983
2,88	0,9980116	3,70	0,9998922	4,70	0,9999986

Abbildung 21: Standardnormalverteilung (hinter der 7. Nachkommastelle gerundet)

Aufgabe 15:

Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,20	0,8849303	1,70	0,9554345	2,20	0,9860965
1,22	0,8887675	1,72	0,9572837	2,22	0,9867906
1,24	0,8925123	1,74	0,9590704	2,24	0,9874545
1,26	0,8961653	1,76	0,9607960	2,26	0,9880893
1,28	0,8997274	1,78	0,9624620	2,28	0,9886961
1,30	0,9031995	1,80	0,9640696	2,30	0,9892758
1,32	0,9065824	1,82	0,9656204	2,32	0,9898295
1,34	0,9098773	1,84	0,9671158	2,34	0,9903581
1,36	0,9130850	1,86	0,9685572	2,36	0,9908625
1,38	0,9162066	1,88	0,9699459	2,38	0,9913436
1,40	0,9192433	1,90	0,9712834	2,40	0,9918024
1,42	**0,9221961**	1,92	0,9725710	2,42	0,9922397
1,44	0,9250663	1,94	0,9738101	2,44	0,9926563

Abbildung 22: Standardnormalverteilung (hinter der 7. Nachkommastelle gerundet)

Aufgabe 16

Die zweidimensionale Zufallsvariable $(X, Y)^T$ sei über die Fläche, die in Abb. 20 dargestellt wird, gleichverteilt.

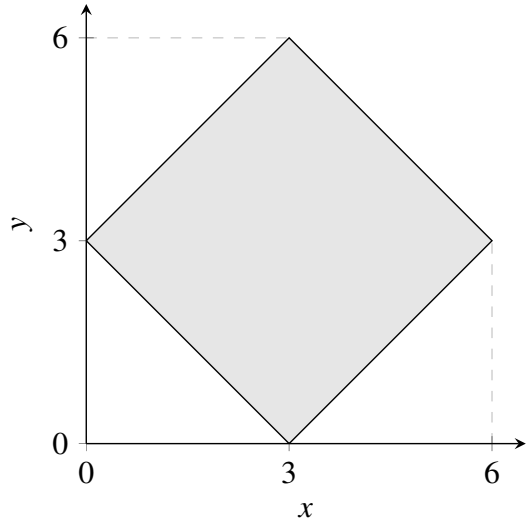


Abbildung 23: Gebiet G

a) Geben Sie die Dichte $f(x,y)$ an.
b) Berechnen Sie die Randdichte und Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.
c) Prüfen Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind.
d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist $X \leq 4$, wenn $Y = 4$ ist.

Aufgabe 16 a)

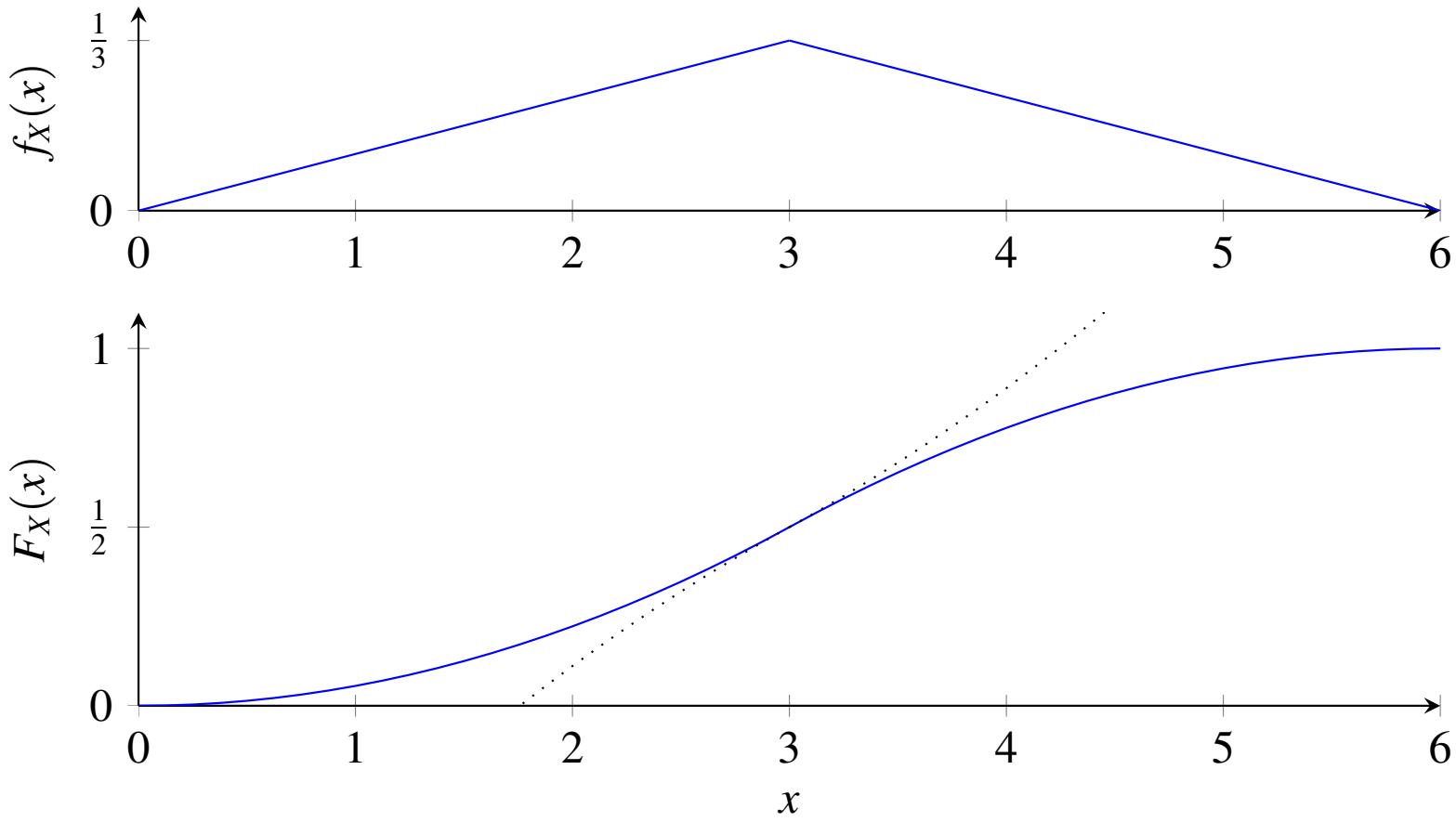


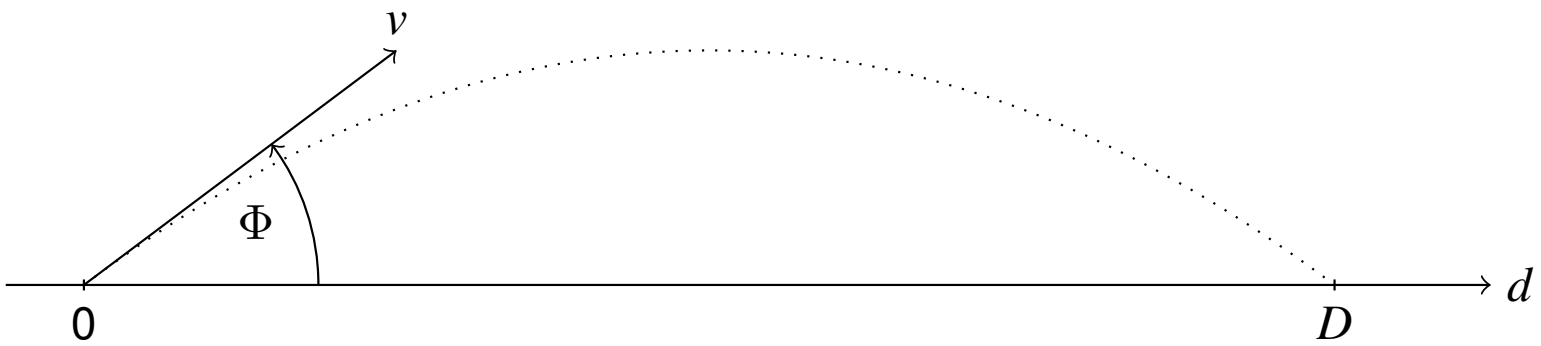
Abbildung 24: Randdichte und Verteilungsfunktion von X

Aufgabe 17

Ein Teilchen verlässt den Ursprung unter dem Einfluss der Gravitationskraft mit einer initialen Geschwindigkeit v und einem zufälligen Winkel $\Phi \in (0; \frac{\pi}{2}]$ gegenüber der horizontalen Achse. Das Teilchen hat eine parabelförmige Trajektorie (ohne Reibung) und erreicht den Grund in einer Entfernung von

$$D = \frac{v^2}{g} \sin(2\Phi)$$

vom Ursprung. Berechnen Sie die Dichte der Zufallsvariablen D unter der Annahme, dass

a) Φ in seinem Wertebereich, $(0; \frac{\pi}{2}]$, gleichverteilt ist.

b) $f_\Phi(\varphi) = \sin(2\varphi)$ ist.