Karlsruher Institut für Technologie
Communications Engineering Lab
Dr.-Ing. Holger Jäkel

Wahrscheinlichkeitstheorie – Lösungen zu Übung 4

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 14

Gegeben sei die Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}x^2 & \text{, für } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

a) Man berechne die Verteilungsfunktion und Dichte von $Y = e^{-X}$.

b) Man berechne den Erwartungswert von Y.

Lösung

a) Verteilungsfunktionen $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,\mathrm{d}u$ berechnen:

$$\begin{aligned} x < 1: &\quad F_X(x) = 0 \\ 1 \leq x \leq 2: &\quad F_X(x) = F_X(1) + \int_1^x \tfrac{3}{7}u^2\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{7}\left[u^3\right]_1^x = \tfrac{1}{7}(x^3 - 1) \\ 2 < x \quad : &\quad F_X(x) = F_X(2) + 0 = 1 \end{aligned}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 1 \\ \frac{1}{7}(x^3 - 1) & , \ 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$

Zusammenhang der Verteilungsfunktionen $F_Y(y)$ und $F_X(x)$ bestimmen:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(e^{-X} \leq y) = P\big(-X \leq \ln(y)\big) = P\big(X \geq -\ln(y)\big) \\ &= 1 - F_X\big(-\ln(y)\big) \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \begin{cases} 1 - 0 & , \ -\ln(y) < 1 \\ 1 - \frac{1}{7}\big(-\ln^3(y) - 1\big) & , \ 1 \leq -\ln(y) \leq 2 \\ 1 - 1 & , \ -\ln(y) > 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , \ y < e^{-2} \\ \frac{1}{7}\big(8 + \ln^3(y)\big) & , \ e^{-2} \leq y \leq e^{-1} \\ 1 & , \ \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Dichte von Y:

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{7}\ln^2(y) \cdot \frac{1}{y} & , \ e^{-2} \leq y \leq e^{-1} \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$

b) Entweder direkt mit $f_Y(y)$ aus a) oder mit $Y = e^{-X}$ und der Dichte von X:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \tfrac{3}{7} \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} \ln^2(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \tfrac{3}{7} \Big[y \cdot \ln^2(y) \Big]_{e^{-2}}^{e^{-1}} - \tfrac{3}{7} \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} y \cdot 2\ln(y) \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \\
&= \tfrac{3}{7} \Big[y \cdot \ln^2(y) \Big]_{e^{-2}}^{e^{-1}} - \tfrac{3}{7} \Big[2y \cdot \ln(y) \Big]_{e^{-2}}^{e^{-1}} + \tfrac{3}{7} \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} 2y \cdot \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \\
&= \tfrac{3}{7} \Big[y \ln^2(y) - 2y\ln(y) + 2y \Big]_{e^{-2}}^{e^{-1}} = \tfrac{3}{7} \left(5e^{-1} - 10e^{-2} \right) \approx 0{,}208
\end{aligned}$$

Hier wurde absichtlich keine Transformation der Integrationsvariable vorgenommen; das passiert im Folgenden:

$$E(Y) = E\left(e^{-X}\right) = \int_1^2 e^{-x} \cdot \tfrac{3}{7} x^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{3}{7} \left[\frac{e^{-x}}{-1} (x^2 + 2x + 2) \right]_1^2 = \tfrac{3}{7}(-10e^{-2} + 5e^{-1})$$

Zusatzmaterial

Wahrscheinlichkeitsdichte für X

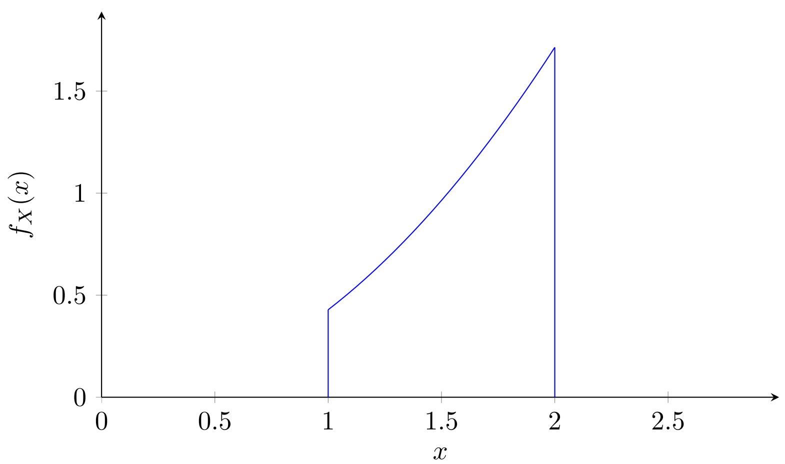

Abbildung 15: Dichtefunktion der ZV X

Wahrscheinlichkeitsdichte für Y

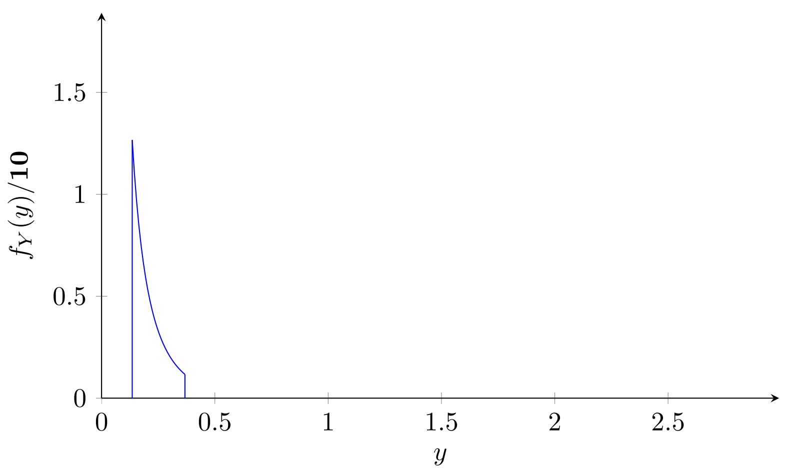

Abbildung 16: Dichtefunktion der ZV Y

Aufgabe 15

In einem Produktionsprozess werden Ladegeräte für Mobiltelefone hergestellt. Bevor die Ladegeräte mit den Mobiltelefonen zusammen verpackt werden, wird die Ladespannung von jedem Ladegerät einmal gemessen. Die Messwerte der Ladespannungen der verschiedenen Ladegeräte genüge näherungsweise einer normalverteilten Zufallsvariablen mit $\mu = 5$ Volt und $\sigma = 0{,}07$ Volt. Alle Ladegeräte, bei denen die Messung um mehr als 4 % vom Sollwert $S = 5$ Volt abweicht, sollen aussortiert werden.

a) Wie viel Prozent der Ladegeräte werden aussortiert?

b) Der Hersteller möchte seinen Produktionsprozess so verbessern, dass nur noch halb soviele Ladegeräte wie in a) aussortiert werden. Auf welchen Wert müsste er dazu σ senken?

c) Durch einen Produktionsfehler verschiebt sich der Mittelwert μ auf 5,1 Volt (σ ist 0,07 Volt). Wie groß ist jetzt der Prozentsatz, der aussortiert wird?

Lösung

a) Sei $X \sim \mathcal{N}(5\ ;\ 0{,}07^2)$ die gemessene Ladespannung. Gesucht ist

$$p_a = P\left(\left|\frac{X-S}{S}\right| > \delta\right) = P(|X-S| > \delta \cdot S)$$

Übergang auf normierte ZV: $\widetilde{X} = (X-\mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0;1)$.

$$p_a = P\big(|\sigma\widetilde{X} + \underbrace{\mu - S}_{=0}| > \delta \cdot S\big) = P\big(|\widetilde{X}| > \delta S/\sigma\big) = P(\widetilde{X} > 2{,}857) + P(\widetilde{X} < -2{,}857)$$
$$= 1 - F_{\widetilde{X}}(2{,}857) + F_{\widetilde{X}}(-2{,}857)$$

Die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten ZV $\widetilde{X}$ erfüllt $\Phi(\widetilde{x}) = 1 - \Phi(-\widetilde{x})$

$$p_a = 1 - \Phi(2{,}857) + 1 - \Phi(2{,}857) = 2\big(1 - \Phi(2{,}857)\big) \overset{\text{Tabelle}}{\approx} 2(1 - 0{,}9978817) = 0{,}424\%$$

b) Die Wahrscheinlichkeit p_b, die Toleranz von 4% zu überschreiten, soll halbiert werden.

$$p_b = 2\left(1 - \Phi\big(\delta S/\tilde{\sigma}\big)\right) \overset{!}{=} p_a/2$$
$$\Phi\big(\delta S/\tilde{\sigma}\big) = 1 - \frac{p_a}{4} = 0{,}99894085 \quad \overset{\text{Tabelle}}{\approx} \quad \Phi(3{,}08)$$
$$\frac{\delta \cdot S}{\tilde{\sigma}} = 3{,}08 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\sigma} = 0{,}0649$$

c) Toleranzgrenzen: $x_1 = (1-\delta) \cdot S = 4{,}8$ und $x_2 = (1+\delta) \cdot S = 5{,}2$. Es ist $X_c \sim \mathcal{N}(5{,}1\ ;\ 0{,}07^2)$

$$p_c = 1 - P(x_1 \le X_c \le x_2) = P(X_c < x_1 \vee X_c > x_2) = F_{X_C}(x_1) + 1 - F_{X_C}(x_2)$$

Normierung: $\widetilde{X}_C = \frac{X_C - 5{,}1}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \tilde{x}_1 = \frac{x_1 - 5{,}1}{\sigma} \approx -4{,}286 \qquad \tilde{x}_2 \approx 1{,}429$

$$p_c = \Phi(\tilde{x}_1) + 1 - \Phi(\tilde{x}_2) = 2 - \Phi(4{,}286) - \Phi(1{,}429) \approx 2 - 0{,}9999914 - 0{,}9221961 = 7{,}78\%$$

Zusatzmaterial

a) Ladespannung normal

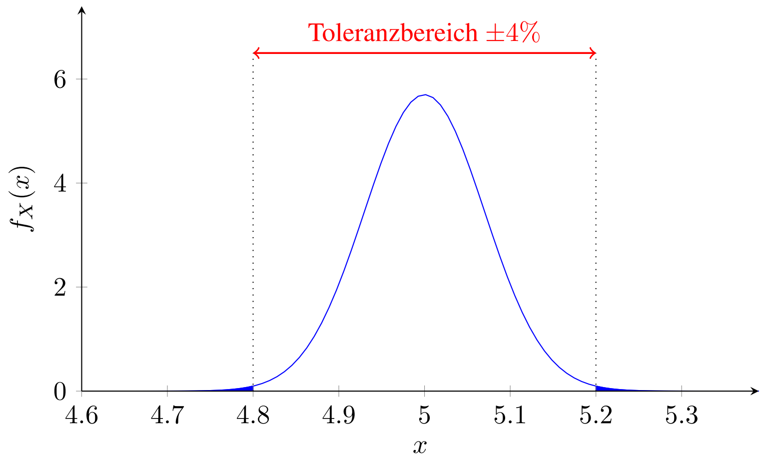

Abbildung 17: Dichte der gemessenen Ladespannung bei $\mu = 5$ und $\sigma = 0{,}07$

b) Ladespannung bei verbessertem Prozess

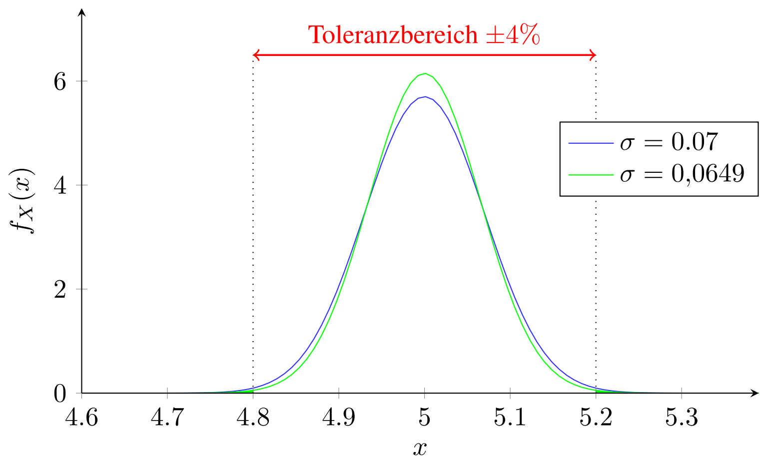

Abbildung 18: Dichte der gemessenen Ladespannung bei $\mu = 5$ und $\sigma = 0{,}0649$

c) Ladespannung bei Produktionsfehler

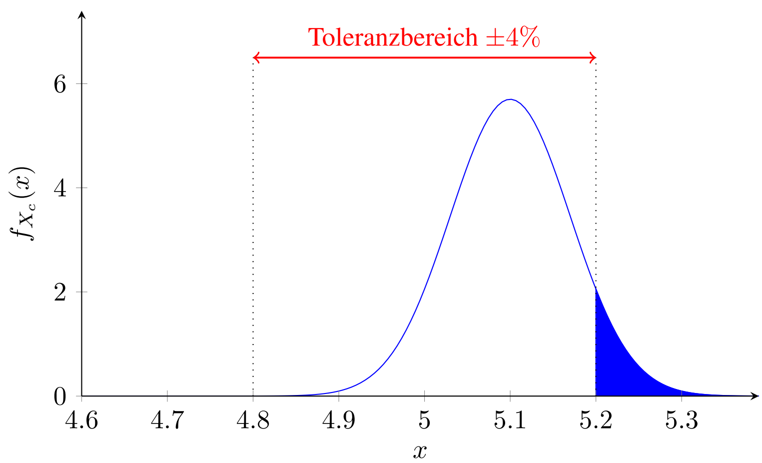

Abbildung 19: Dichte der gemessenen Ladespannung bei $\mu = 5.1$ und $\sigma = 0{,}07$

Aufgabe 16

Die zweidimensionale Zufallsvariable $(X,Y)^T$ sei über die Fläche, die in Abb. 20 dargestellt wird, gleichverteilt.

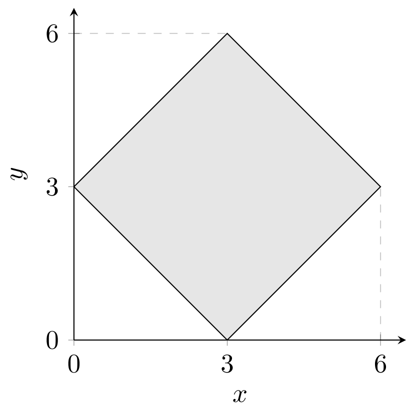

Abbildung 20: Gebiet G

a) Geben Sie die Dichte $f(x,y)$ an.

b) Berechnen Sie die Randdichte und Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.

c) Prüfen Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist $X \leq 4$, wenn $Y = 4$ ist.

Lösung

a) Die Wahrscheinlichkeitsmasse ist gleichmäßig über die rautenförmige Fläche G verteilt. Die Dichte hat die Form

$$f(x,y) = \begin{cases} |G|^{-1} & , \text{ für } (x,y) \in G \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Grenzen des Gebietes G:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{linke obere Seite:} & y \leq 3 + x \\ \text{linke untere Seite:} & y \geq 3 - x \\ \text{rechte obere Seite:} & y \leq 9 - x \\ \text{rechte untere Seite:} & y \geq -3 + x \end{array}\right\} \begin{array}{c} -3 \leq y - x \leq 3 \\ 3 \leq y + x \leq 9 \end{array}$$

Fläche $|G| = \left(\sqrt{2} \cdot 3\right)^2 = 18$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{18} & , -3 \leq y - x \leq 3 \quad \wedge \quad 3 \leq y + x \leq 9 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

b) Die Randdichte ist $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}y$:

$$0 \leq x < 3: \qquad f_X(x) = \int_{3-x}^{3+x} \frac{1}{18}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y}{18}\right]_{3-x}^{3+x} = \frac{x}{9}$$

$$3 \leq x < 6: \qquad f_X(x) = \int_{-3+x}^{9-x} \frac{1}{18}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y}{18}\right]_{-3+x}^{9-x} = \frac{1}{9}(6-x)$$

$$\Rightarrow \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{9} & , \text{ für } 0 \leq x < 3 \\ \frac{2}{3} - \frac{x}{9} & , \text{ für } 3 \leq x < 6 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion ist $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,\mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned}
F_X(x) &\overset{x<0}{=} 0 \\
&\overset{0\le x<3}{=} 0 + \int_0^x f_X(u)\,\mathrm{d}y = \left[\frac{u^2}{18}\right]_0^x = \frac{x^2}{18} \\
&\overset{3\le x<6}{=} \frac{3^2}{18} + \int_3^x f_X(u)\mathrm{d}y = \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{18}(6-u)^2\right]_3^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{18}(6-x)^2 + \frac{1}{2} \\
&\overset{6\le x}{=} 1 - \frac{1}{18}(6-6)^2 = 1 \\
F_X(x) &= \begin{cases} 0 & , \ x<0 \\ \frac{1}{18}x^2 & , \ 0\le x<3 \\ \frac{1}{18}(6-x)^2 & , \ 3\le x<6 \\ 1 & , \ 6\le x \end{cases}
\end{aligned}$$

c) Für Unabhängigkeit muss $f(x,y) = f(x|Y=y)\cdot f(y) = f(x)\cdot f(y)$ gelten. Da G rautenförmig (kein Quadrat) ist, kann diese Bedingung nicht (überall) eingehalten werden. Ein Gegenbeispiel reicht um Abhängigkeit zu zeigen:

$$f_{XY} \text{ in } x{,}y \text{ symmetrisch} \quad \Rightarrow \quad f_Y(y) = f_X(y)$$

$$f_{XY}(1{,}1) = 0 \quad \neq \quad f_X(1)\cdot f_Y(1) = \left(\tfrac{1}{9}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ und } f(y) \text{ sind nicht unabhängig.}$$

d) Mit der bedingten Dichte:

$$f_X(x\,|\,Y=4) = \frac{f_{XY}(x,4)}{f_Y(4)} = \begin{cases} \frac{1}{18}\cdot\frac{9}{2} = \frac{1}{4} & , \ (x,4)\in G \ \Rightarrow \ 1\le x\le 5 \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$

$$P(X\le 4\,|\,Y=4) = F_X(4\,|\,Y=4) = \int_{-\infty}^{4} f_X(u\,|\,Y=4)\,\mathrm{d}u = \int_1^4 \tfrac{1}{4}\,\mathrm{d}u = \tfrac{3}{4}$$

Zusatzmaterial

a)

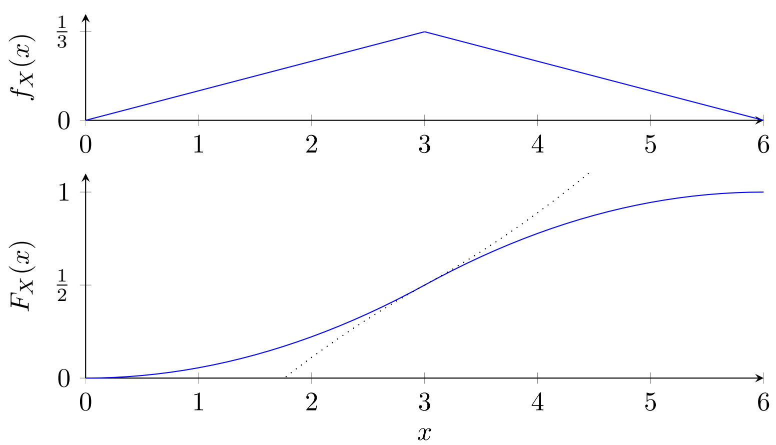

Abbildung 21: Randdichte und Verteilungsfunktion von X

Aufgabe 17

Ein Teilchen verlässt den Ursprung unter dem Einfluss der Gravitationskraft mit einer initialen Geschwindigkeit v und einem zufälligen Winkel $\Phi \in (0; \frac{\pi}{2}]$ gegenüber der horizontalen Achse. Das Teilchen hat eine parabelförmige Trajektorie (ohne Reibung) und erreicht den Grund in einer Entfernung von

$$D = \frac{v^2}{g} \sin(2\Phi)$$

vom Ursprung. Berechnen Sie die Dichte der Zufallsvariablen D unter der Annahme, dass

a) Φ in seinem Wertebereich, $(0; \frac{\pi}{2}]$, gleichverteilt ist.

b) $f_\Phi(\varphi) = \sin(2\varphi)$ ist.

Lösung

Direkte Berechnung von $f_D(d)$ aus $f_\Phi(\varphi)$, d.h. ohne die Verteilungsfunktionen zu bestimmen. Die maximale Entfernung sei $d_{\max} = v^2/g$. (Im Folgenden vergessen wir g als Erdbeschleunigung). Es gilt

$$f_D(d) = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_\Phi(\varphi_n)}{|g'(\varphi_n)|}$$

Jede Weite $d = g(\varphi) = d_{\max} \sin(2\varphi) < d_{\max}$ kann mit $N = 2$ Winkeln φ:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arcsin(d/d_{\max})$$
$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1 \qquad \text{sei o.B.d.A. } \varphi_1 < \frac{\pi}{4}$$

Für die Skalierung der Dichten $|g'(\varphi_n)| = 2d_{\max} \cos(2\varphi)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
|g'(\varphi_1)| &= 2d_{\max} \cos\big(\arcsin(d/d_{\max})\big) \\
&= 2 \cdot d_{\max} \sqrt{1 - \sin^2\big(\arcsin(d/d_{\max})\big)} = 2 \cdot \sqrt{d_{\max}^2 - d^2} \\
|g'(\varphi_2)| &= 2 \cdot d_{\max} \sqrt{1 - \sin^2\big(\pi - \arcsin(d/d_{\max})\big)} \\
&= 2 \cdot d_{\max} \sqrt{1 - \sin^2\big(\arcsin(d/d_{\max})\big)} = |g'(\varphi_1)|
\end{aligned}$$

Damit können die beiden Dichten für den Winkel Φ eingesetzt werden:

a) Es gilt $f_\Phi(\varphi) = 2/\pi$ für $\varphi \in (0; \frac{\pi}{2}]$ und null sonst. Damit ist für $d = g(\varphi) \in [0; d_{\max}]$:

$$f_D(d) = \frac{2/\pi}{2\sqrt{d_{\max}^2 - d^2}} + \frac{2/\pi}{2\sqrt{d_{\max}^2 - d^2}} = \frac{2/\pi}{\sqrt{d_{\max}^2 - d^2}}$$

Sonst ist $f_D(d) = 0$.

b) Für $f_\Phi(\varphi) = f_\Phi(\pi/2 - \varphi) = \sin(2\varphi)$ für $\varphi \in (0; \frac{\pi}{2}]$ und null sonst ergibt sich analog

$$f_D(d) = \frac{d/d_{\max}}{2\sqrt{d_{\max}^2 - d^2}} + \frac{d/d_{\max}}{2\sqrt{d_{\max}^2 - d^2}} = \frac{d/d_{\max}}{\sqrt{d_{\max}^2 - d^2}}$$

für $0 \le d < d_{\max}$ und null sonst.

Zusammenfassung

- **Funktionen von ZV:** $Y = g(X)$

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^{N} \frac{f_X(x_k)}{|g'(x_k)|} \text{ mit } x_1, \ldots, x_N\text{: Lösungen der Gleichung } y = g(x) \qquad (4.2\text{-}9)$$

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x \qquad (5.1\text{-}7)$$

- **Normalverteilung** $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ mit $\sigma > 0$:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (\text{Def. } 6.8\text{-}1)$$

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad (\text{Kap. } 6.8)$$

Für die Verwendung der Tabelle aus dem Buch: $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$

- **2D Verteilungsfunktion**:

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \qquad (\text{Def. } 7.1\text{-}2)$$

- **Randdichte**:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad (\text{Def. } 7.2\text{-}1)$$

- **Bedingte Dichte**:

$$f_X(x|Y = y_1) = \frac{f_{XY}(x, y_1)}{f_Y(y_1)}, \text{ wenn } f_Y(y_1) > 0 \qquad (\text{Def. } 7.2\text{-}2)$$

- **Gemeinsame Dichte unabhängiger Zufallsvariablen** X, Y:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \qquad (\text{Def. } 7.3\text{-}1)$$