Karlsruher Institut für Technologie
Karlsruher Institut für Technologie
Communications Engineering Lab
Dr.-Ing. Holger Jäkel

Wahrscheinlichkeitstheorie – Übungsblatt 5

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 16

Die zweidimensionale Zufallsvariable $(X, Y)^T$ sei über die Fläche, die in Abb. 4 dargestellt wird, gleichverteilt.

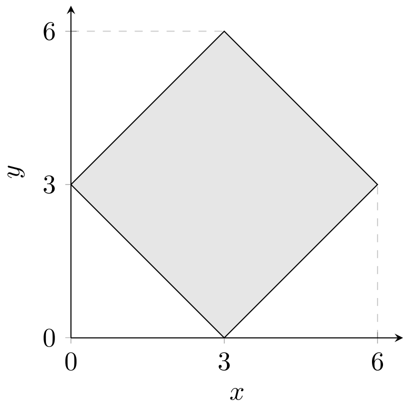

Abbildung 4: Gebiet G

a) Geben Sie die Dichte $f(x,y)$ an.

b) Berechnen Sie die Randdichte und Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.

c) Prüfen Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist $X \leq 4$, wenn $Y = 4$ ist.

Aufgabe 17

Ein Teilchen verlässt den Ursprung unter dem Einfluss der Gravitationskraft mit einer initialen Geschwindigkeit v und einem zufälligen Winkel $\Phi \in (0; \frac{\pi}{2}]$ gegenüber der horizontalen Achse. Das Teilchen hat eine parabelförmige Trajektorie (ohne Reibung) und erreicht den Grund in einer Entfernung von

$$D = \frac{v^2}{g} \sin(2\Phi)$$

vom Ursprung. Berechnen Sie die Dichte der Zufallsvariablen D unter der Annahme, dass

a) Φ in seinem Wertebereich, $(0; \frac{\pi}{2}]$, gleichverteilt ist.

b) $f_\Phi(\varphi) = \sin(2\varphi)$ ist.

Aufgabe 18

Gegeben sind die zweidimensionale Zufallsvariable $\vec{X} = (\, X_1 \,;\, X_2 \,)^T$ mit der Dichte $f_{\vec{X}}(\vec{x})$ und die Gerade h:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\pi} \sin(\, \vec{k}^T \vec{x}\,) & \text{, für } \vec{x} \in G \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \qquad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \pi/\alpha \\ -\pi \end{pmatrix}$$

Das Gebiet G wird durch die Koordinatenachsen und h begrenzt. $\vec{k} = (\, \alpha \,;\, 1 \,)^T$ mit $\alpha > 0$.

a) Skizzieren Sie G und geben Sie die Verteilungsfunktion $F_{\vec{X}}(\vec{x})$ für $\vec{x} \in G$ an.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X_1.

c) Welchen Wert hat die Wahrscheinlichkeit $P(X_2 < X_1)$ für $\alpha = 1$?

Aufgabe 19

$\vec{X} = (\, X_1 \,;\, X_2 \,)^T$ sei zweidimensional normalverteilt mit der Dichte $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2)$. Die Höhenlinien von $f(\vec{x})$ sind Ellipsen, deren Hauptachsen gegenüber den Koordinatenachsen um den Winkel

$$\gamma = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\rho_{X_1,X_2}\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}{\sigma_{X_1}^2 - \sigma_{X_2}^2} \right)$$

gedreht sind, vgl. Abbildung 5. Durch die Drehung des Koordinatensystems um den Winkel γ wird die Zufallsvariable $\vec{X}$ auf die Zufallsvariable

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \cdot \vec{X}$$

abgebildet. Da die Drehung eine lineare Abbildung darstellt, ist offensichtlich auch $\vec{Y}$ zweidimensional normalverteilt. Zeigen Sie, dass Y_1 und Y_2 unabhängige Zufallsvariablen sind!

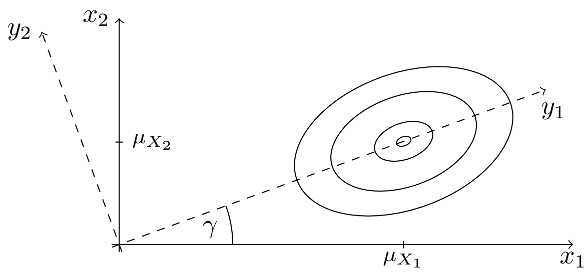

Abbildung 5: Drehung des Koordinatensystems um γ.

Aufgabe 20

Die Zufallsvariable $(\, X \,;\, Y \,)^T$ habe die gemeinsame Dichte $f(x, y) = x + y$ für $x, y \in (0; 1]$ und null sonst.

a) Man berechne die Dichte von $Z = X \cdot Y$.

b) Man berechne den Korrelationskoeffizienten ρ_{XY}.