Karlsruhe Institute of Technology

5. Übung zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

Wintersemester 2017/18

Marcus Müller | 8. Januar 2018

COMMUNICATIONS ENGINEERING LAB (CEL)

Zusammenfassung

- **Gemeinsame Dichte unabhängiger Zufallsvariablen** X, Y:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \qquad \text{(Def. 7.3-1)}$$

- **Kovarianz** und **Korrelationskoeffizient** der Zufallsvariablen X und Y:

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X,Y) &= E\big([X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]\big) \\ &= E(XY) - E(X)\,E(Y) \\ \rho_{XY} &= \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)} \end{aligned} \qquad \text{(Def. 7.3-2)}$$

Eigenschaften:

unkorreliert $\Leftrightarrow$ $\rho_{XY} = 0$ $\Leftarrow$ **unabhängig**

Sind X und Y normalverteilt, folgt aus $\rho_{XY} = 0$ auch die Unabhängigkeit von X und Y.

Zusammenfassung (weiter)

- **Funktionen zweidimensionaler Zufallsvariablen**

(1) $$U_1 = g_1(X, Y); \qquad U_2 = g_2(X, Y)$$ (7.4-1)

(2) $$x = h_1(u_1, u_2); \qquad y = h_2(u_1, u_2)$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

(3) $$f_{U_1 U_2}(u_1, u_2) = f_{XY}\Big(h_1(u_1, u_2); h_2(u_1, u_2)\Big) \cdot |J|$$ (7.4-2)

- **Normalverteilung: k-tes zentrales Moment**

$$E\Big((X-\mu)^k\Big) = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdots (k-1)\sigma^k & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$ (6.8-6)

Aufgabe 16

Die zweidimensionale Zufallsvariable $(X, Y)^T$ sei über die Fläche, die in Abb. 22 dargestellt wird, gleichverteilt.

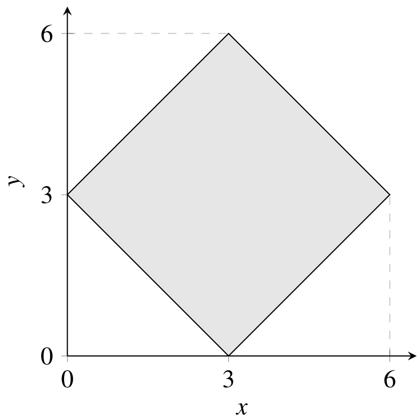


Abbildung 22: Gebiet G

a) Geben Sie die Dichte $f(x,y)$ an.
b) Berechnen Sie die Randdichte und Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.
c) Prüfen Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind.
d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist $X \leq 4$, wenn $Y = 4$ ist.

Aufgabe 16 a)

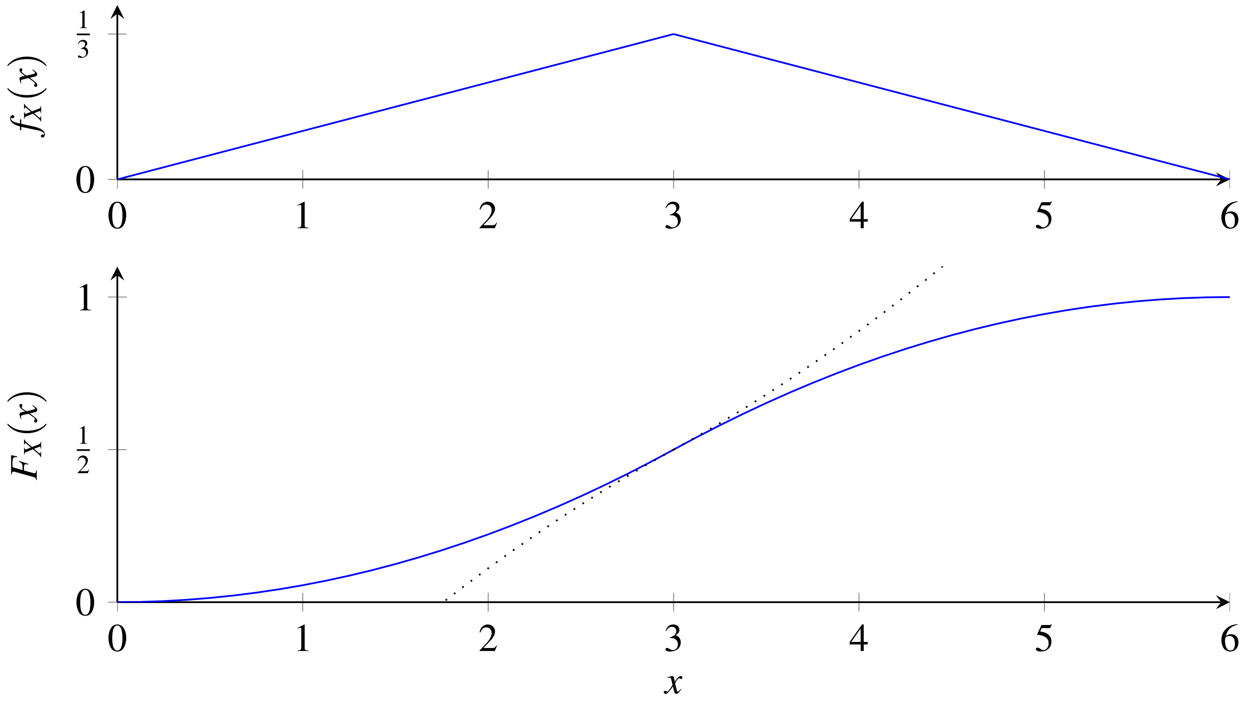


Abbildung 23: Randdichte und Verteilungsfunktion von X

Aufgabe 17

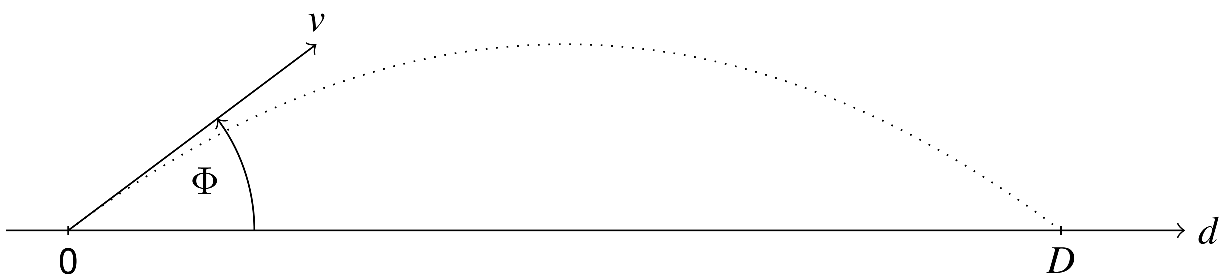
Ein Teilchen verlässt den Ursprung unter dem Einfluss der Gravitationskraft mit einer initialen Geschwindigkeit v und einem zufälligen Winkel $\Phi \in (0; \frac{\pi}{2}]$ gegenüber der horizontalen Achse. Das Teilchen hat eine parabelförmige Trajektorie (ohne Reibung) und erreicht den Grund in einer Entfernung von

$$D = \frac{v^2}{g} \sin(2\Phi)$$

vom Ursprung. Berechnen Sie die Dichte der Zufallsvariablen D unter der Annahme, dass

a) Φ in seinem Wertebereich, $(0; \frac{\pi}{2}]$, gleichverteilt ist.

b) $f_\Phi(\varphi) = \sin(2\varphi)$ ist.



Aufgabe 18

Gegeben sind die zweidimensionale Zufallsvariable $\vec{X} = (\, X_1 \ ; \ X_2 \,)^T$ mit der Dichte $f_{\vec{X}}(\vec{x})$ und die Gerade h:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\pi} \sin(\, \vec{k}^T \vec{x} \,) & \text{, für } \vec{x} \in G \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \qquad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \pi / \alpha \\ -\pi \end{pmatrix}$$

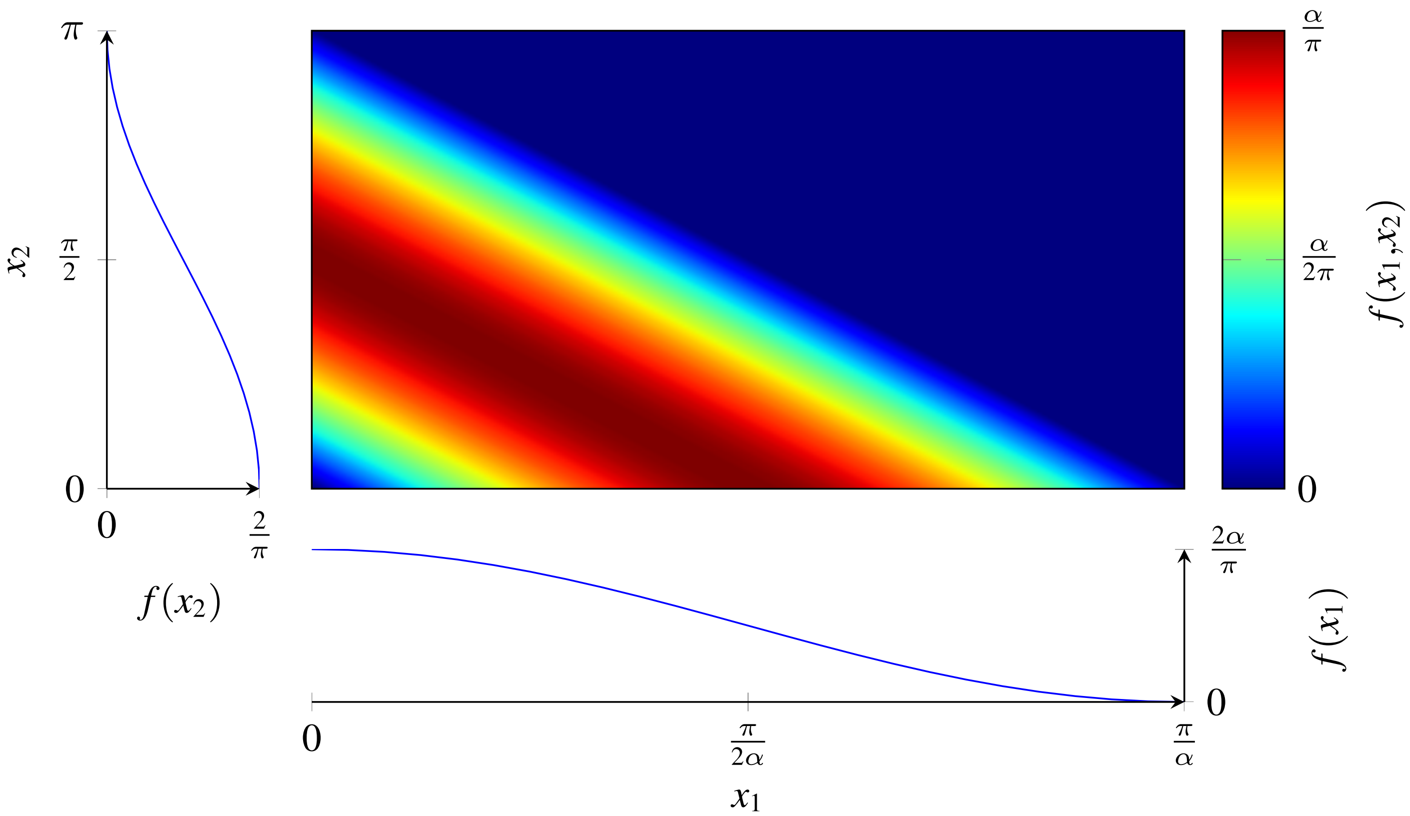
Das Gebiet G wird durch die Koordinatenachsen und h begrenzt. $\vec{k} = (\, \alpha \ ; \ 1 \,)^T$ mit $\alpha > 0$.

a) Skizzieren Sie G und geben Sie die Verteilungsfunktion $F_{\vec{X}}(\vec{x})$ für $\vec{x} \in G$ an.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X_1.

c) Welchen Wert hat die Wahrscheinlichkeit $P(X_2 < X_1)$ für $\alpha = 1$?

Aufgabe 18: Dichtefunktionen



Aufgabe 18: Verteilungsfunktionen

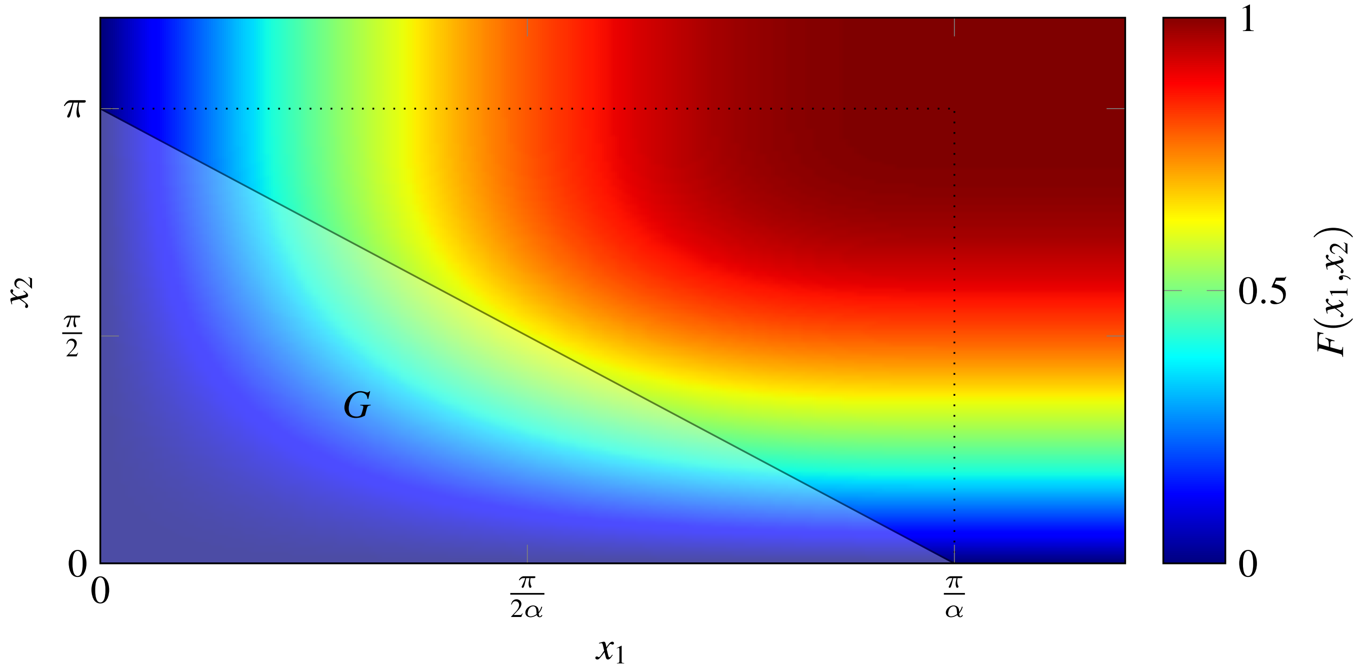


Abbildung 24: Verteilungsfunktionen $F(x_1,x_2)$

Aufgabe 19

$\vec{X} = (\, X_1 \;;\; X_2 \,)^T$ sei zweidimensional normalverteilt mit der Dichte $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2)$. Die Höhenlinien von $f(\vec{x})$ sind Ellipsen, deren Hauptachsen gegenüber den Koordinatenachsen um den Winkel

$$\gamma = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\rho_{X_1,X_2}\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}{\sigma_{X_1}^2 - \sigma_{X_2}^2} \right)$$

gedreht sind, vgl. Abbildung 25. Durch die Drehung des Koordinatensystems um den Winkel γ wird die Zufallsvariable $\vec{X}$ auf die Zufallsvariable

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \cdot \vec{X}$$

abgebildet. Da die Drehung eine lineare Abbildung darstellt, ist offensichtlich auch $\vec{Y}$ zweidimensional normalverteilt. Zeigen Sie, dass Y_1 und Y_2 unabhängige Zufallsvariablen sind!

Aufgabe 19

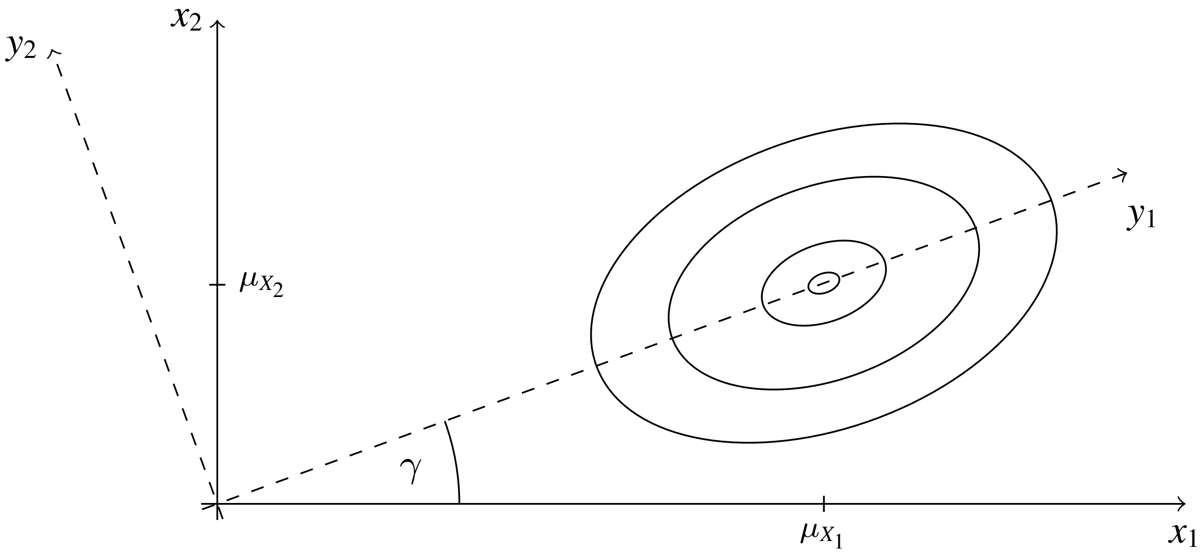


Abbildung 25: Drehung des Koordinatensystems um γ.

Aufgabe 20

Die Zufallsvariable $(\,X\,;\;Y\,)^T$ habe die gemeinsame Dichte $f(x,y) = x + y$ für $x, y \in (0;1]$ und null sonst.

a) Man berechne die Dichte von $Z = X \cdot Y$.

b) Man berechne den Korrelationskoeffizienten ρ_{XY}.

Aufgabe 20

Die Zufallsvariable $(X\ ;\ Y)^T$ habe die gemeinsame Dichte $f(x,y) = x + y$ für $x, y \in (0;1]$ und null sonst.

a) Man berechne die Dichte von $Z = X \cdot Y$.

b) Man berechne den Korrelationskoeffizienten ρ_{XY}.

Funktionen der Zufallsvariablen

(1) $$U_1 = g_1(X,Y); \qquad U_2 = g_2(X,Y) \qquad (7.4\text{-}1)$$

(2) $$x = h_1(u_1,u_2); \qquad y = h_2(u_1,u_2)$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

(3) $$f_{U_1U_2}(u_1,u_2) = f_{XY}\Big(h_1(u_1,u_2); h_2(u_1,u_2)\Big) \cdot |J| \qquad (7.4\text{-}2)$$

Aufgabe 20: Gegebene Dichte für X und Y