Karlsruher Institut für Technologie
Communications Engineering Lab
Dr.-Ing. Holger Jäkel

Wahrscheinlichkeitstheorie – Lösungen zu Übung 5

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 16

Die zweidimensionale Zufallsvariable $(X, Y)^T$ sei über die Fläche, die in Abb. 20 dargestellt wird, gleichverteilt.

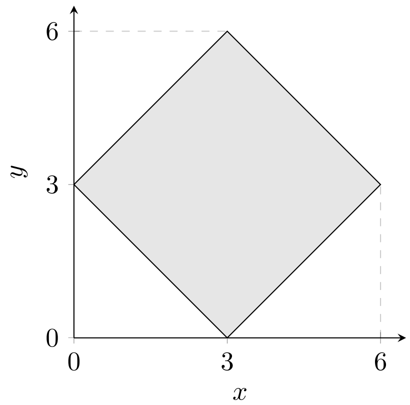


Abbildung 20: Gebiet G

a) Geben Sie die Dichte $f(x,y)$ an.

b) Berechnen Sie die Randdichte und Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.

c) Prüfen Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist $X \leq 4$, wenn $Y = 4$ ist.

Lösung

a) Die Wahrscheinlichkeitsmasse ist gleichmäßig über die rautenförmige Fläche G verteilt. Die Dichte hat die Form

$$f(x,y) = \begin{cases} |G|^{-1} & , \text{ für } (x,y) \in G \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Grenzen des Gebietes G:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{linke obere Seite:} & y \leq 3 + x \\ \text{linke untere Seite:} & y \geq 3 - x \\ \text{rechte obere Seite:} & y \leq 9 - x \\ \text{rechte untere Seite:} & y \geq -3 + x \end{array}\right\} \begin{array}{r} -3 \leq y - x \leq 3 \\ 3 \leq y + x \leq 9 \end{array}$$

Fläche $|G| = \left(\sqrt{2} \cdot 3\right)^2 = 18$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{18} & , -3 \leq y - x \leq 3 \quad \wedge \quad 3 \leq y + x \leq 9 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

b) Die Randdichte ist $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}y$:

$$0 \le x < 3: \qquad f_X(x) = \int_{3-x}^{3+x} \frac{1}{18}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y}{18}\right]_{3-x}^{3+x} = \frac{x}{9}$$

$$3 \le x < 6: \qquad f_X(x) = \int_{-3+x}^{9-x} \frac{1}{18}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y}{18}\right]_{-3+x}^{9-x} = \frac{1}{9}(6-x)$$

$$\Rightarrow \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{9} & , \text{ für } 0 \le x < 3 \\ \frac{2}{3} - \frac{x}{9} & , \text{ für } 3 \le x < 6 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion ist $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,\mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &\overset{x<0}{=} 0 \\ &\overset{0 \le x<3}{=} 0 + \int_0^x f_X(u)\,\mathrm{d}y = \left[\frac{u^2}{18}\right]_0^x = \frac{x^2}{18} \\ &\overset{3 \le x<6}{=} \frac{3^2}{18} + \int_3^x f_X(u)\mathrm{d}y = \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{18}(6-u)^2\right]_3^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{18}(6-x)^2 + \frac{1}{2} \\ &\overset{6 \le x}{=} 1 - \frac{1}{18}(6-6)^2 = 1 \end{aligned}$$

$$F_X(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \frac{1}{18}x^2 & , \ 0 \le x < 3 \\ \frac{1}{18}(6-x)^2 & , \ 3 \le x < 6 \\ 1 & , \ 6 \le x \end{cases}$$

c) Für Unabhängigkeit muss $f(x,y) = f(x|Y=y) \cdot f(y) = f(x) \cdot f(y)$ gelten. Da G rautenförmig (kein Quadrat) ist, kann diese Bedingung nicht (überall) eingehalten werden. Ein Gegenbeispiel reicht um Abhängigkeit zu zeigen:

f_{XY} in x,y symmetrisch $\quad \Rightarrow \quad f_Y(y) = f_X(y)$

$f_{XY}(1,1) = 0 \quad \neq \quad f_X(1) \cdot f_Y(1) = \left(\frac{1}{9}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ und $f(y)$ sind nicht unabhängig.

d) Mit der bedingten Dichte:

$$f_X(x\,|\,Y=4) = \frac{f_{XY}(x,4)}{f_Y(4)} = \begin{cases} \frac{1}{18} \cdot \frac{9}{2} = \frac{1}{4} & , \ (x,4) \in G \ \Rightarrow \ 1 \le x \le 5 \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$

$$P(X \le 4\,|\,Y=4) = F_X(4\,|\,Y=4) = \int_{-\infty}^{4} f_X(u\,|\,Y=4)\,\mathrm{d}u = \int_1^4 \tfrac{1}{4}\,\mathrm{d}u = \tfrac{3}{4}$$

Zusatzmaterial

a)

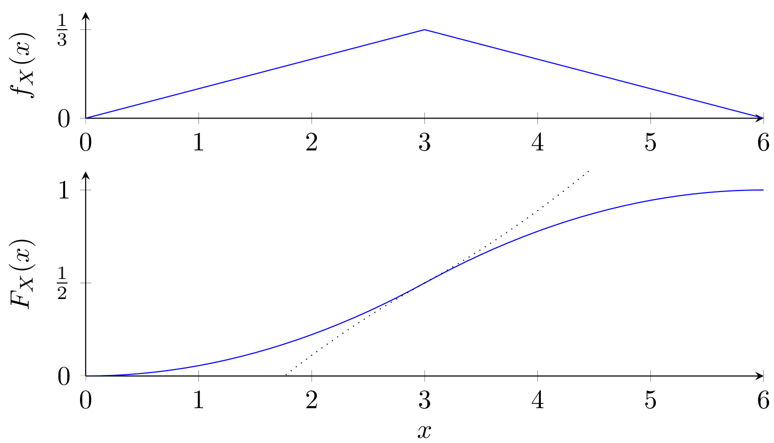


Abbildung 21: Randdichte und Verteilungsfunktion von X

Aufgabe 17

Ein Teilchen verlässt den Ursprung unter dem Einfluss der Gravitationskraft mit einer initialen Geschwindigkeit v und einem zufälligen Winkel $\Phi \in (0; \frac{\pi}{2}]$ gegenüber der horizontalen Achse. Das Teilchen hat eine parabelförmige Trajektorie (ohne Reibung) und erreicht den Grund in einer Entfernung von

$$D = \frac{v^2}{g} \sin(2\Phi)$$

vom Ursprung. Berechnen Sie die Dichte der Zufallsvariablen D unter der Annahme, dass

a) Φ in seinem Wertebereich, $(0; \frac{\pi}{2}]$, gleichverteilt ist.

b) $f_\Phi(\varphi) = \sin(2\varphi)$ ist.

Lösung

Direkte Berechnung von $f_D(d)$ aus $f_\Phi(\varphi)$, d.h. ohne die Verteilungsfunktionen zu bestimmen. Die maximale Entfernung sei $d_{\max} = v^2/g$. (Im Folgenden vergessen wir g als Erdbeschleunigung). Es gilt

$$f_D(d) = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_\Phi(\varphi_n)}{|g'(\varphi_n)|}$$

Jede Weite $d = g(\varphi) = d_{\max} \sin(2\varphi) < d_{\max}$ kann mit $N = 2$ Winkeln φ:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arcsin(d/d_{\max})$$
$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1 \qquad \text{sei o.B.d.A. } \varphi_1 < \frac{\pi}{4}$$

Für die Skalierung der Dichten $|g'(\varphi_n)| = 2d_{\max} \cos(2\varphi)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
|g'(\varphi_1)| &= 2d_{\max} \cos\big(\arcsin(d/d_{\max})\big) \\
&= 2 \cdot d_{\max} \sqrt{1 - \sin^2\big(\arcsin(d/d_{\max})\big)} = 2 \cdot \sqrt{d_{\max}^2 - d^2} \\
|g'(\varphi_2)| &= 2 \cdot d_{\max} \sqrt{1 - \sin^2\big(\pi - \arcsin(d/d_{\max})\big)} \\
&= 2 \cdot d_{\max} \sqrt{1 - \sin^2\big(\arcsin(d/d_{\max})\big)} = |g'(\varphi_1)|
\end{aligned}$$

Damit können die beiden Dichten für den Winkel Φ eingesetzt werden:

a) Es gilt $f_\Phi(\varphi) = 2/\pi$ für $\varphi \in (0; \frac{\pi}{2}]$ und null sonst. Damit ist für $d = g(\varphi) \in [0; d_{\max}]$:

$$f_D(d) = \frac{2/\pi}{2\sqrt{d_{\max}^2 - d^2}} + \frac{2/\pi}{2\sqrt{d_{\max}^2 - d^2}} = \frac{2/\pi}{\sqrt{d_{\max}^2 - d^2}}$$

Sonst ist $f_D(d) = 0$.

b) Für $f_\Phi(\varphi) = f_\Phi(\pi/2 - \varphi) = \sin(2\varphi)$ für $\varphi \in (0; \frac{\pi}{2}]$ und null sonst ergibt sich analog

$$f_D(d) = \frac{d/d_{\max}}{2\sqrt{d_{\max}^2 - d^2}} + \frac{d/d_{\max}}{2\sqrt{d_{\max}^2 - d^2}} = \frac{d/d_{\max}}{\sqrt{d_{\max}^2 - d^2}}$$

für $0 \leq d < d_{\max}$ und null sonst.

Aufgabe 18

Gegeben sind die zweidimensionale Zufallsvariable $\vec{X} = (\, X_1 \;;\; X_2 \,)^T$ mit der Dichte $f_{\vec{X}}(\vec{x})$ und die Gerade h:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\pi}\,\sin(\,\vec{k}^T\vec{x}\,) & \text{, für } \vec{x} \in G \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \qquad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \pi/\alpha \\ -\pi \end{pmatrix}$$

Das Gebiet G wird durch die Koordinatenachsen und h begrenzt. $\vec{k} = (\,\alpha \;;\; 1\,)^T$ mit $\alpha > 0$.

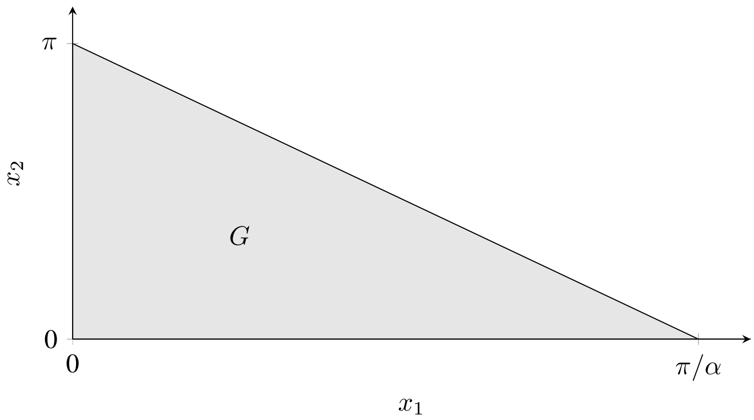
a) Skizzieren Sie G und geben Sie die Verteilungsfunktion $F_{\vec{X}}(\vec{x})$ für $\vec{x} \in G$ an.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X_1.

c) Welchen Wert hat die Wahrscheinlichkeit $P(X_2 < X_1)$ für $\alpha = 1$?

Lösung

a) Das Gebiet G liegt im ersten Quadranten der durch x_1 und x_2 aufgespannten Ebene. Für die Gerade h gilt $x_1 = 0 + \frac{\pi}{\alpha} \cdot t$ und $x_2 = \pi - \pi \cdot t$; also ist $x_2 = \pi - \alpha x_1$. Für das Gebiet G gilt somit: $x_1 > 0$ und $0 \le x_2 \le \pi - \alpha x_1$:



Für $F_{\vec{X}}(\vec{x}) = F(x_1, x_2)$ ergibt sich für $\vec{x} \in G$:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(u_1, u_2)\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_1 \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \sin(\alpha u_1 + u_2)\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_1 \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{x_1} \big[-\cos(\alpha u_1 + u_2)\big]_{u_2=0}^{x_2}\,\mathrm{d}u_1 \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \Big[\big[-\tfrac{1}{\alpha}\sin(\alpha u_1 + u_2)\big]_{u_2=0}^{x_2}\Big]_{u_1=0}^{x_1} \\ &= \frac{1}{\pi}\big(-\sin(\alpha x_1 + x_2) + \sin(\alpha x_1) + \sin(x_2) - 0\big) \end{aligned}$$

b) Für den gesuchten Erwartungswert gilt:

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot f_{X_1}(x_1)\,\mathrm{d}x_1$$

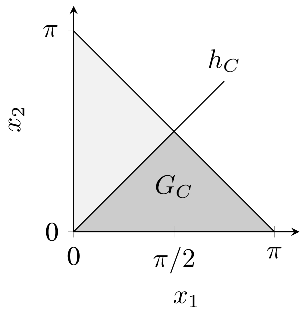
Berechnung der Randdichte $f_{X_1}(x_1)$:

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\pi - \alpha x_1} \sin(\alpha x_1 + x_2)\,\mathrm{d}x_2 = \frac{\alpha}{\pi}\big[-\cos(\alpha x_1 + x_2)\big]_{x_2=0}^{\pi-\alpha x_1} = \frac{\alpha}{\pi}\big(1 + \cos(\alpha x_1)\big)$$

für $0 \le x_1 \le \frac{\pi}{\alpha}$ und null sonst. Einsetzen und den Erwartungswert berechnen:

$$E(X_1) = \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} x_1 \, \frac{\alpha}{\pi}\big(1+\cos(\alpha x_1)\big)\,\mathrm{d}x_1 = \left[\frac{\alpha}{2\pi}x_1^2\right]_0^{\frac{\pi}{\alpha}} + \left[\frac{1}{\pi}x_1\sin(\alpha x_1)\right]_0^{\frac{\pi}{\alpha}} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin(\alpha x_1)\,\mathrm{d}x_1$$
$$= \frac{\pi}{2\alpha} + 0 - \left[-\frac{1}{\pi\alpha}\cos(\alpha x_1)\right]_0^{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\right) \approx 0{,}3\frac{\pi}{\alpha}$$

c) Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit muss die Dichte über das Gebiet $G_C \subset G$ integriert werden. G_C wird durch $h_C : x_2 = x_1$ nach oben begrenzt.



$$P(X_2 < X_1) = P(\vec{X} \in G_C) = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{x_1} \sin(x_1+x_2)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\alpha}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{\pi-x_1} \sin(x_1+x_2)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = ...$$

Für $\alpha = 1$ ist die Dichte $f(x_1,x_2) = f(x_2,x_1)$, d.h. symmetrisch zur ersten Winkelhalbierenden. Damit liegt genau soviel Wahrscheinlichkeitsmasse über wie unter der Geraden h_C: $P(\vec{X} \in G_C) = P(\vec{X} \notin G_C) = 0{,}5$.

Zusatzmaterial

Dichtefunktionen

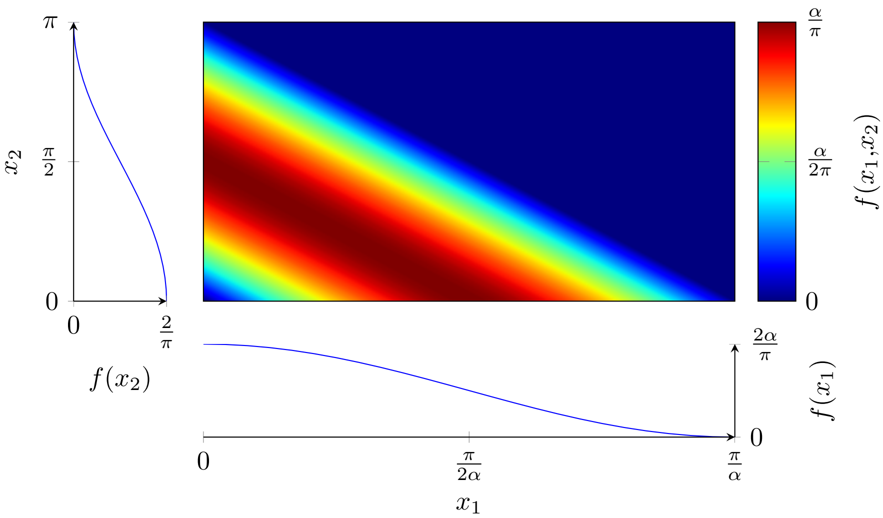


Abbildung 22: 2D-Dichte und Randdichten von X_1 und X_2

Verteilungsfunktionen

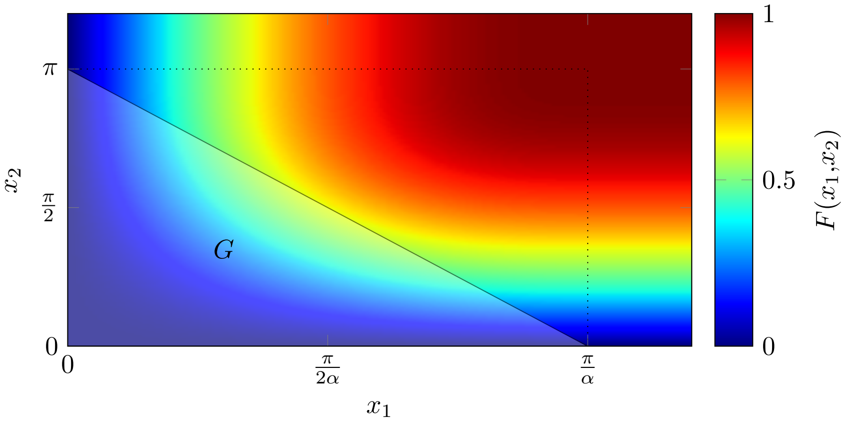


Abbildung 23: Verteilungsfunktionen $F(x_1,x_2)$

Aufgabe 19

$\vec{X} = (\,X_1\,;\;X_2\,)^T$ sei zweidimensional normalverteilt mit der Dichte $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2)$. Die Höhenlinien von $f(\vec{x})$ sind Ellipsen, deren Hauptachsen gegenüber den Koordinatenachsen um den Winkel

$$\gamma = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\rho_{X_1,X_2}\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}{\sigma_{X_1}^2 - \sigma_{X_2}^2}\right)$$

gedreht sind, vgl. Abbildung 24. Durch die Drehung des Koordinatensystems um den Winkel γ wird die Zufallsvariable $\vec{X}$ auf die Zufallsvariable

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \cdot \vec{X}$$

abgebildet. Da die Drehung eine lineare Abbildung darstellt, ist offensichtlich auch $\vec{Y}$ zweidimensional normalverteilt. Zeigen Sie, dass Y_1 und Y_2 unabhängige Zufallsvariablen sind!

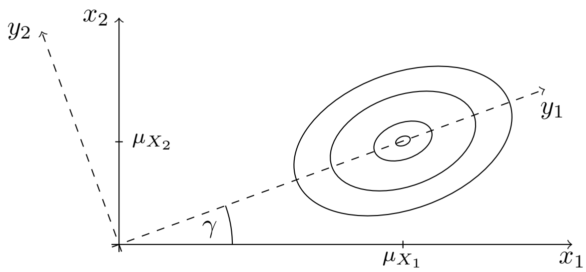


Abbildung 24: Drehung des Koordinatensystems um γ.

Lösung

Zu zeigen ist die Unabhängigkeit von Y_1, Y_2 für den gegebenen Winkel γ. Für normalverteilten Zufallsvariablen reicht es, unkorreliert zu zeigen:

$$\rho_{Y_1Y_2} = \frac{\text{cov}(Y_1, Y_2)}{D(Y_1)D(Y_2)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{cov}(Y_1, Y_2) = 0$$

Vorgehen zur Berechnung:

1. $\text{cov}(Y_1, Y_2)$ in Abhängigkeit von γ und den Parametern von X_1 und X_2 berechnen:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \cos(\gamma)X_1 + \sin(\gamma)X_2 && \Rightarrow \quad E(Y_1) = CE(X_1) + SE(X_2) \\ Y_2 &= -\underbrace{\sin(\gamma)}_{=:S} X_1 + \underbrace{\cos(\gamma)}_{=:C} X_2 && \Rightarrow \quad E(Y_2) = -SE(X_1) + CE(X_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_1, Y_2) &= E\Big(\big[Y_1 - E(Y_1)\big] \cdot \big[Y_2 - E(Y_2)\big]\Big) \\ &= E\Big(\big[CX_1 + SX_2 - CE(X_1) - SE(X_2)\big] \cdot \big[-SX_1 + CX_2 + SE(X_1) - CE(X_2)\big]\Big) \\ &= E\Bigg(\Big[C\big(X_1 - E(X_1)\big) + S\big(X_2 - E(X_2)\big)\Big]\Big[-S\big(X_1 - E(X_1)\big) + C\big(X_2 - E(X_2)\big)\Big]\Bigg) \\ &= -CS\,\underbrace{E\Big(\big[X_1 - E(X_1)\big]^2\Big)}_{\sigma_{x_1}^2} + C^2\,\underbrace{E\Big(\big[X_1 - E(X_1)\big]\big[X_2 - E(X_2)\big]\Big)}_{\text{cov}(X_1,X_2)} - S^2\text{cov}(X_1, X_2) + CS\sigma_{x_2}^2 \\ &= \underbrace{\cos(\gamma) \cdot \sin(\gamma)}_{\frac{1}{2}\sin(2\gamma)} \cdot (\sigma_{x_2}^2 - \sigma_{x_1}^2) + \underbrace{(C^2 - S^2)}_{\cos(2\gamma)}\text{cov}(X_1, X_2) \end{aligned}$$

2. Winkel γ einsetzen und zeigen, dass $\text{cov}(Y_1, Y_2) = 0$ gilt:

$$\tan(2\gamma) = \frac{2\text{cov}(X_1, X_2)}{\sigma_{x_1}^2 - \sigma_{x_2}^2} \qquad \Rightarrow \text{cov}(X_1,X_2) = \tfrac{1}{2}\tan(2\gamma) \cdot (\sigma_{x_1}^2 - \sigma_{x_2}^2)$$

Eingesetzt in Ergebnis aus Schritt 1:

$$\mathrm{cov}(Y_1, Y_2) = \frac{1}{2}\sin(2\gamma)(\sigma_{x_2}^2 - \sigma_{x_1}^2) + \underbrace{\cos(2\gamma)\frac{1}{2}\tan(2\gamma)}_{\frac{1}{2}\sin(2\gamma)} \cdot (\sigma_{x_1}^2 - \sigma_{x_2}^2) = 0 \qquad \square$$

Nach der Koordinatentransformation von $\vec{X}$ nach $\vec{Y}$ sind die Koordinatenachsen parallel zu den Hauptachsen der elliptischen Höhenlinien und es ergibt sich eine Verteilung mit unabhängigen Komponenten, Y_1 und Y_2.

Aufgabe 20

Die Zufallsvariable $(X \; ; \; Y)^T$ habe die gemeinsame Dichte $f(x, y) = x + y$ für $x, y \in (0; 1]$ und null sonst.

a) Man berechne die Dichte von $Z = X \cdot Y$.

b) Man berechne den Korrelationskoeffizienten ρ_{XY}.

Lösung

a) Vorgehen: $X, Y \overset{\text{Var.Trafo.}}{\longrightarrow} X, Z \overset{\text{Rinddichte}}{\longrightarrow} Z$.

(1) Transformation zweidimensionaler Zufallsvariablen:

1. $U_1 = X \qquad U_2 = X \cdot Y \; (= Z)$
2. $x = u_1 \qquad y = \frac{u_2}{x} = \frac{u_2}{u_1} \; (= \frac{z}{x})$

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{u_2}{2u_1^2} & \frac{1}{u_1} \end{vmatrix} = u_1^{-1}$$

$$x \in (0; 1] \quad \Rightarrow \quad 0 < u_1 \leq 1$$
$$y \in (0; 1] \quad \Rightarrow \quad 0 < u_2 \leq u_1$$

3. Einsetzen:

$$f_{U_1 U_2}(u_1, u_2) = f_{XY}\left(u_1, \frac{u_2}{u_1}\right) \cdot u_1^{-1}$$

$$f(x,z) = \frac{1}{x} f_{XY}\left(x, \frac{z}{x}\right) = \begin{cases} \frac{1}{x}(x + \frac{z}{x}) = 1 + \frac{z}{x^2} & , \; 0 < z \leq x \leq 1 \\ 0 & , \; \text{sonst} \end{cases}$$

(2) Randdichte:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,z) \, \mathrm{d}x \overset{0<z\leq 1}{=} \int_z^1 1 + \frac{z}{x^2} \, \mathrm{d}x = \left[x - \frac{z}{x}\right]_z^1 = 1 - z - z + 1$$
$$= \begin{cases} 2(1-z) & , \; 0 < z \leq 1 \\ 0 & , \; \text{sonst} \end{cases}$$

b) Der Korrelationskoeffizient ist $\rho_{XY} = \text{cov}(X,Y) \,/\, (\, D(X)D(Y) \,)$:

(1) $f(x,y) = f(y, x) \quad \Rightarrow \quad D(X) = D(Y) \quad \Rightarrow \quad D(X)D(Y) = D^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$

$$E(X) = \int_0^1 \int_0^1 x^2 + xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \tfrac{1}{2}xy^2\right]_0^1 \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2\right]_0^1 = \frac{7}{12}$$
$$E(X^2) = \int_0^1 \int_0^1 x^3 + x^2 y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \left[x^3 y + \tfrac{1}{2}x^2 y^2\right]_0^1 \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3\right]_0^1 = \frac{5}{12}$$

(2) $\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(Z) - E^2(X)$

$$E(Z) = \int_0^1 2z - 2z^2 \, \mathrm{d}z = \left[z^2 - \frac{2}{3}z^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)} = \frac{E(Z) - E^2(X)}{E(X^2) - E^2(X)} = \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)^2}{\frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2} = -\frac{1}{11} = -0{,}\overline{09}$$

Zusatzmaterial

Gegebene Dichte für X und Y

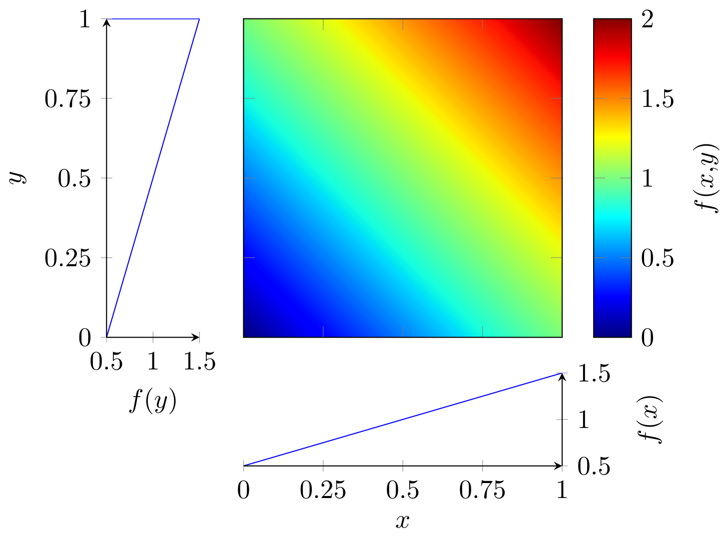


Abbildung 25: 2D-Dichte und Randdichten von X und Y

Dichte für X und Z (nach Var.Trafo.)

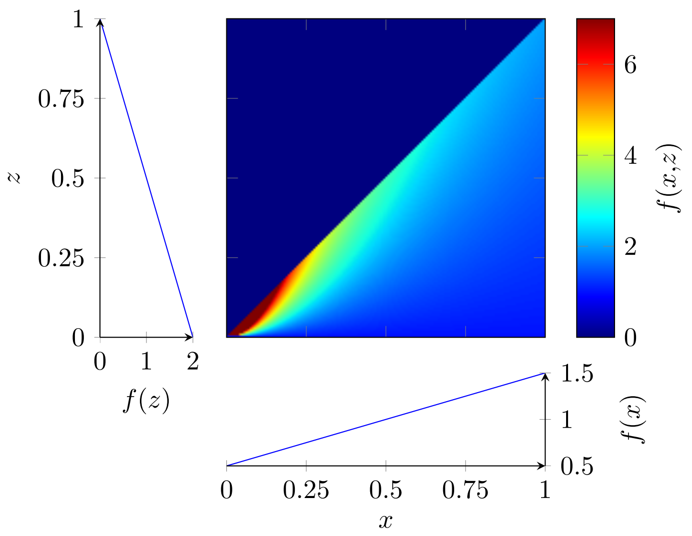


Abbildung 26: 2D-Dichte und Randdichten von X und Z

Variablentransformation

Hier händisch, also ohne das Schema von oben:

$$P(Z \le z) = P(XY \le z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z/x} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{\substack{u=xy \\ \mathrm{d}u = x\mathrm{d}y}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z} f_{XY}\left(x, \frac{u}{x}\right) \frac{1}{x}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}\left(x, \frac{u}{x}\right) \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{z} f_Z(u)\,\mathrm{d}u$$

Es ist $f_{XY}(x,y) = x + y$, für $0 < x \le 1$ und $0 < y = \frac{z}{x} \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < z \le x \le 1$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}\left(x, \frac{z}{x}\right) \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{z}^{1} 1 + \frac{z}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2 - 2z, \quad \text{für } 0 < z \le 1 \text{ und null sonst.}$$

Zusammenfassung

- **Gemeinsame Dichte unabhängiger Zufallsvariablen** X, Y:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \qquad \text{(Def. 7.3-1)}$$

- **Kovarianz** und **Korrelationskoeffizient** der Zufallsvariablen X und Y:

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X,Y) &= E\big([X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]\big) \\ &= E(XY) - E(X)\,E(Y) \\ \rho_{XY} &= \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)} \end{aligned} \qquad \text{(Def. 7.3-2)}$$

  Eigenschaften:

$$\textbf{unkorreliert} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{XY} = 0 \quad \Leftarrow \quad \textbf{unabhängig}$$

  Sind X und Y normalverteilt, folgt aus $\rho_{XY} = 0$ auch die Unabhängigkeit von X und Y.

- **Funktionen zweidimensionaler Zufallsvariablen**

  (1)
$$U_1 = g_1(X,Y); \qquad U_2 = g_2(X,Y) \qquad \text{(7.4-1)}$$

  (2)
$$x = h_1(u_1,u_2); \qquad y = h_2(u_1,u_2)$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

  (3)
$$f_{U_1U_2}(u_1,u_2) = f_{XY}\Big(h_1(u_1,u_2); h_2(u_1,u_2)\Big) \cdot |J| \qquad \text{(7.4-2)}$$

- **Normalverteilung: k-tes zentrales Moment**

$$E\big((X-\mu)^k\big) = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdots (k-1)\sigma^k & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} \qquad \text{(6.8-6)}$$