



Wahrscheinlichkeitstheorie – Übungsblatt 6

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 21

Hinweis Diese Aufgabe wird nicht in der Übung besprochen, sondern dient dem Nachvollziehen der Ergebnisse des 5. Übungsblattes. Sie bietet außerdem einen Ausblick auf eine der vielen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie in der Nachrichtentechnik

Das additive komplexe Rauschen $\mathbf{N} = N_I + jN_Q$ eines komplexen Signals $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{N}$ kann durch die Eigenschaften der Inphasekomponente N_I und Quadraturkomponente N_Q beschrieben werden. $N_I, N_Q \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ seien unabhängig voneinander. Um den Einfluss des Rauschens $\mathbf{N}$ auf das Signal $\mathbf{Y}$ beurteilen zu können, berechne man

- die Dichte der Amplitude $R = |\mathbf{N}|$ und
- die Dichte des Argumentes $\Phi = \arctan\left(\frac{N_Q}{N_I}\right)$ von $\mathbf{N}$.

Das komplexe Sendesignal $\mathbf{X}$ ist zufällig und entspricht einem der gleich häufig auftretenden Sendesymbole $s_k = \exp\left(j\pi \frac{2k+1}{4}\right)$ mit $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

- Geben Sie die Dichte von $\mathbf{Y}$ an.
- Skizzieren Sie in der komplexen Ebene einige Höhenlinien der Dichte des Empfangssignals $\mathbf{Y}$.

Aufgabe 22

Hinweis Auch diese Aufgabe wird nicht in der Übung besprochen, sondern dient der eigenen Vorbereitung.

Gegeben sind zwei im Intervall $[0, 1)$ gleichverteilte, unabhängige Zufallszahlen U_1, U_2 . Aus diesen Zufallszahlen sollen zwei unabhängige $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ -verteilte Zufallszahlen X und Y erzeugt werden. Man gebe die Transformationsfunktionen $X = g_1(U_1, U_2)$ und $Y = g_2(U_1, U_2)$ an.

Hinweis: Man erzeuge zuerst Betrag R und Phase Φ von $Z = X + jY$

Aufgabe 23

Im Werk einer Zahnradfabrik werden verschiedene Präzisionsmetallteile gefertigt. Während einer Schicht werden 5000 Stück eines Typs A hergestellt. Bei der Qualitätskontrolle werden 3% dieser Teile als defekt klassifiziert und aussortiert.

- Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass während einer Schicht zwischen 125 und 180 Teile aussortiert werden?
- Die aussortierten Teile werden nach Schichtende zur Wiederverwertung in einem Kessel auf einmal eingeschmolzen. Wie viele Teile muss der Kessel fassen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von min. 0,98 nicht überfüllt ist?
- Der Kessel fasse maximal 200 Teile. Es sollen nun mehr als 5000 Teile pro Schicht hergestellt werden. Wie viele Teile können maximal gefertigt werden, damit der Kessel mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,98 nicht überfüllt ist?

Aufgabe 24

X_i sei das Ergebnis der i -ten Messung ($i = 1, 2, \dots$) einer physikalischen Kenngröße. Die X_i sind identisch verteilte Zufallsvariablen mit der Varianz σ^2 .

- Wie viele voneinander unabhängige Messungen der Kenngröße müssen durchgeführt werden, damit das arithmetische Mittel der Messergebnisse mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,9 um weniger als 0.2σ vom Erwartungswert der Kenngröße abweicht?
- Wie lautet das Ergebnis, wenn bekannt ist, dass die X_i normalverteilt sind?

Aufgabe 25

Es sei $X(t)$, $t > 0$ ein stochastischer Prozess mit der Verteilungsfunktion

$$F_{X(t)}(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{t}\right)^2\right), \quad x \geq 0.$$

Die gemeinsame Dichte von $X(t_1)$ und $X(t_2)$, ($t_1, t_2 > 0$) sei

$$f(x_{t_1}, x_{t_2}) = 4 \frac{x_{t_1} x_{t_2}}{t_1^2 t_2^2} \exp\left(-\left(\frac{x_{t_1}}{t_1}\right)^2 - \left(\frac{x_{t_2}}{t_2}\right)^2\right), \quad x_{t_1}, x_{t_2} \geq 0$$

- Man berechne $E(X(t))$ dieses Prozesses.
- Man berechne die Autokorrelationsfunktion von $X(t)$.
- Ist der Prozess schwach stationär? Ist er stark stationär?

Aufgabe 26

$X(n)$ sei ein mittelwertfreier, zeitdiskreter, stationärer Zufallsprozess mit der mittleren Leistung σ_X^2 . Für alle Zeitpunkte $n_1 \neq n_2$ sei $X(n)$ unkorreliert.

- Geben Sie die Autokorrelationsfunktion $\varphi_{XX}(m)$ an.
- Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $\varphi_{YY}(m)$ von $Y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(n-k)$ für den Fall $N = 3$.
- Zeichnen Sie $\varphi_{XX}(m)$ und $\varphi_{YY}(m)$ in das selbe Koordinatensystem.