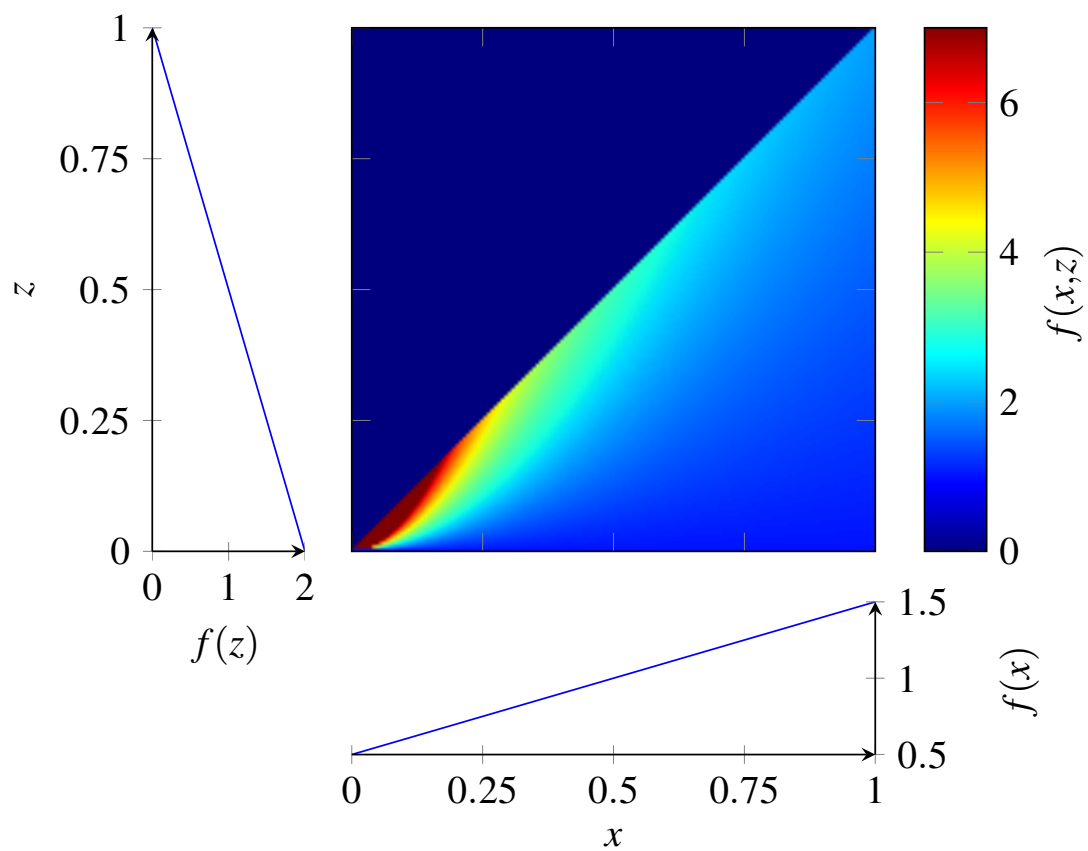


Aufgabe 20: Dichte für X und Z (nach Var.Trafo.)



Marcus Müller | 22. Januar 2018

Zusammenfassung

■ Funktionen zweidimensionaler Zufallsvariablen:

$$(1) \quad U_1 = g_1(X, Y); \quad U_2 = g_2(X, Y) \quad (7.4-1)$$

$$(2) \quad x = h_1(u_1, u_2); \quad y = h_2(u_1, u_2)$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad f_{U_1 U_2}(u_1, u_2) = f_{XY}(h_1(u_1, u_2); h_2(u_1, u_2)) \cdot |J| \quad (7.4-2)$$

Zusammenfassung (weiter)

- **Erzeugung von Zufallsvariablen:** Ist X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_X(x)$, dann hat $Z = g(X)$ für eindeutig umkehrbares $g(\cdot)$ genau dann eine Gleichverteilung auf $[0,1)$, wenn

$$g(X) = F_X(X). \quad (\text{Satz 7.6-1})$$

Die Erzeugung einer Zufallsvariablen Y mit der streng monoton wachsenden Verteilungsfunktion $F_Y(y)$, kann mittels einer in $[0,1)$ gleichverteilten Zufallsvariablen Z über

$$Y = F_Y^{-1}(Z) \quad (\text{Satz 7.6-2})$$

erreicht werden.

- **Tschebyscheffsche Ungleichung:** Es sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig und X eine Zufallsvariable mit endlicher Varianz. Dann gilt für jedes $\epsilon > 0$:

$$P(|X - c| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} E([X - c]^2) \quad (7.8-4)$$

Zusammenfassung (weiter)

- **Zentraler Grenzwertsatz:** $X_1, X_2, \dots$ sei eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $E(X_n) = m < \infty$ und $D^2(X_n) = d^2 < \infty$, dann gilt mit $S_N = \sum_{n=1}^N X_n$ für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left(\frac{S_N - Nm}{\sqrt{Nd}} \leq x \right) = \Phi(x). \quad (7.8-10)$$

- **Satz von de Moivre-Laplace:** Ist S_N eine binomialverteilte ZV mit den Parametern N und p , gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left(\frac{S_N - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \leq x \right) = \Phi(x). \quad (7.8-11)$$

Bemerkung: Für praktische Zwecke ($N < \infty$) reicht $D^2(S_N) \geq 9$.

- **Charakteristische Funktion:**

$$\varphi(s) = E(e^{jsX}) \stackrel{X \text{ diskret}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} e^{jsx_n} \cdot p_n \quad (\text{Def. 5.2-1})$$

$$E(X^k) = j^{-k} \varphi^{(k)}(0) \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.2-6)$$

Aufgabe 21

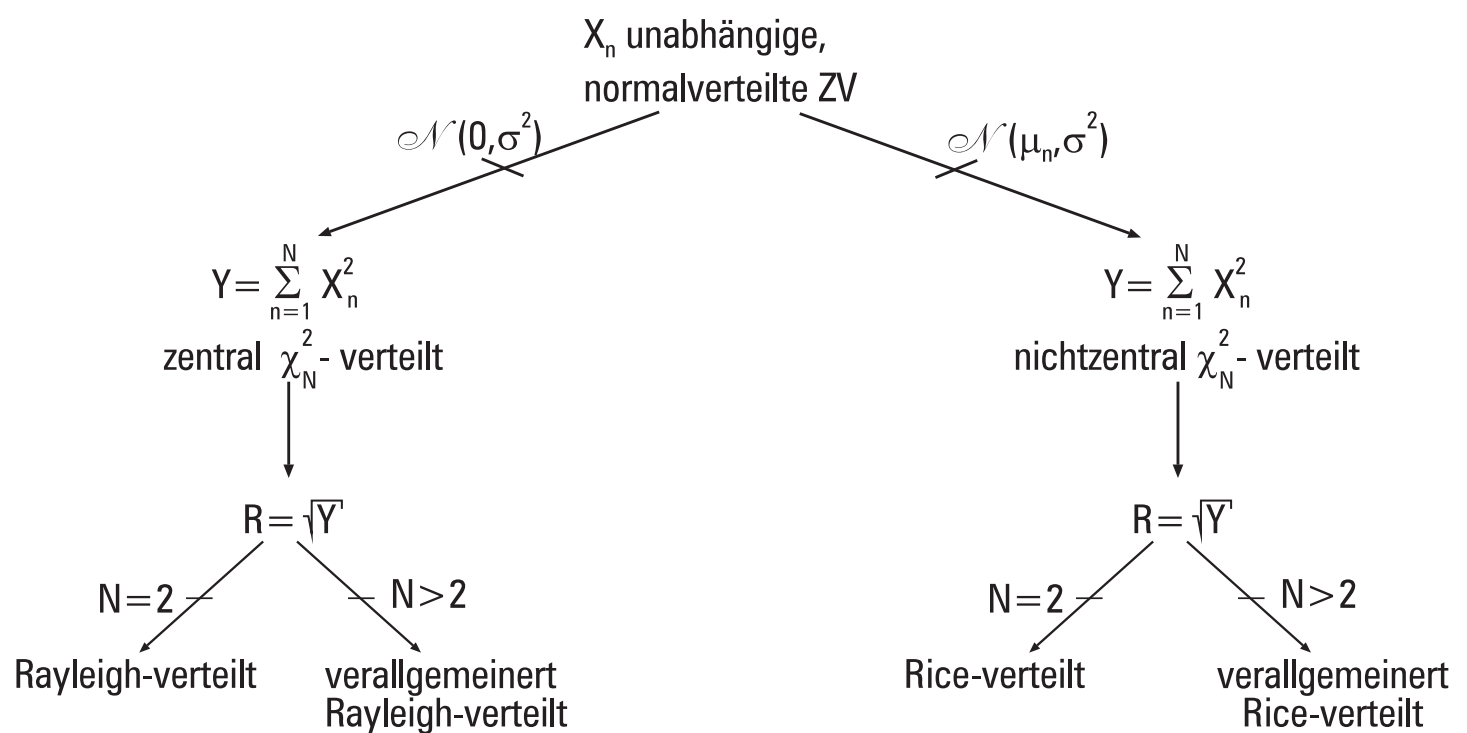
Das additive komplexe Rauschen $\mathbf{N} = N_I + jN_Q$ eines komplexen Signals $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{N}$ kann durch die Eigenschaften der Inphasekomponente N_I und Quadraturkomponente N_Q beschrieben werden. $N_I, N_Q \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ seien unabhängig voneinander. Um den Einfluss des Rauschens $\mathbf{N}$ auf das Signal $\mathbf{Y}$ beurteilen zu können, berechne man

- a) die Dichte der Amplitude $R = |\mathbf{N}|$ und
- b) die Dichte des Argumentes $\Phi = \arctan\left(\frac{N_Q}{N_I}\right)$ von $\mathbf{N}$.

Das komplexe Sendesignal $\mathbf{X}$ ist zufällig und entspricht einem der gleich häufig auftretenden Sendesymbole $s_k = \exp\left(j\pi \frac{2k+1}{4}\right)$ mit $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

- c) Geben Sie die Dichte von $\mathbf{Y}$ an.
- d) Skizzieren Sie in der komplexen Ebene einige Höhenlinien der Dichte des Empfangssignals $\mathbf{Y}$.

Aufgabe 21: Aus normverteilten ZV abgeleitete ZVs



Aufgabe 21 d) Höhenlinien

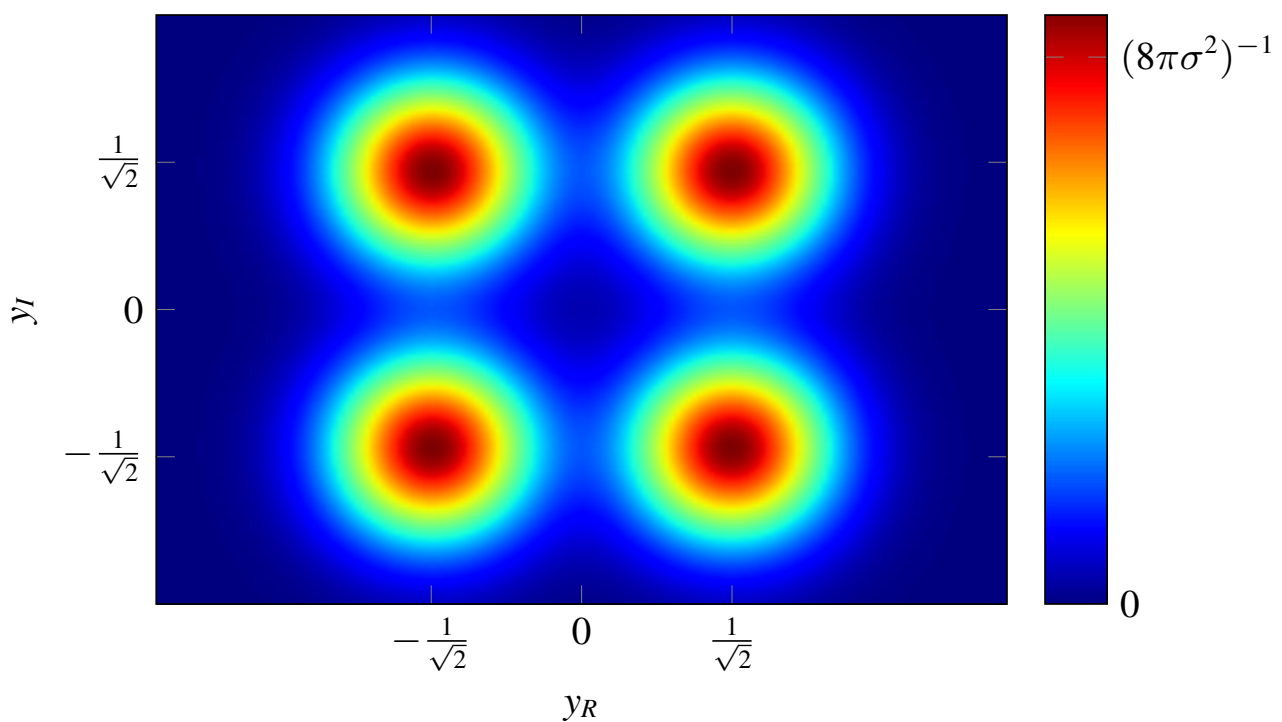


Abbildung 26: Dichte des Empfangssignals $\mathbf{Y}$ für $\sigma = 1/3$

Aufgabe 21 d) Höhenlinien

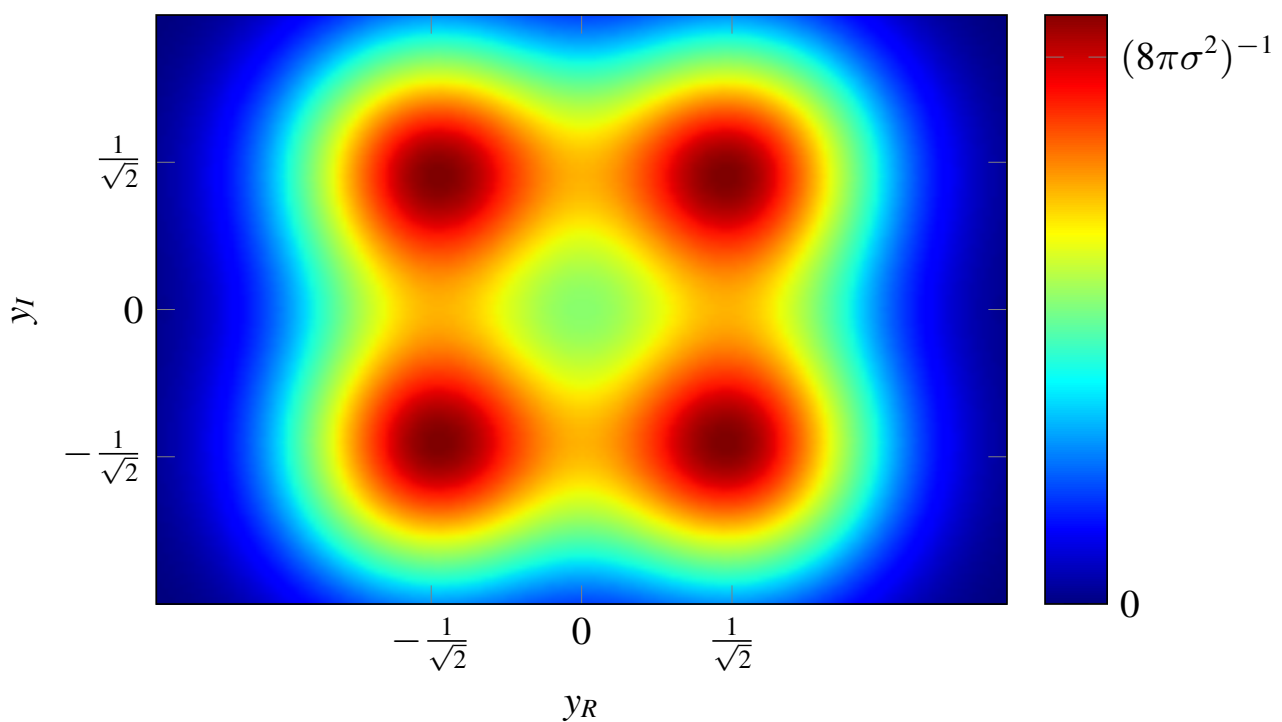


Abbildung 27: Dichte des Empfangssignals $\mathbf{Y}$ für $\sigma = 1/2$

Aufgabe 22

Gegeben sind zwei im Intervall $[0, 1)$ gleichverteilte, unabhängige Zufallszahlen U_1, U_2 . Aus diesen Zufallszahlen sollen zwei unabhängige $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ -verteilte Zufallszahlen X und Y erzeugt werden. Man gebe die Transformationsfunktionen $X = g_1(U_1, U_2)$ und $Y = g_2(U_1, U_2)$ an.

Hinweis: Man erzeuge zuerst Betrag R und Phase Φ von $Z = X + jY$

Aufgabe 22

Gegeben sind zwei im Intervall $[0, 1)$ gleichverteilte, unabhängige Zufallszahlen U_1, U_2 . Aus diesen Zufallszahlen sollen zwei unabhängige $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ -verteilte Zufallszahlen X und Y erzeugt werden. Man gebe die Transformationsfunktionen $X = g_1(U_1, U_2)$ und $Y = g_2(U_1, U_2)$ an.

Hinweis: Man erzeuge zuerst Betrag R und Phase Φ von $Z = X + jY$

Satz 7.6-2 (Erzeugung von Zufallsvariablen)

Die Erzeugung einer Zufallsvariablen Y mit der streng monoton wachsenden Verteilungsfunktion $F_Y(y)$, kann mittels einer in $[0, 1)$ gleichverteilten Zufallsvariablen Z über

$$Y = F_Y^{-1}(Z)$$

erreicht werden.

Aufgabe 23

Im Werk einer Zahnradfabrik werden verschiedene Präzisionsmetallteile gefertigt. Während einer Schicht werden 5000 Stück eines Typs A hergestellt. Bei der Qualitätskontrolle werden 3% dieser Teile als defekt klassifiziert und aussortiert.

- Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass während einer Schicht zwischen 125 und 180 Teile aussortiert werden?
- Die aussortierten Teile werden nach Schichtende zur Wiederverwertung in einem Kessel auf einmal eingeschmolzen. Wie viele Teile muss der Kessel fassen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von min. 0,98 nicht überfüllt ist?
- Der Kessel fasse maximal 200 Teile. Es sollen nun mehr als 5000 Teile pro Schicht hergestellt werden. Wie viele Teile können maximal gefertigt werden, damit der Kessel mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,98 nicht überfüllt ist?

Aufgabe 23

Im Werk einer Zahnradfabrik werden verschiedene Präzisionsmetallteile gefertigt. Während einer Schicht werden 5000 Stück eines Typs A hergestellt. Bei der Qualitätskontrolle werden 3% dieser Teile als defekt klassifiziert und aussortiert.

- Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass während einer Schicht zwischen 125 und 180 Teile aussortiert werden?
- Die aussortierten Teile werden nach Schichtende zur Wiederverwertung in einem Kessel auf einmal eingeschmolzen. Wie viele Teile muss der Kessel fassen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von min. 0,98 nicht überfüllt ist?

Satz 7.8-4 (Zentraler Grenzwertsatz)

$X_1, X_2, \dots$ sei eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $E(X_n) = m < \infty$ und $D^2(X_n) = d^2 < \infty$, dann gilt mit $S_N = \sum_{n=1}^N X_n$ für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_N - Nm}{\sqrt{Nd}} \leq x\right) = \Phi(x). \quad (7.8-10)$$

Aufgabe 23

Im Werk einer Zahnradfabrik werden verschiedene Präzisionsmetallteile gefertigt. Während einer Schicht werden 5000 Stück eines Typs A hergestellt. Bei der Qualitätskontrolle werden 3% dieser Teile als defekt klassifiziert und aussortiert.

- Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass während einer Schicht zwischen 125 und 180 Teile aussortiert werden?
- Die aussortierten Teile werden nach Schichtende zur Wiederverwertung in einem Kessel auf einmal eingeschmolzen. Wie viele Teile muss der Kessel fassen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von min. 0,98 nicht überfüllt ist?

Satz 7.8-5 (Satz von de Moivre-Laplace)

Ist S_N eine binomialverteilte ZV mit den Parametern N und p , gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left(\frac{S_N - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \leq x \right) = \Phi(x). \quad (7.8-11)$$

Bemerkung: Für praktische Zwecke ($N < \infty$) reicht $D^2(S_N) \geq 9$.

Aufgabe 23

Im Werk einer Zahnradfabrik werden verschiedene Präzisionsmetallteile gefertigt. Während einer Schicht werden 5000 Stück eines Typs A hergestellt. Bei der Qualitätskontrolle werden 3% dieser Teile als defekt klassifiziert und aussortiert.

- Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass während einer Schicht zwischen 125 und 180 Teile aussortiert werden?
- Die aussortierten Teile werden nach Schichtende zur Wiederverwertung in einem Kessel auf einmal eingeschmolzen. Wie viele Teile muss der Kessel fassen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von min. 0,98 nicht überfüllt ist?
- Der Kessel fasse maximal 200 Teile. Es sollen nun mehr als 5000 Teile pro Schicht hergestellt werden. Wie viele Teile können maximal gefertigt werden, damit der Kessel mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,98 nicht überfüllt ist?

Aufgabe 24

X_i sei das Ergebnis der i -ten Messung ($i = 1, 2, \dots$) einer physikalischen Kenngröße. Die X_i sind identisch verteilte Zufallsvariablen mit der Varianz σ^2 .

- a) Wie viele voneinander unabhängige Messungen der Kenngröße müssen durchgeführt werden, damit das arithmetische Mittel der Messergebnisse mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,9 um weniger als 0.2σ vom Erwartungswert der Kenngröße abweicht?
- b) Wie lautet das Ergebnis, wenn bekannt ist, dass die X_i normalverteilt sind?