Karlsruher Institut für Technologie
Communications Engineering Lab
Dr.-Ing. Holger Jäkel

Wahrscheinlichkeitstheorie – Lösungen zu Übung 6

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 21

Hinweis Diese Aufgabe wird nicht in der Übung besprochen, sondern dient dem Nachvollziehen der Ergebnisse des 5. Übungsblattes. Sie bietet außerdem einen Ausblick auf eine der vielen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie in der Nachrichtentechnik

Das additive komplexe Rauschen $\mathbf{N} = N_I + jN_Q$ eines komplexen Signals $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{N}$ kann durch die Eigenschaften der Inphasekomponente N_I und Quadraturkomponente N_Q beschrieben werden. $N_I, N_Q \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ seien unabhängig voneinander. Um den Einfluss des Rauschens $\mathbf{N}$ auf das Signal $\mathbf{Y}$ beurteilen zu können, berechne man

a) die Dichte der Amplitude $R = |\mathbf{N}|$ und

b) die Dichte des Argumentes $\Phi = \arctan\left(\frac{N_Q}{N_I}\right)$ von $\mathbf{N}$.

Das komplexe Sendesignal $\mathbf{X}$ ist zufällig und entspricht einem der gleich häufig auftretenden Sendesymbole $s_k = \exp\left(j\pi\frac{2k+1}{4}\right)$ mit $k \in \{0,1,2,3\}$.

c) Geben Sie die Dichte von $\mathbf{Y}$ an.

d) Skizzieren Sie in der komplexen Ebene einige Höhenlinien der Dichte des Empfangssignals $\mathbf{Y}$.

Lösung

a,b) Gemeinsame Dichte der beiden Rauschkomponenten:

$$f_{N_I N_Q}(n_I, n_Q) = f_{N_I}(n_I) \cdot f_{N_Q}(n_Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{n_I^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{n_Q^2}{2\sigma^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n_I^2 + n_Q^2\right]\right)$$

Variablen-Transformation:

(1) Die Amplitude und das Argument ergibt sich aus:

$$R = |\mathbf{N}| = \sqrt{N_I^2 + N_Q^2}\,; \quad \Phi = \arctan\left(\frac{N_Q}{N_I}\right)$$

(2) Umkehrfunktionen und Funktionaldeterminante:

$$n_I = r \cdot \cos(\varphi)\,; \quad n_Q = r \cdot \sin(\varphi) \qquad \text{mit } r > 0;\ \varphi \in [0, 2\pi)$$
$$|J| = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{vmatrix} = r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) = r$$

(3) Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_{R\Phi}(r,\varphi) &= f_{N_I N_Q}\big(r\cos(\varphi),\ r\sin(\varphi)\big)\cdot r \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\Big[\big(r\cos(\varphi)\big)^2+\big(r\sin(\varphi)\big)^2\Big]\right) \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

für $r > 0,\ \varphi \in [0, 2\pi)$ und null sonst.

a) Randdichte der Amplitude R:

$$f_R(r) = \int_0^{2\pi} f(r,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = f(r,\varphi)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

für $r > 0$ und null sonst. $\Rightarrow$ Rayleighverteilung

b) Randdichte des Arguments Φ

$$f_\Phi(\varphi) = \int_0^\infty f(r,\varphi)\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty \frac{-1}{2\pi}\cdot\underbrace{\frac{-r}{\sigma^2}}_{h'(r)}\exp\left(\underbrace{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}_{h(r)}\right)\mathrm{d}r = \left[\frac{-1}{2\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\right]_0^\infty = \frac{1}{2\pi}$$

für $\varphi \in [0, 2\pi)$ und null sonst. $\Rightarrow$ Gleichverteilung

c) Gesucht ist $f_Y(y)$ aus $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{N}$ mit

$$f_X(x) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\delta(x - s_K)$$

$\mathbf{X}$ und $\mathbf{N}$ unabhängig. Die Faltung der Dichten ergibt

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_N(y-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\int_{-\infty}^{\infty} f_N(y-x)\delta(x-s_k)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f_N(y-s_k)$$

d) (Obere) Höhenlinien sind Kreise um die Symbole s_k:

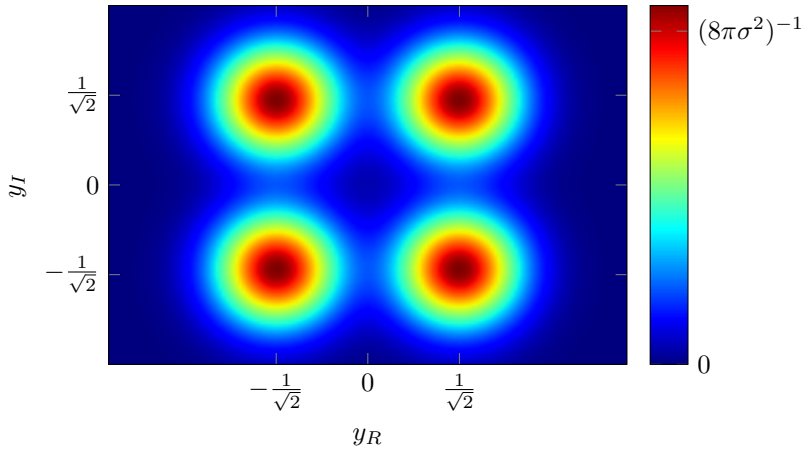

Abbildung 27: Dichte des Empfangssignals $\mathbf{Y}$ für $\sigma = 1/3$

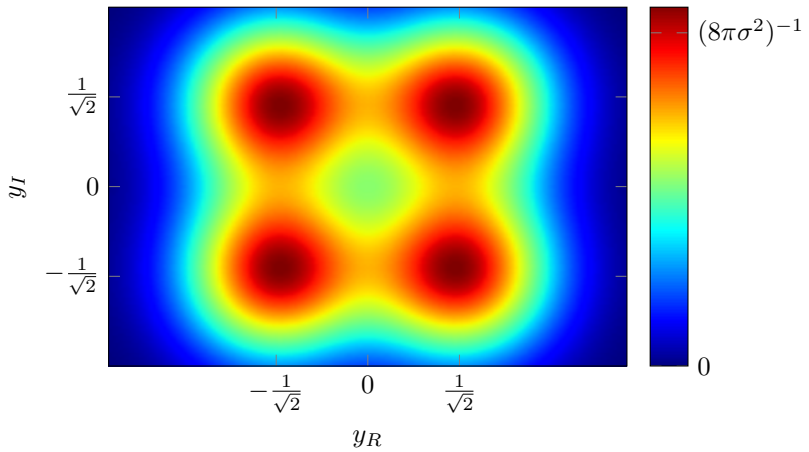

Abbildung 28: Dichte des Empfangssignals $\mathbf{Y}$ für $\sigma = 1/2$

Aufgabe 22

Hinweis Auch diese Aufgabe wird nicht in der Übung besprochen, sondern dient der eigenen Vorbereitung.

Gegeben sind zwei im Intervall $[0, 1)$ gleichverteilte, unabhängige Zufallszahlen U_1, U_2. Aus diesen Zufallszahlen sollen zwei unabhängige $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$-verteilte Zufallszahlen X und Y erzeugt werden. Man gebe die Transformationsfunktionen $X = g_1(U_1, U_2)$ und $Y = g_2(U_1, U_2)$ an.
Hinweis: Man erzeuge zuerst Betrag R und Phase Φ von $Z = X + jY$

Lösung

Die Erzeugung einer Zufallsvariablen Y mit der streng monoton wachsenden Verteilungsfunktion $F_Y(y)$, kann mittels einer in [0,1) gleichverteilten Zufallvariablen Z über

$$Y = F_Y^{-1}(Z)$$

erreicht werden.
Aus der vorherigen Aufgabe ist bekannt, daß $R = |Z| = \sqrt{X^2 + Y^2}$ rayleigh-verteilt ist:

$$F_R(r) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) & \text{, für } r \geq 0 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Die Phase $\Phi \sim \mathcal{U}[0, 2\pi)$ hat die Verteilungsfunktion

$$F_\Phi(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{, für } \varphi < 0 \\ \frac{\varphi}{2\pi} & \text{, für } 0 \leq \varphi < 2\pi \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases}.$$

Erzeugung von R und Φ aus U_1, U_2:

$$R = F_R^{-1}(U_1) = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1 - U_1)}$$
$$\Phi = F_\Phi^{-1}(U_2) = 2\pi \cdot U_2$$

Mit $X = R\cos\Phi$ und $Y = R\sin\Phi$ ergeben sich die gesuchten Zufallszahlen

$$X = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1 - U_1)} \cdot \cos(2\pi U_2)$$
$$Y = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1 - U_1)} \cdot \sin(2\pi U_2).$$

Aufgabe 23

Im Werk einer Zahnradfabrik werden verschiedene Präzisionsmetallteile gefertigt. Während einer Schicht werden 5000 Stück eines Typs A hergestellt. Bei der Qualitätskontrolle werden 3% dieser Teile als defekt klassifiziert und aussortiert.

a) Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass während einer Schicht zwischen 125 und 180 Teile aussortiert werden?

b) Die aussortierten Teile werden nach Schichtende zur Wiederverwertung in einem Kessel auf einmal eingeschmolzen. Wie viele Teile muss der Kessel fassen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von min. 0,98 nicht überfüllt ist?

c) Der Kessel fasse maximal 200 Teile. Es sollen nun mehr als 5000 Teile pro Schicht hergestellt werden. Wie viele Teile können maximal gefertigt werden, damit der Kessel mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,98 nicht überfüllt ist?

Lösung

a) gegeben: Bernoulli-Schema: $N = 5000$ unab. WDH eines binären Zufallsexperiments mit $p = 0{,}03$
gesucht: $P(125 \leq S_N \leq 180)$ S_N: Anzahl definierter Zahnräder exakt:

$$p_a = P(125 \leq S_N \leq 180) = \sum_{k=125}^{180} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = \ldots \quad \text{(zu aufwändig)}$$

Näherung mit dem Satz von Moivre-Laplace: Die Zufallsvariable S_N wird mit $\tilde{S}_N \sim \mathcal{N}(\, Np \;;\; Np(1-p)\,)$ angenähert. Wegen $D^2(S_N) = Np(1-p) = 145.5 \geq 9$ ist die Approximation hinreichend genau:

$$\begin{aligned} p_a &= P(\tilde{S}_N \leq 180) - P(\tilde{S}_N \leq 125) \\ &= P\Bigg(\underbrace{\frac{S - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}}_{\tilde{S} \sim \mathcal{N}(0;1)} \leq \frac{180 - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \Bigg) - P\left(\tilde{S} \leq \frac{125 - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \right) \\ &= P(\tilde{S} \leq 2{,}4187) - P(\tilde{S} \leq -2{,}073) = \Phi(2{,}487) - \big(1 - \Phi(2{,}073)\big) = 97{,}4\% \end{aligned}$$

b) Gesucht wird d_x in $P(S_N \leq d_x) \overset{!}{\geq} 0{,}98$. Auch hier kann mit der Normalverteilung approximiert werden:

$$P(S_N \leq d_x) \approx \Phi\left(\frac{d_x - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \right) \overset{!}{\geq} 0{,}98$$

mit $\Phi(2{,}06) \approx 0{,}98$ ergibt

$$d_x \geq 2{,}06 \cdot \sqrt{Np(1-p)} + Np = 174{,}8$$

Der Kessel muss mindestens 175 Teile fassen.

c) Gesucht wird N_x in $P(S_{N_x} \leq 200) \overset{!}{=} 0{,}98$. Hier kann wie in b) vorgegangen werden:

$$200 \geq 2{,}06 \cdot \sqrt{N_x p(1-p)} + N_x p$$

Nach der Substitution $u = \sqrt{N_x}$ ergibt sich die quadratische Gleichung

$$u^2 + 2{,}06\sqrt{1/p - 1} \cdot u - 200/p = 0$$

mit den Lösungen $u_1 = 76{,}00$ und $u_2 = -87{,}72$. Aus u_1 ergibt sich durch Rücksubstitution die einzige sinnvolle Lösung: $N_x = u_1^2 = 5776{,}40$.

Es können also maximal 5776 Teile pro Schicht gefertigt werden.

Aufgabe 24

X_i sei das Ergebnis der i-ten Messung ($i = 1, 2, \dots$) einer physikalischen Kenngröße. Die X_i sind identisch verteilte Zufallsvariablen mit der Varianz σ^2.

a) Wie viele voneinander unabhängige Messungen der Kenngröße müssen durchgeführt werden, damit das arithmetische Mittel der Messergebnisse mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $0{,}9$ um weniger als 0.2σ vom Erwartungswert der Kenngröße abweicht?

b) Wie lautet das Ergebnis, wenn bekannt ist, dass die X_i normalverteilt sind?

Lösung

a) Das arithmetische Mittel von N Messergebnissen ist

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\,; \qquad D^2(X_i) = \sigma^2$$

Gesucht ist N, so dass $P\big(|\bar{X} - E(X_i)| < 0{,}2\sigma\big) > 0{,}9$. Lösung mit Tschebyscheffschen Ungleichung:

$$P\big(|\bar{X}_N - \underbrace{E(X_i)}_{c}| \geq \underbrace{0{,}2\sigma}_{\epsilon}\big) \leq \frac{1}{\epsilon^2} E\left([\bar{X} - c]^2\right)$$

$$= \frac{25}{\sigma^2} E\left([\bar{X} - E(X_i)]^2\right) \quad \overset{!}{\leq} \quad 0{,}1$$

Erwartungswert $E\left([\bar{X} - E(X_i)]^2\right)$: Es gilt

$$E(\bar{X}) = E\left(\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \underbrace{E(X_i)}_{=\text{const}(i)} = E(X_i)$$

und damit ist

$$E\Big(\big[\bar{X} - E(X_i)\big]^2\Big) = E\Big(\big[\bar{X} - E(\bar{X})\big]\Big) = D^2(\bar{X})$$

$$= D^2\left(\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} \underbrace{D^2(X_i)}_{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{N}.$$

Einsetzen:

$$\frac{1}{\epsilon^2} E\left([\bar{X} - c]^2\right) = \frac{25}{\sigma^2} \cdot \frac{\sigma^2}{N} \leq 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad N \geq 250$$

Es müssen mindestens 250 unabhängige Messungen durchgeführt werden.

b) Hier ist $X_i \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ und damit $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/N)$:

$$P(|\bar{X} - E(X_i)| < 0{,}2\sigma) = P(-0{,}2\sigma < \underbrace{\bar{X} - \mu}_{\sim\mathcal{N}(0;\frac{\sigma^2}{N})} < 0{,}2\sigma) = \Phi(0.2\sqrt{N}) \; - \; \Phi(-0.2\sqrt{N})$$

$$= 2 \cdot \Phi(0.2\sqrt{N}) - 1 > 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad \Phi(0.2\sqrt{N}) > 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{N}}{5} > 1{,}64 \quad \Rightarrow \quad N \geq 68$$

Das Ergebnis aus a) wird deutlich unterschritten!

Aufgabe 25

Es sei $X(t), t > 0$ ein stochastischer Prozess mit der Verteilungsfunktion

$$F_{X(t)}(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{t}\right)^2\right), \quad x \geq 0.$$

Die gemeinsame Dichte von $X(t_1)$ und $X(t_2)$, $(t_1, t_2 > 0)$ sei

$$f(x_{t_1}, x_{t_2}) = 4\,\frac{x_{t_1}\,x_{t_2}}{t_1^2\,t_2^2}\,\exp\left(-\left(\frac{x_{t_1}}{t_1}\right)^2 - \left(\frac{x_{t_2}}{t_2}\right)^2\right), \qquad x_{t_1}, x_{t_2} \geq 0$$

a) Man berechne $E(X(t))$ dieses Prozesses.

b) Man berechne die Autokorrelationsfunktion von $X(t)$.

c) Ist der Prozess schwach stationär? Ist er stark stationär?

Lösung

a) Für den Erwartungswert wird die Dichte $f_{X(t)}(x)$ benötigt:

$$f_{X(t)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{X(t)}(x) = \frac{2x}{t^2}\exp\left(-\left(\frac{x}{t}\right)^2\right), \quad x \geq 0$$

$$E\big(X(t)\big) = \int_0^\infty \frac{2x^2}{t^2}\exp\left(-\left(\frac{x}{t}\right)^2\right)\mathrm{d}x$$

Substitution: $\frac{x}{t} = \frac{\tilde{x}}{\sqrt{2}}$ und $\mathrm{d}x = \frac{t}{\sqrt{2}}\mathrm{d}\tilde{x}$

$$\begin{aligned} E\big(X(t)\big) &= -\int_0^\infty \tilde{x}\left(-\tilde{x}\exp\left(-\frac{\tilde{x}^2}{2}\right)\right)\tfrac{t}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}\tilde{x} \\ &= -\tfrac{t}{\sqrt{2}}\left[\tilde{x}\exp\left(-\frac{\tilde{x}^2}{2}\right)\right]_0^\infty + \tfrac{t}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tilde{x}^2}{2}\right)\mathrm{d}\tilde{x} \\ &= 0 + \sqrt{\pi}\cdot t\cdot \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\tilde{x}^2}{2}\right)\mathrm{d}\tilde{x}}_{=\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}t \end{aligned}$$

b) Für die Autokorrelationsfunktion eines stochastischen Prozesses gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_{XX}(t_1,t_2) &= E\big(X(t_1)\,X(t_2)\big) = \int_0^\infty\int_0^\infty x_{t_1}x_{t_2}f(x_{t_1},x_{t_2})\,\mathrm{d}x_{t_2}dx_{t_1} \\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty 4\cdot\frac{x_{t_1}^2}{t_1^2}\cdot\frac{x_{t_2}^2}{t_2^2}\cdot\exp\left(-\frac{x_{t_1}^2}{t_1^2}-\frac{x_{t_2}^2}{t_2^2}\right)\mathrm{d}x_{t_2}dx_{t_1} \\ &= \underbrace{\int_0^\infty 2\frac{x_{t_1}^2}{t_1^2}\exp\left(-\frac{x_{t_1}^2}{t_1^2}\right)\mathrm{d}x_{t_1}}_{E\left(X(t_1)\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}t_1}\cdot E\big(X(t_2)\big) \\ &= \frac{\pi}{4}t_1\cdot t_2 \end{aligned}$$

c) Der stochastische Prozess ist nicht (stark) stationär, da $f(x_{t_1+h}, x_{t_2+h}) \neq f(x_{t_1}, x_{t_2})$ und auch da $E(X(t))$ und $\varphi_{XX}(t, t-\tau)$ von der Zeit t abhängig sind.

Aufgabe 26

$X(n)$ sei ein mittelwertfreier, zeitdiskreter, stationärer Zufallsprozess mit der mittleren Leistung σ_X^2. Für alle Zeitpunkte $n_1 \neq n_2$ sei $X(n)$ unkorreliert.

a) Geben Sie die Autokorrelationsfunktion $\varphi_{XX}(m)$ an.

b) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $\varphi_{YY}(m)$ von $Y(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(n-k)$ für den Fall $N = 3$.

c) Zeichnen Sie $\varphi_{XX}(m)$ und $\varphi_{YY}(m)$ in das selbe Koordinatensystem.

Lösung

a) Für einen stationären Prozess gilt $\varphi_{XX}(n_1, n_2) = \varphi_{XX}(n, n-m) = \varphi_{XX}(m)$

$$\varphi_{XX}(m) = \begin{cases} \sigma_X^2 & , m = 0 \\ 0 & , m \neq 0 \end{cases} \quad = \quad \sigma_X^2 \delta_{0,m}$$

b) $Y(n)$ ist der gleitende Mittelwert der Länge N von $X(n)$.

$$\begin{aligned}
\varphi_{YY}(m) &= E\big(Y(n)\,Y(n-m)\big) = E\big(\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{k=0}^{2} X(n-k) \;\cdot\; \tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{2} X(n-m-k)\big) \\
&= \tfrac{1}{9} E\Big(\big(X(n) + X(n-1) + X(n-2)\big) \cdot \big(X(n-m) + X(n-m-1) + X(n-m-2)\big)\Big) \\
&= \tfrac{1}{9}\big[\varphi_{XX}(m) + \varphi_{XX}(m-1) + \varphi_{XX}(m-2) \\
&\quad + \varphi_{XX}(m+1) + \varphi_{XX}(m) + \varphi_{XX}(m-1) \\
&\quad + \varphi_{XX}(m+2) + \varphi_{XX}(m+1) + \varphi_{XX}(m)\big] \\
&= \tfrac{1}{9}\big[\varphi_{XX}(m-2) + 2\varphi_{XX}(m-1) + 3\varphi_{XX}(m) + 2\varphi_{XX}(m+1) + \varphi_{XX}(m+2)\big] \\
&= \tfrac{\sigma_X^2}{9}\big(\delta_{-2,m} + 2\delta_{-1,m} + 3\delta_{0,m} + 2\delta_{1,m} + \delta_{2,m}\big)
\end{aligned}$$

c) Die Ausgangsleistung ist $\varphi_{YY}(0) = \sigma_X^2/3$. Für aufeinanderfolgende Werte von $Y(n)$ haben $N - 1 = 2$ identische Summanden (von $N = 3$ gesamt), d.h. $\varphi_{YY}(\pm 1) = \frac{2}{3}\varphi_{YY}(0)$. Nicht direkt aufeinanderfolgende $Y(n)$ haben entsprechen weniger Summanden gemein und weisen damit eine geringe Korrelation auf. Überlappen keine Summanden mehr, verschwindet die Korrelation.

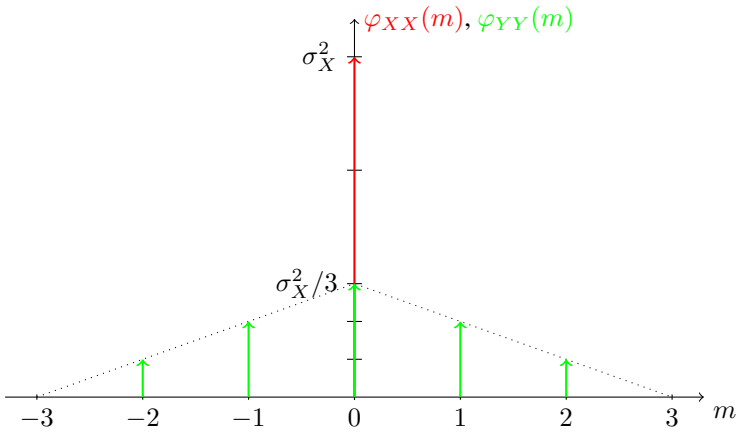

Abbildung 29: Autokorrelationsfunktion von $X(n)$ und $Y(n)$

Zusammenfassung

- **Funktionen zweidimensionaler Zufallsvariablen:**

(1) $$U_1 = g_1(X,Y); \qquad U_2 = g_2(X,Y) \tag{7.4-1}$$

(2) $$x = h_1(u_1,u_2); \qquad y = h_2(u_1,u_2)$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

(3) $$f_{U_1U_2}(u_1,u_2) = f_{XY}\Big(h_1(u_1,u_2); h_2(u_1,u_2)\Big) \cdot |J| \tag{7.4-2}$$

- **Erzeugung von Zufallsvariablen:** Ist X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_X(x)$, dann hat $Z = g(X)$ für eindeutig umkehrbares $g(\cdot)$ genau dann eine Gleichverteilung auf $[0,1)$, wenn

$$g(X) = F_X(X). \tag{Satz 7.6-1}$$

Die Erzeugung einer Zufallsvariablen Y mit der streng monoton wachsenden Verteilungsfunktion $F_Y(y)$, kann mittels einer in $[0,1)$ gleichverteilten Zufallvariablen Z über

$$Y = F_Y^{-1}(Z) \tag{Satz 7.6-2}$$

erreicht werden.

- **Tschebyscheffsche Ungleichung:** Es sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig und X eine Zufallsvariable mit endlicher Varianz. Dann gilt für jedes $\epsilon > 0$:

$$P\big(|X-c| \geq \epsilon\big) \leq \frac{1}{\epsilon^2} E\big([X-c]^2\big) \tag{7.8-4}$$

- **Zentraler Grenzwertsatz:** $X_1, X_2, \ldots$ sei eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $E(X_n) = m < \infty$ und $D^2(X_n) = d^2 < \infty$, dann gilt mit $S_N = \sum_{n=1}^{N} X_n$ für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\frac{S_N - Nm}{\sqrt{N}d} \leq x\right) = \Phi(x). \tag{7.8-10}$$

- **Satz von de Moivre-Laplace:** Ist S_N eine binomialverteilte ZV mit den Parametern N und p, gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\frac{S_N - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \leq x\right) = \Phi(x). \tag{7.8-11}$$

Bemerkung: Für praktische Zwecke ($N < \infty$) reicht $D^2(S_N) \geq 9$.

- **Charakterische Funktion:**

$$\varphi(s) = E(e^{jsX}) \quad \overset{X \text{ diskret}}{=} \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{jsx_n} \cdot p_n \tag{Def. 5.2-1}$$

$$E(X^k) = j^{-k}\varphi^{(k)}(0) \qquad k = 1,2,\ldots \tag{5.2-6}$$