Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruher Institut für Technologie
Communications Engineering Lab
Dr.-Ing. Holger Jäkel

CEL

Wahrscheinlichkeitstheorie – Übungsblatt 7

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 27

Gegeben seien die beiden stochastischen Prozesse

$$X(\omega,t) = A(\omega)\cdot\left[1+\cos(2\pi f_0 t + \Psi(\omega))\right] \text{ und}$$
$$Y(\omega,t) = A(\omega)\cdot\left[1+\sin(2\pi f_0 t + \Psi_Y(\omega))\right],$$

wobei $f_0 \in \mathbb{R}$ konstant sei. Die Zufallsvariablen A und Ψ bzw. Ψ_Y seien stochastisch unabhängig. Ψ, Ψ_Y seien im Intervall $[-\pi,\pi)$ gleichverteilt, A sei normalverteilt mit dem Erwartungswert Null und der Varianz σ^2.

a) Man bestimme die Autokorrelationsfunktion und die spektrale Leistungsdichte des Prozesses $X(t)$.

Aufgabe 28

Am Eingang eines LTI-Systems mit der Impulsantwort $h(t) = \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$ für $t \geq 0$; $T > 0$ wird ein komplexwertiger weißer Gaußscher Rauschprozess $X(t)$ angelegt.

a) Man bestimme das Leistungsdichtespektrum und die mittlere Leistung des Ausgangsprozesses $Y(t)$.

b) Man bestimme die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen $Y(t_1)$ und $Y(t_2)$ mit $t_1 = 0$ und $t_2 = 2T$.

Aufgabe 29

Es sei bekannt, dass die Anzahl $X(t)$ der Störungen in einem Rechnernetz im Intervall $[0,t)$ einem Poissonprozess mit der mittleren Ankunftsrate $\lambda = 0{,}25$ [h^{-1}] folgt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt in den ersten 8 Stunden höchstens eine Störung auf?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Rechnernetz (danach) 10 Stunden ohne Störung funktioniert?

c) Die Folge von Zufallsvariablen T_n $(n = 1,2,3,\ldots)$, beschreibt den zufälligen Zeitpunkt, an dem die n-te Störung stattfindet. Man berechne die Dichte von T_n.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt die dritte Störung nach 8 Stunden auf?

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trat in den ersten zwei Stunden genau eine Störung auf, wenn nach 8 Stunden genau drei aufgetreten sind?

Aufgabe 30

Die Abbildung unten zeigt den Übergangsgraph einer homogenen Markoffkette $X(n)$.

a) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix $\mathbf{P}$ an.

b) Im n-ten Zeitschritt gilt für die Zustandsverteilung $\vec{p}^T(n) = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix}$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich der Prozess zwei Schritte später nicht im zweiten Zustand?

Gesucht wird die stationäre Verteilung $\vec{p}$, für die Gleichung $\vec{p}^T = \vec{p}^T \mathbf{P}$ gilt.

c) Man beschreibe diesen Zusammenhang als Eigenwertproblem und zeige die Existenz des zugehörigen Eigenwerts.

d) Wie groß ist die stationäre Verteilung $\vec{p}$?

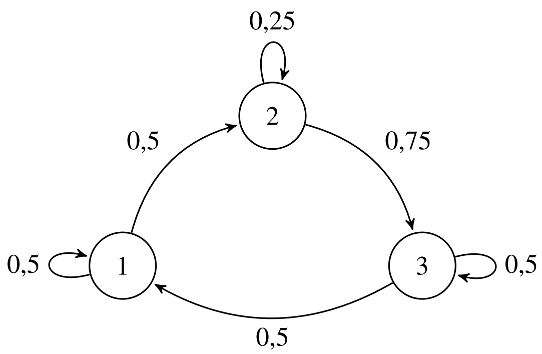

Abbildung 6: Übergangsgraph einer homogenen Markoffkette

Aufgabe 31

Für die Übermittlung von Nachrichten werde folgendes Protokoll verwendet:

Am Anfang ist das System im **Ruhezustand (1)**. Sobald eine Nachricht gesendet wurde, wird in den **Wartezustand (2)** gewechselt. Trifft im nächsten Schritt eine Bestätigung der gesendeten Nachricht ein, ist der Vorgang abgeschlossen und es wird zurück in den Ruhezustand gewechselt. Trifft keine Bestätigung ein, wird in den nächsten **Zustand (3)** gewechselt. Von diesem aus wird entweder, nach erneuter Sendung, zurück in den Wartezustand, nach Erhalt einer Bestätigung, in den Ruhezustand oder, beim Ausbleiben einer Bestätigung, in den **Fehlerzustand (4)** gegangen. Im Fehlerzustand wird die Übertragung als gescheitert angesehen und eine zufällige Anzahl Schritte verblieben, bis in den Ruhezustand gewechselt wird und eine neue Übertragung beginnen kann.

Eine neue Übertragung beginnt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2; eine Bestätigung wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,7 empfangen. Eine wiederholte Sendung einer Nachricht vom Zustand 3 aus erfolgt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1. Die Wahrscheinlichkeit im Fehlerzustand zu verbleiben beträgt 0,6.

a) Modellieren Sie das Protokoll als homogene Markoffkette, zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen und geben Sie die Übergangsmatrix an.

b) Gerade wurde eine Nachricht gesendet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit nach zwei Schritten wieder im Ruhezustand zu sein?

c) Gerade wurde eine Nachricht gesendet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit innerhalb von maximal drei Schritten zum ersten mal wieder im Ruhezustand anzukommen?

d) Es soll die mittlere Paketrate bestimmt werden: Wie viele Zeitschritte vergehen im Mittel, bis das System den Ruhezustand wieder erreicht, nachdem er zwischenzeitlich zum Senden einer Nachricht verlassen wurde.