Wahrscheinlichkeitstheorie – Lösungen zu Übung 7

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 27

Gegeben seien die beiden stochastischen Prozesse

$$X(\omega,t) = A(\omega)\cdot\big[1+\cos(2\pi f_0 t + \Psi(\omega))\big] \text{ und}$$
$$Y(\omega,t) = A(\omega)\cdot\big[1+\sin(2\pi f_0 t + \Psi_Y(\omega))\big],$$

wobei $f_0 \in \mathbb{R}$ konstant sei. Die Zufallsvariablen A und Ψ bzw. Ψ_Y seien stochastisch unabhängig. Ψ, Ψ_Y seien im Intervall $[-\pi,\pi)$ gleichverteilt, A sei normalverteilt mit dem Erwartungswert Null und der Varianz σ^2.

a) Man bestimme die Autokorrelationsfunktion und die spektrale Leistungsdichte des Prozesses $X(t)$.

Lösung

a) Es gilt $\omega_0 = 2\pi f_0$.

$$\begin{aligned}\varphi_{XX}(t_1,t_2) &= E\big(X(t_1)X(t_2)\big) = E\Big(A\big(1+\cos(\omega_0 t_1+\Psi)\big)A\big(1+\cos(\omega_0 t_2+\Psi)\big)\Big)\\ &\overset{\substack{A,\Psi\\ \text{unabh.}}}{=} E\left(A^2\right)\Big[\underbrace{E\big(\cos(\omega_0 t_1+\Psi)\big)}_{(1)}+\underbrace{E\big(\cos(\omega_0 t_2+\Psi)\big)}_{(2)}+\underbrace{E\big(\cos(\omega_0 t_1+\Psi)\cos(\omega_0 t_2+\Psi)\big)}_{(3)}+1\Big]\end{aligned}$$

(1) $E\big(\cos(\omega_0 t_1+\Psi)\big) \overset{\Psi\sim\mathcal{U}[-\pi;\pi)}{=} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\omega_0 t_1+\varphi)\frac{1}{2\pi}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\Big[\sin(\omega_0 t_1+\varphi)\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0$

(2) $E\big(\cos(\omega_0 t_2+\Psi)\big) \overset{(1)}{=} 0$

(3) $$\begin{aligned}E\big(\cos(\omega_0 t_1+\Psi)\cos(\omega_0 t_2+\Psi)\big) &= \tfrac{1}{2}E\Big(\cos\big(\omega_0\underbrace{(t_1-t_2)}_{=:\tau}\big)\Big)+\tfrac{1}{2}\underbrace{E\Big(\cos\big(\omega_0(t_1+t_2)+2\Psi\big)\Big)}_{=0 \text{ analog zu } (1)}\\ &= \tfrac{1}{2}\cos(\omega_0\tau)\end{aligned}$$

Einsetzten in die Autokorrelationsfunktion ergibt:

$\varphi_{XX}(t_1,t_2) = \varphi_{XX}(t_1,t_1-\tau) = \varphi_{XX}(\tau) = \sigma^2\left(1+\tfrac{1}{2}\cos(\omega_0\tau)\right)$

$\Rightarrow E\big(X(t)\big) = E(A)\cdot(\ldots) = 0 \quad\Rightarrow\quad X(t)$ stationär $\quad\Rightarrow\quad \Phi_{XX}(f)$ existiert

Das Leistungsdichtespektrum ist die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion.

$$\varphi_{XX}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \Phi_{XX}(f) = \sigma^2\left(\delta(f)+\frac{1}{4}\delta(f-f_0)+\frac{1}{4}\delta(f+f_0)\right)$$

Aufgabe 28

Am Eingang eines LTI-Systems mit der Impulsantwort $h(t) = \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$ für $t \geq 0$; $T > 0$ wird ein komplexwertiger weißer Gaußscher Rauschprozess $X(t)$ angelegt.

a) Man bestimme das Leistungsdichtespektrum und die mittlere Leistung des Ausgangsprozesses $Y(t)$.

b) Man bestimme die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen $Y(t_1)$ und $Y(t_2)$ mit $t_1 = 0$ und $t_2 = 2T$.

Lösung

a) Eigenschaften des weißen Gaußschen Rauschprozesses $X(t) \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$ und $\varphi_{XX}(\tau) = N_0\delta(\tau)$. Der Ausgang des Systems ergibt sich aus

$$Y(t) = X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(v)X(t-v)\,\mathrm{d}v$$

Autokorrelationsfunktion am Ausgang und Untersuchung auf Stationarität:

$$\begin{aligned}
E\big(Y(t)\big) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(v)\underbrace{E\big(X(t-v)\big)}_{=0}\,\mathrm{d}v = 0\\
\varphi_{YY}(t, t-\tau) &= E\big(Y(t)\,Y^*(t-\tau)\big)\\
&= E\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\,X(t-\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\beta)\,X^*(t-\tau-\beta)\,\mathrm{d}\beta\right)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\,h^*(\beta)E\big(X(t-\alpha)\,X^*(t-\tau-\beta)\big)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\,h^*(\beta)\cdot\varphi_{XX}(\tau+\beta-\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\,h^*(\alpha-\underbrace{(\alpha-\beta)}_{v})\,\mathrm{d}\alpha\right]\varphi_{XX}\big(\tau-\underbrace{(\alpha-\beta)}_{v}\big)\,\mathrm{d}v\\
&= \big(h(\tau) * h^*(-\tau)\big) * \varphi_{XX}(\tau)
\end{aligned}$$

Damit ist $Y(t)$ stationär und es gilt

$$\begin{aligned}
\Phi_{YY}(f) &= H(f)\cdot H^*(f)\cdot\Phi_{XX}(f) = \Phi_{XX}(f)\cdot|H(f)|^2\\
&= N_0\cdot\left|\tfrac{1}{T}+j2\pi f\right|^{-2} = \frac{N_0T^2}{1+(2\pi fT)^2}
\end{aligned}$$

Berechnung der mittleren Leistung:

$$\begin{aligned}
\varphi_{YY}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\,h^*(\alpha-v)\,\mathrm{d}\alpha\right]\cdot N_0\,\delta(0-v)\,\mathrm{d}v\\
&= N_0\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|h(\alpha)|^2\,\mathrm{d}\alpha = \int_0^{\infty}\exp\left(-\tfrac{2}{T}\alpha\right)\,\mathrm{d}\alpha\\
&= N_0\left[-\tfrac{T}{2}\exp\left(-\tfrac{2}{T}\alpha\right)\right]_0^{\infty} = \tfrac{T}{2}N_0
\end{aligned}$$

Alternativer Rechenweg mittels Parseval'sches Theorem:

$$\begin{aligned}
\varphi_{YY}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{YY}(f)\,\mathrm{d}f = N_0T^2\left[\frac{1}{2\pi T}\arctan(2\pi Tf)\right]_{-\infty}^{\infty}\\
&= \frac{N_0T}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \tfrac{T}{2}N_0
\end{aligned}$$

b) Da $Y(t)$ und $X(t)$ linear zusammenhängen, ist $Y(t)$ komplex normalverteilt. Eine 2D-Normalverteilung ist bestimmt durch die Erwartungswerte und Varianzen der Komponenten sowie deren Korrelationskoeffizient.

Allgemein gilt:

$$f(x_{t_1}, x_{t_2}) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right)$$

Wegen $E\big(Y(t)\big) = 0$ ist $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Für die anderen Parameter wird die Autokorrelationsfunktion am Ausgang benötigt:

$$\Phi_{YY}(f) = \tfrac{T}{2}N_0 \, \frac{2T^{-1}}{T^{-2} + (2\pi f)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \varphi_{YY}(\tau) = \tfrac{T}{2}N_0 \, e^{-\frac{|\tau|}{T}}$$

Damit ist $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \varphi_{YY}(0) - \mu_1^2 = \frac{T}{2}N_0$. Mit $\tau = t_1 - t_2 = -2T$ folgt

$$\rho = \frac{c_{YY}(t_1, t_2)}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{\varphi_{YY}(\tau) - \mu_1\mu_2}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{\varphi_{YY}(-2T)}{\sigma^2} = \frac{\frac{T}{2}N_0 \, e^{-\frac{|-2T|}{T}}}{\frac{T}{2}N_0} = e^{-2}$$

Insgesamt gilt:

$$\begin{aligned} f(x_0, x_{2T}) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \, \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \frac{x_0^2 + x_{2T}^2 - 2\rho x_0 x_{2T}}{\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{\pi N_0 T\sqrt{1-e^{-4}}} \, \exp\left(-\frac{x_0^2 + x_{2T}^2 - 2e^{-2}x_0 x_{2T}}{N_0 T(1-e^{-4})}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 29

Es sei bekannt, dass die Anzahl $X(t)$ der Störungen in einem Rechnernetz im Intervall $[0,t)$ einem Poissonprozess mit der mittleren Ankunftsrate $\lambda = 0{,}25$ [h^{-1}] folgt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt in den ersten 8 Stunden höchstens eine Störung auf?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Rechnernetz (danach) 10 Stunden ohne Störung funktioniert?

c) Die Folge von Zufallsvariablen T_n $(n = 1,2,3,\ \ldots)$, beschreibt den zufälligen Zeitpunkt, an dem die n-te Störung stattfindet. Man berechne die Dichte von T_n.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt die dritte Störung nach 8 Stunden auf?

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trat in den ersten zwei Stunden genau eine Störung auf, wenn nach 8 Stunden genau drei aufgetreten sind?

Lösung

a) Gegeben ist $X(0) = 0$ und $\lambda = \frac{1}{4}$; Gesucht ist $P\big(X(8) \leq 1\big)$

$$\begin{aligned}
P\big(X(8) = k\big) &= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \frac{2^k}{k!} e^{-2} \\
P\big(X(8) \leq 1\big) &= P\big(X(8) = 0\big) + P\big(X(8) = 1\big) \\
&= \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!}\right) e^{-2} = 3e^{-2} \approx 0{,}406
\end{aligned}$$

b) Es ist unerheblich, ob Störungen in $[8;18]$ oder $[0;10]$ gezählt werden:

$$\begin{aligned}
P\big(X(18) = k \mid X(8) = k\big) &= P\big(X(18-8) = k-k\big) \\
&= P\big(X(10) = 0\big) = \frac{2{,}5^0}{0!} e^{-2{,}5} \approx 0{,}082
\end{aligned}$$

Alternativer Rechenweg über Zwischenankunftszeit T mit $F_T(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$:

$$P(T > 10) = 1 - F_T(10) = \exp(\tfrac{1}{4} \cdot 10) = e^{-2{,}5} \approx 0{,}082$$

c) Vorgehen: Verteilungsfunktion von T_n aus den Zählerständen $X(t)$ bestimmen, danach die Dichte berechnen.

(1) Die n-te Störung ist genau dann im Intervall $[0;t]$ aufgetreten, wenn der Zählerstand $X(t)$, also die Anzahl Störungen in diesem Intervall, n oder mehr beträgt: Ermittlung der Verteilungsfunktion:

$$F_{T_n}(t) = P(T_n \leq t) = P\big(X(t) \geq n\big) = \sum_{k=n}^{\infty} P\big(X(t) = n\big) = e^{-\lambda t} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\, t^k$$

(2) Berechnung der Dichte:

$$\begin{aligned}
f_{T_n}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{T_n}(t) &= -\lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\, t^k \ + \ e^{-\lambda t} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\, k t^{k-1} \\
&= \lambda e^{-\lambda t} \left[-\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\, t^k \ + \ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\, t^{k-1} \right] \\
&= \lambda e^{-\lambda t} \left[\sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right] \\
&= \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \qquad \Rightarrow \text{Erlang-Verteilung (der Ordnung n)}
\end{aligned}$$

d) Verwendung der Erlang-Verteilung:

$$\begin{aligned} P(T_3 > 8) &= \int_8^\infty \tfrac{1}{4} \frac{(\frac{t}{4})^2}{2!} e^{-\frac{t}{4}}\, \mathrm{d}t \\ &= \tfrac{1}{128} \int_8^\infty t^2 e^{-\frac{t}{4}}\, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{128} \left[\frac{e^{-\frac{t}{4}}}{-1/64} \left(\frac{t^2}{16} + \frac{2t}{4} + 2 \right) \right]_8^\infty \\ &= 0 + \tfrac{1}{2} e^{-2} [4 + 4 + 2] = 5e^{-2} \approx 0{,}677 \end{aligned}$$

Alternativer Rechenweg:

$$P(T_3 > 8) = 1 - F_{T_3}(3) = P\big(X(8) < 3\big) = e^{-2} \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} \right) = 5e^{-2}$$

e) Gesucht ist $P\big(X(2) = 1 \,\big|\, X(8) = 3\big)$. Für $t_1 < t_2$ und $k < n$ gilt

$$\begin{aligned} P\big(X(t_1) = k \mid X(t_2) = n\big) &= \frac{P\big(X(t_1) = k \;\wedge\; X(t_2) = n\big)}{P\big(X(t_2) = n\big)} = \frac{P\big(X(t_1) = k\big)\; P\big(X(t_2 - t_1) = n - k\big)}{P\big(X(t_2) = n\big)} \\ &= \frac{\frac{(\lambda t_1)^k}{k!} e^{-\lambda t_1} \;\cdot\; \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{(n-k)}}{(n-k)!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}}{\frac{(\lambda t_2)^n}{n!} e^{-\lambda t_1}} = \binom{n}{k} \left(\tfrac{t_1}{t_2}\right)^k \left(1 - \tfrac{t_1}{t_2}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Hier gilt $t_1/t_2 = \frac{1}{4}$. Damit ist $P\big(X(2) = 1 \,\big|\, X(8) = 3\big) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64} \approx 0{,}422$

Zusatzmaterial

Poissonprozess: Pfade für verschiedene Raten

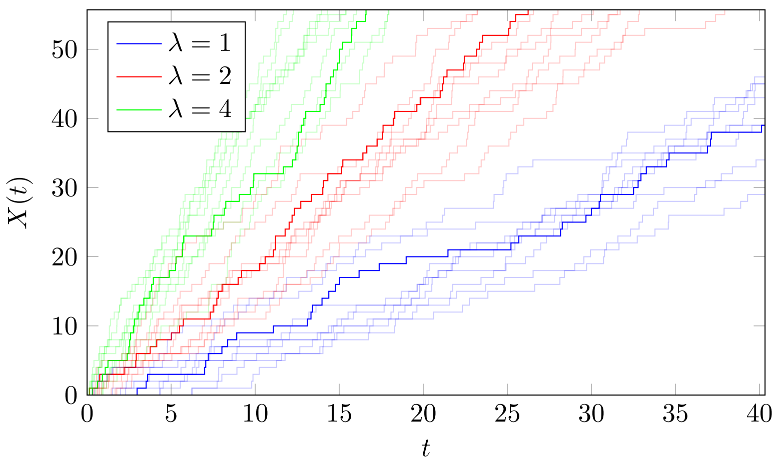


Abbildung 30: Pfade eines Poissonprozesses $X(t)$ für verschiedene mittlere Ankunftsraten λ

d) Pfade eines bedingten Poissonprozesses

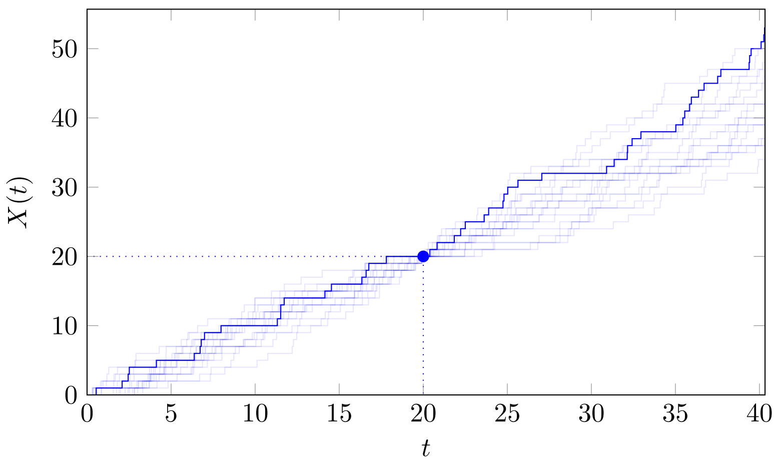


Abbildung 31: Pfade eines Poissonprozesses $X(t)$ mit $\lambda = 1$ und $X(20) = 20$

Aufgabe 30

Die Abbildung unten zeigt den Übergangsgraph einer homogenen Markoffkette $X(n)$.

a) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix $\mathbf{P}$ an.

b) Im n-ten Zeitschritt gilt für die Zustandsverteilung $\vec{p}^T(n) = (\,0{,}5 \quad 0{,}25 \quad 0{,}25\,)$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich der Prozess zwei Schritte später nicht im zweiten Zustand?

Gesucht wird die stationäre Verteilung $\vec{p}$, für die Gleichung $\vec{p}^T = \vec{p}^T\mathbf{P}$ gilt.

c) Man beschreibe diesen Zusammenhang als Eigenwertproblem und zeige die Existenz des zugehörigen Eigenwerts.

d) Wie groß ist die stationäre Verteilung $\vec{p}$?

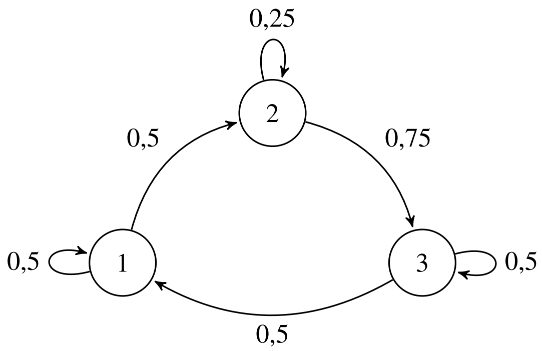


Abbildung 32: Übergangsgraph einer homogenen Markoffkette

Lösung

a) Der Eintrag in Zeile i und Spalte j ist die Übergangswahrscheinlichkeit $p_{ij} = P\big(X(n+1) = j \mid X(n) = i\big)$, d.h. die Wahrscheinlichkeit vom Zustand i in den Zustand j zu wechseln.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Gegeben ist $\vec{p}^T(n) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Gesucht ist $p_b = P\big(X(n+2) \neq 2\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{p}(n{+}2)$.

$$\begin{aligned} \vec{p}^T(n{+}2) &= \vec{p}^T(n) \cdot \mathbf{P}^2 \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 6 & 1 & 9 \\ 8 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 22 & 17 & 25 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 0{,}3438 & 0{,}2656 & 0{,}3906 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $p_b = \frac{22+25}{64} \approx 0{,}7344$.

c) Das Eigenwertproblem ist $\mathbf{P}^T\vec{p} = \lambda\vec{p}$ mit dem stochastischen Eigenvektor $\vec{p}$ zum Eigenwert $\lambda = 1$. Für die Existenz muss $\lambda = 1$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $g(\lambda) = \det(\mathbf{P}^T - \lambda E_3)$ sein, d.h. zu zeigen ist $g(1) = 0$.

$$g(1) = \begin{vmatrix} -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}75 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & -0{,}5 \end{vmatrix} \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \overset{!}{=} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-12) + 12 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \text{ ist Eigenwert} \qquad \square$$

d) Gesucht die nicht-triviale Lösung von $(\mathbf{P}^T - \lambda E_3)\vec{p} = \vec{0}$ mit $\|\,\vec{p}\,\|_1 = 1$.

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow p_1 = p_3 = c \\ \\ \Rightarrow p_2 = \frac{2}{3}p_3 = \frac{2}{3}c \end{array} \qquad \Rightarrow \vec{p}^T = \begin{pmatrix} c & \frac{2}{3}c & c \end{pmatrix}$$

$$\|\,\vec{p}\,\|_1 = c(1 + \tfrac{2}{3} + 1) \stackrel{!}{=} 1 \qquad \Rightarrow c = \tfrac{3}{8}$$

Die gesuchte stationäre Verteilung ist $\vec{p}^T = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}375 & 0{,}25 & 0{,}375 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 31

Für die Übermittlung von Nachrichten werde folgendes Protokoll verwendet:

Am Anfang ist das System im **Ruhezustand (1)**. Sobald eine Nachricht gesendet wurde, wird in den **Wartezustand (2)** gewechselt. Trifft im nächsten Schritt eine Bestätigung der gesendeten Nachricht ein, ist der Vorgang abgeschlossen und es wird zurück in den Ruhezustand gewechselt. Trifft keine Bestätigung ein, wird in den nächsten **Zustand (3)** gewechselt. Von diesem aus wird entweder, nach erneuter Sendung, zurück in den Wartezustand, nach Erhalt einer Bestätigung, in den Ruhezustand oder, beim Ausbleiben einer Bestätigung, in den **Fehlerzustand (4)** gegangen. Im Fehlerzustand wird die Übertragung als gescheitert angesehen und eine zufällige Anzahl Schritte verblieben, bis in den Ruhezustand gewechselt wird und eine neue Übertragung beginnen kann.

Eine neue Übertragung beginnt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2; eine Bestätigung wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,7 empfangen. Eine wiederholte Sendung einer Nachricht vom Zustand 3 aus erfolgt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1. Die Wahrscheinlichkeit im Fehlerzustand zu verbleiben beträgt 0,6.

a) Modellieren Sie das Protokoll als homogene Markoffkette, zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen und geben Sie die Übergangsmatrix an.

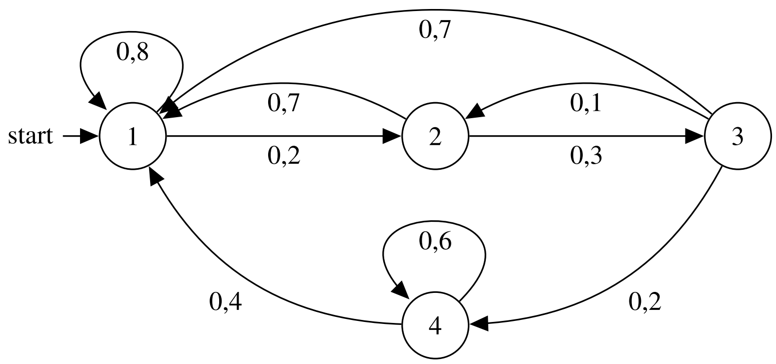
b) Gerade wurde eine Nachricht gesendet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit nach zwei Schritten wieder im Ruhezustand zu sein?

c) Gerade wurde eine Nachricht gesendet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit innerhalb von maximal drei Schritten zum ersten mal wieder im Ruhezustand anzukommen?

d) Es soll die mittlere Paketrate bestimmt werden: Wie viele Zeitschritte vergehen im Mittel, bis das System den Ruhezustand wieder erreicht, nachdem er zwischenzeitlich zum Senden einer Nachricht verlassen wurde.

Lösung

a) Übergangsgraph:



Übergangsmatrix:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

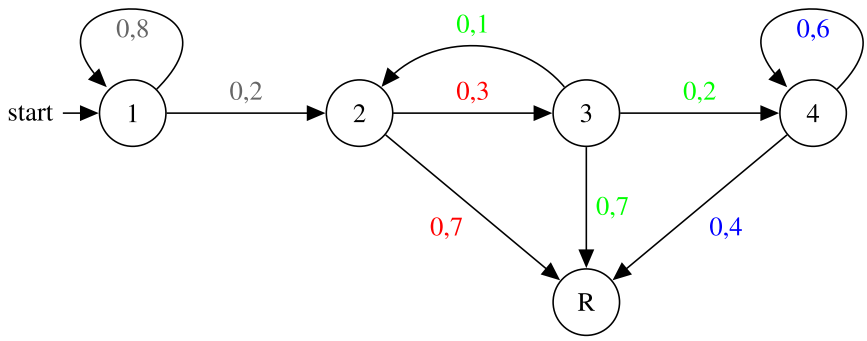
b) Gesucht ist $p_b = \left(\mathbf{P}^2\right)_{21}$. Anstatt die ganze Matrix zu berechnen, könne auch mögliche Wege von Zustand 2 zu Zustand 1 aus dem Graphen entnommen werden:

$$p_b = p_{21}p_{11} + p_{23}p_{21} = 0{,}77$$

c) $X(n) = 2$. Die k-Schritt Übergangswahrscheinlichkeiten können hier nicht verwendet werden, da diese auch ein Verweilen und zwischenzeitliches Verlassen des Zustands 1 enthalten. Daher auch wieder aus dem Graphen:

$$p_c = p_{21} + p_{23} \cdot (p_{31} + p_{32}\, p_{21} + p_{34}\, p_{41}) = 0{,}955$$

d) Übergangsgraph mit Ruhezustand:



$$m_i = 1 + \sum_{k=1}^{4} p_{ik}\, m_k$$

$$m_R = 0$$

$$m_4 = 1 + 0{,}4 m_R + 0{,}6 m_4$$

$$m_3 = 1 + 0{,}7 m_R + 0{,}2 m_4 + 0{,}1 m_2$$

$$m_2 = 1 + 0{,}7 m_R + 0{,}3 m_3$$

$$m_1 = 1 + 0{,}2 m_2 + 0{,}8 m_1$$

Auflösen des Gleichungssystems ergibt:

$$m_4 = \frac{1}{1 - 0{,}6} = 2{,}5$$

$$\begin{aligned} m_2 &= 1 + 0{,}3(1 + 0{,}2 \cdot 2{,}5 + 0{,}1 m_2) \\ &= \tfrac{29}{20} + \tfrac{3}{100} m_2 \quad \Rightarrow \quad m_2 = \tfrac{145}{97} = 1{,}495 \end{aligned}$$

$$m_1 = 1 + \tfrac{29}{97} + 0{,}8 m_1 = 5 + m_2 = 6{,}495$$

$$\left(\lambda = m_1^{-1} = 0{,}15\ \tfrac{\text{Pakete}}{\text{Schritt}}\right)$$

Zusammenfassung

- **Autokorrelationsfunktion** eines stochastischen Prozesses $X(t)$:

$$\varphi_{XX}(t_1, t_2) = E\Big(X(t_1)X^*(t_2)\Big) \tag{8.3-2}$$

- **Leistungsdichtespektrum** eines stationären Prozesses:

$$\Phi_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XX}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{(Def. 8.5-1)}$$

- (schwache) **Stationarität**:

$$\begin{aligned} E(X(t)) &= \text{const}(t) \\ \varphi_{XX}(t_1, t_2) &= \varphi_{XX}(\mathbf{t_1} - \mathbf{t_2}) = \varphi_{XX}(\tau) = \varphi_{XX}(t, t-\tau) \end{aligned} \qquad \text{(Def. 8.3-2)}$$

- $X(t)$, $Y(t)$ **gemeinsam stationär**: $X(t)$ stationär, $Y(t)$ stationär und

$$\varphi_{XY}(t_1, t_2) = \varphi_{XY}(\tau) = \varphi_{YX}(-\tau) \qquad \text{(Kap. 8.2)}$$

- **mittlere Leistung** $\overline{P}_X = \varphi_{XX}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{XX}(f)\,\mathrm{d}f$. (Kap. 8.2)

- **Poissonprozess** $X(t)$, $t \geq 0$ mit Intensität λ. Für $X(0) = 0$ gilt

$$P\big(X(t) = k\big) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \tag{9.2-1}$$

  Bedingte Wahrscheinlichkeiten: $t_2 \geq t_1, n \geq m$

  - Bedingung auf Vergangenes: Poissonverteilt

$$P\big(X(t_2) = n \mid X(t_1) = m\big) = P\big(X(t_2 - t_1) = n - m\big)$$

  - Bedingung auf Zukünftiges: Binomialverteilt

$$P\big(X(t_1) = m \mid X(t_2) = n\big) = \binom{n}{m}\left(\tfrac{t_1}{t_2}\right)^m\left(1 - \tfrac{t_1}{t_2}\right)^{n-m}$$

  Ankunftszeiten T_n Erlangverteilt (Ordnung n)

  Zwischenankunftszeiten T Exponentialverteilt (9.2-4)

- **homogene Markoffketten** werden durch eine **Übergangsmatrix** P beschrieben:

$$\vec{p}^T(t+k) = \vec{p}^T(t) \cdot \mathbf{P}^k \tag{9.3-4}$$

  Mittlere Dauer einer Irrfahrt bis zur Absorption im Rand ($m_R = 0$):

$$m_i = 1 + \sum_{k=1}^{N} p_{ik}m_k \tag{9.3-7}$$

  Stationäre Verteilung: Stochastischer Eigenvektor $\vec{p}$ zum Eigenwert $\lambda = 1$ in $\mathbf{P}^T\vec{p} = \lambda\vec{p}$:

$$(\mathbf{P}^T - \lambda E_N) \cdot \vec{p} = \vec{0}$$