A Kombinatorik

A Begriffe aus der Kombinatorik

Eine **Permutation** π_N ist eine Anordnung von N Elementen in einer bestimmten Reihenfolge.

Beispiel: Sitzordnung in einer Klasse.

Die Anzahl $|\pi_N|$ der Permutationen N **verschiedener** Elemente ist $|\pi_N| = N!$

A Begriffe aus der Kombinatorik

Sind von den N Elementen K ($<$N) gleich **(Permutation mit Wiederholung)**,

folgt $|\pi_N^{(K)}| = \dfrac{N!}{K!}$

Beispiel: 16 Stühle werden mit je einer Tasche belegt. 4 der 16 Taschen sind gleich

$$\Rightarrow |\pi_{16}^{(4)}| = \frac{16!}{4!} \approx 8,7 \cdot 10^{11}$$

Lassen sich die N Elemente in M Gruppen mit $K_1, K_2, \ldots K_M$ Elementen

$\left(\sum_{m=1}^{M} K_m = N\right)$ einteilen, folgt $\left|\pi_N^{(K_1, K_2, \ldots, K_M)}\right| = \dfrac{N!}{K_1!\, K_2! \ldots K_M!}$

Beispiel: Aus den Ziffern 4, 4, 5, 5, 5 können

$\left|\pi_5^{(2,3)}\right| = \dfrac{5!}{2!3!} = 10$ verschiedene fünfstellige Zahlen gebildet werden.

A Begriffe aus der Kombinatorik

Eine **Kombination ohne Wiederholung** $C_N^{(K)}$ ist eine Auswahl von K Elementen aus N Elementen ohne Beachtung der Reihenfolge.

$$\left|C_N^{(K)}\right| = \binom{N}{K}, \; K < N$$

Beispiel: Beim Lotto können $\binom{49}{6}$ Zahlenkombinationen auftreten.

Die Anzahl $\left|\tilde{C}_N^{(K)}\right|$ der Möglichkeiten, aus N verschiedenen Elementen je K zusammenzustellen, wobei die K Elemente nicht verschieden sein müssen, **(Kombination mit Wiederholung)** ist: $\left|\tilde{C}_N^{(K)}\right| = \binom{N+K-1}{K}$

Beispiel: Mit K Würfeln sind $\left|\tilde{C}_6^{(K)}\right| = \binom{6+K-1}{K}$ verschiedene Würfe möglich.

A Begriffe aus der Kombinatorik

Eine **Variation** $V_N^{(K)}$ ist eine Auswahl von K aus N Elementen unter Beachtung der Reihenfolge.

$$\left|V_N^{(K)}\right| = K!\binom{N}{K}$$

Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einem Verein mit 30 Mitgliedern einen Vorstand mit 1 Vorsitzenden, 1 Stellvertreter, 1 ersten und 1 zweiten Beisitzer zu wählen?

$$4!\binom{30}{4} = 657720$$

Wenn von den N Elementen einzelne mehrfach auftreten dürfen, ergibt sich eine Variation mit Wiederholung $V_N^{(K)}$.

$$\left|V_N^{(K)}\right| = N^K$$

Beispiel: Mit einem Byte (8 bit) sind $2^8 = 256$ Zeichen darstellbar.

A Begriffe aus der Kombinatorik

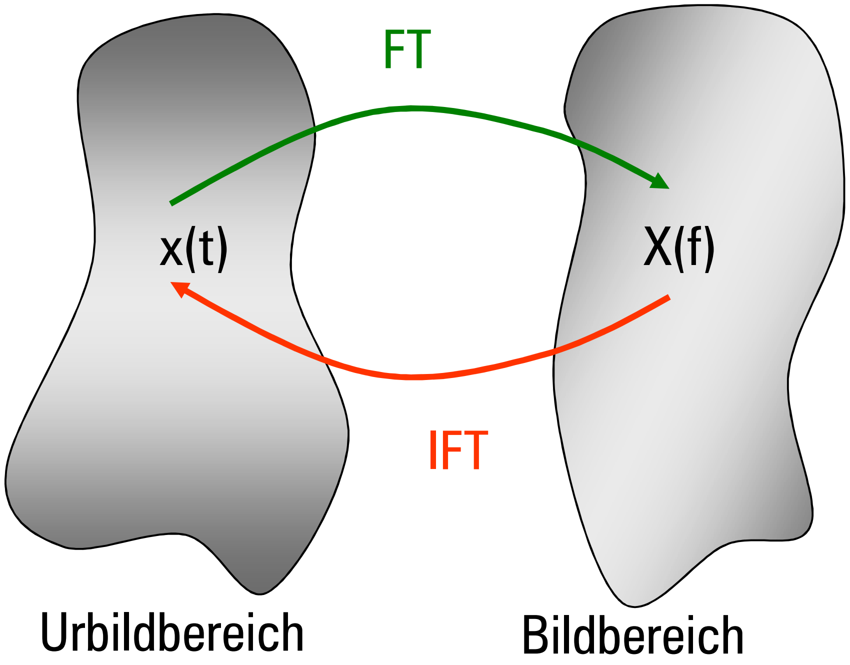
Art der Auswahl von K aus N Elementen

	Permutationen	Kombinationen	Variationen
ohne Wiederholung	$N!$	$\binom{N}{K}$	$K!\binom{N}{K}$
mit Wiederholung	$\frac{N!}{K!}$	$\binom{N+K-1}{K}$	N^K

Bild A-1: Kombinatorik, Anzahl der Möglichkeiten

B Die Fouriertransformation (FT)

B Die Fouriertransformation (FT)



Definition:

Für die integrierbare Funktion x(t) ist durch

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

deren **Fouriertransformierte** gegeben.

Die FT ordnet jeder Funktion aus dem Urbildbereich umkehrbar eindeutig eine Funktion aus dem Bildbereich zu.

Bemerkungen:

i. Man schreibt $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(f)$.

ii. Die FT kann auf quadratintegrable Funktionen und auch auf Distributionen erweitert werden. **Formal** gilt in jedem Fall die Definitionsgleichung.

Die inverse Fouriertransformation (IFT) $X(f) \bullet\!\!-\!\!\circ x(t)$ ist durch

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

definiert.

B Die Fouriertransformation (FT)

Rechenregeln der FT:

1. Linearität $$\sum_{n=1}^{N} c_n x_n(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{n=1}^{N} c_n X_n(f)$$

2. Konjugiert komplexe Signale $$x^*(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X^*(-f)$$

3. Symmetrieeigenschaften $$x(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(-f)$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\{x(t)\} \quad \text{gerade} &&\Leftrightarrow \mathrm{Re}\{X(f)\} \quad \text{gerade}\\
&\mathrm{Re}\{x(t)\} \text{ ungerade} &&\Leftrightarrow \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ ungerade}\\
&\mathrm{Im}\{x(t)\} \quad \text{gerade} &&\Leftrightarrow \mathrm{Im}\{X(f)\} \quad \text{gerade}\\
&\mathrm{Im}\{x(t)\} \text{ ungerade} &&\Leftrightarrow \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ ungerade}
\end{aligned}$$

4. Maßstabsänderung, Skalierung $$x(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right), \; a \in \mathbb{R}, \; a > 0$$

B Die Fouriertransformation (FT)

5. Zeitverschiebung $$x(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

6. Modulation $$e^{j2\pi f_0 t} x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; X(f-f_0)$$

7. Diff' der Zeitfunktion $$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \circ\!\!-\!\!\bullet\; (j2\pi f)^n X(f)$$

8. Diff' der Fouriertransformierten $$(-j2\pi f)^n x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{d^n X(f)}{df^n}$$

9. Int' der Zeitfunktion $$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$$

10. Faltungssätze $$x_i(t) \in L^2; \quad i=1,\, 2:$$

$$x_1(t) * x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; X_1(f) \cdot X_2(f) \qquad (B-3)$$

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; X_1(f) * X_2(f)$$

B Die Fouriertransformation (FT)

Für quadratintegrable Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ (Energiesignale) ist die **Faltung** erklärt durch

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau)\, d\tau$$

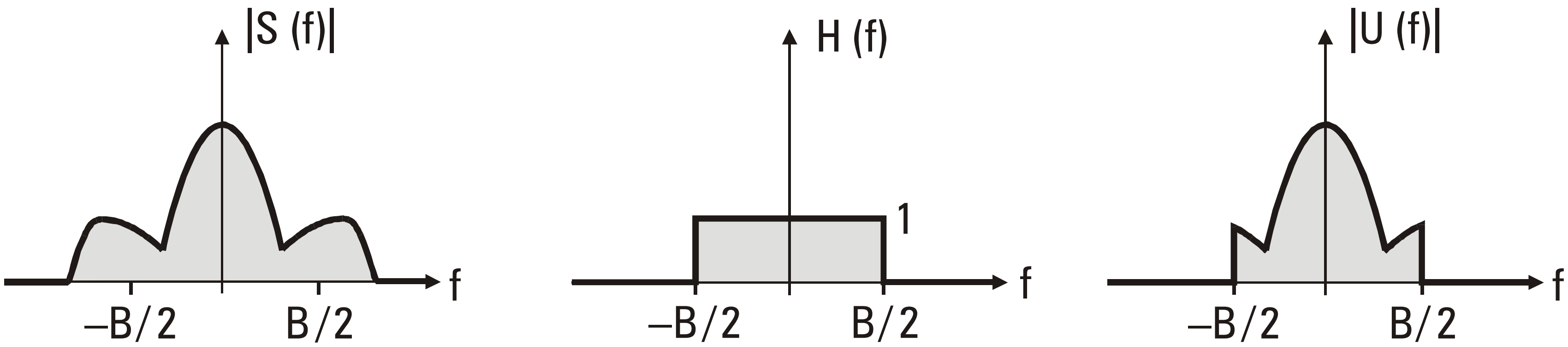
Nun sei $s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet S(f)$ gegeben, wobei s(t) ein Zeitsignal sei.

Die Fouriertransformierte

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |f| \leq B/2 \\ 0 & \text{für} \quad |f| > B/2 \end{cases}$$

charakterisiert einen idealen Tiefpass (TP). Mit dem Faltungssatz (B-3) folgt:

$$S(f) \cdot H(f) = U(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\; u(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$$



Frequenzbereich	$S(f) \cdot H(f) = U(f)$
	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \bullet\!\!-\!\!\circ$
Zeitbereich	$s(t) * h(t) = u(t)$

Bild B-1: Idealer Tiefpass

B Die Fouriertransformation (FT)

$$G(f) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad f_0 - B/2 \leq |f| \leq f_0 + B/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

charakterisiert einen idealen Bandpass (BP).

C Die δ-Distribution

C Die δ-Distribution

$\delta(\vec{x})$ ist die Distribution, die einem Punkt $\vec{x}=(x_1, x_2, ..., x_N)^T \in \mathbb{R}^N$ die Masse 1 zuordnet, d.h. es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^N} \delta(\vec{x})d\vec{x} = 1. \qquad \text{(C-1)}$$

Die δ-Distribution ist ein stetiges lineares Funktional, das jeder Funktion $\varphi(\vec{x})$ seines Definitionsbereiches gemäß

$$\int_{\mathbb{R}^N} \delta(\vec{x})\varphi(\vec{x})d\vec{x} = \varphi(\vec{0}) \qquad \text{(C-2)}$$

ihren Wert im Ursprung zuordnet.

C Die δ-Distribution

Die δ-Distribution erfüllt die Gleichungen

$$\int_{\mathbb{R}^N} \delta(\vec{x}-\vec{x}_0)\ \varphi(\vec{x})\,d\vec{x} = \int_{\mathbb{R}^N} \delta(\vec{x})\ \varphi(\vec{x}+\vec{x}_0)\,d\vec{x} \tag{C-3}$$

$$= \varphi(\vec{x}_0) \qquad \forall \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^N$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \delta(a\vec{x})\ \varphi(\vec{x})\,d\vec{x} = \frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}^N} \delta(\vec{x})\ \varphi\left(\frac{\vec{x}}{a}\right)d\vec{x} \tag{C-4}$$

$$= \frac{1}{|a|}\varphi(\vec{0}),\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

C Die δ-Distribution

Bemerkungen:

i. Über die Forderungen, die die Funktion $\varphi(\vec{x})$ in (C-2) erfüllen muss, gibt die **Distributionentheorie** Auskunft. Hier wird davon ausgegangen, dass die verwendeten Funktionen $\varphi(\vec{x})$ so beschaffen sind, dass (C-2) gilt.

ii. Schreiben Sie (C-1) bis (C-4) für $N = 1$ auf und interpretieren Sie diese Gleichungen!

C Die δ-Distribution

N = 1:

$$\operatorname{rect}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad |x| > a/2 \\ 1 & \text{für} \quad |x| \leq a/2 \end{cases}, a \in \mathbb{R},\ a > 0$$

bildet für $a \to 0$ eine Folge rechteckiger Pulse (Bild C-1), mit denen sich $\delta(\vec{x})$ approximieren lässt:

$$\lim_{a \to 0} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \varphi(x)\,dx$$

$$= \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \varphi(x)\,dx$$

$$= \varphi(0) \overset{(C-2))}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx$$

C Die δ-Distribution

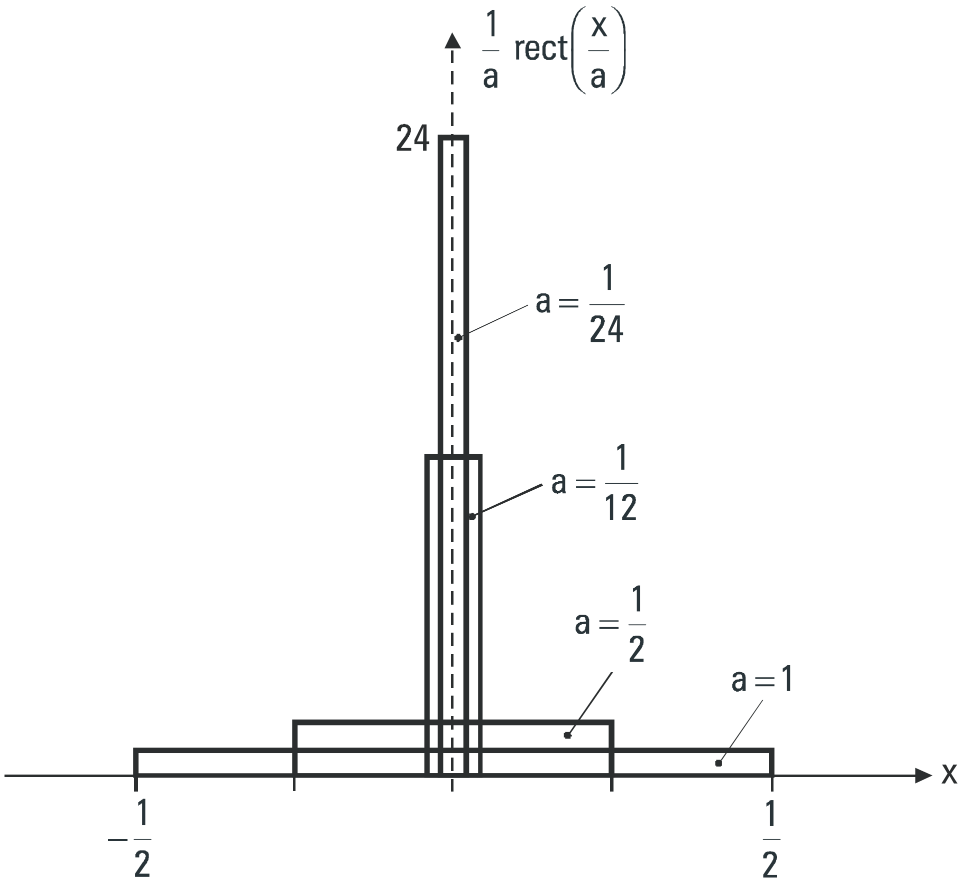


Bild C-1: Approximation der δ-Distribution durch Rechteckimpulse (N=1)