Wahrscheinlichkeitstheorie – Der Wahrscheinlichkeitsraum

Holger Jäkel

Communications Engineering Lab (CEL)

Übersicht

2 Der Wahrscheinlichkeitsraum

- Ereignisse
- Einschub: Kombinatorik
- Wahrscheinlichkeit nach Laplace
- Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff
- Lernziele
- Literatur

Referenz

- Folgende Diskussionen erfolgen gemäß[1]

[JW02]: F. Jondral, A. Wiesler, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse*, Teubner, 2002

[1] Von dort entstammt die Struktur der Folien, die Formeln und die meisten Bilder.

Motivation

- **Ziel:** Bestimmen einer „guten“ Beschreibung zufälliger Vorgänge, so dass ...
  - die Modelle möglichst einfach und nachvollziehbar bleiben
  - alle wesentlichen Aspekte erfasst werden
  - die Betrachtungen nicht zu Inkonsistenzen führen

Motivation

- **„Fahrplan“:**
  - Definition von Grundraum und Ereignissen
  - Kombinatorik
  - Betrachtung von (relativen) Häufigkeiten
  - Wahrscheinlichkeit nach Laplace
  - Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

Übersicht

2 Der Wahrscheinlichkeitsraum

- Ereignisse
- Einschub: Kombinatorik
- Wahrscheinlichkeit nach Laplace
- Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff
- Lernziele
- Literatur

Ereignisse

Definition

Ein *endlicher Ergebnisraum* wird durch eine nicht-leere Menge

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$$

beschrieben. Die Elemente $\omega_i \in \Omega$ heißen *Ergebnisse*; Teilmengen[2] $A \subset \Omega$ heißen *Ereignisse*.

Einelementige Teilmengen $\{\omega_i\}$ sind *Elementarereignisse*, Ω das *sichere Ereignis* und $\emptyset$ das *unmögliche Ereignis*.

---

[2]**Hinweis:** Die Mengen-Notation $A \subset B$ erlaubt $A = B$; soll $A = B$ ausgeschlossen werden, wird die Notation $A \subsetneq B$ verwendet.

Ereignisse

Definition

Ein *endliches Zufallsexperiment* wird charakterisiert durch die Ergebnismenge:

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$$

Ereignisse sind vorläufig alle möglichen Teilmengen, womit ein Zufallsexperiment beschrieben ist durch:

$$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$$

Ein Ereignis $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ist *eingetreten*, wenn das Ergebnis ω eines Zufallsexperiments in der Menge A ist, d. h. für das beobachtete Ergebnis $\omega \in A$ gilt.

Ereignisse

Hinweis

In Abweichung zu [JW02] verwendet die Vorlesung leicht abweichende Notation:

Die Elemente von Ω werden mit $\omega \in \Omega$ (anstelle von $\xi \in \Omega$) bezeichnet:

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$$

Dies ist in der Notation naheliegender und mit dem Großteil der Literatur zur Wahrscheinlichkeitstheorie konsistent.

Ereignisse

- **Beispiele:**
  - Der Würfelwurf mit zwei verschieden-farbigen[3] Würfeln wird beschrieben durch:

    $$\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,\ldots,6\}\}$$

    Das Ereignis „Augensumme ist 4“ entspricht:

    $$A = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$$

  - Das Ergebnis einer Lotto-Ziehung[4] (ohne Zusatzzahl) besitzt den Ergebnisraum

    $$\Omega = \{A \subset \{1,2,\ldots,49\} : |A| = 6\}$$

[3] In Bälde wird der Zusatz „verschieden-farbig“ klar werden.
[4] ... hierbei werden 6 Zahlen aus 49 möglichen Zahlen gezogen...

Ereignisse

- **Beispiele:** (ctd.)
  - Die Verteilung von N Wählern auf N_{P} Parteien wird repräsentiert durch das Modell:

    $$\Omega = \{(i_1, i_2, \ldots, i_{N_{\mathrm{P}}}) : i_1, i_2, \ldots, i_{N_{\mathrm{P}}} \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}, \\ i_1 + i_2 + \cdots + i_{N_{\mathrm{P}}} = N\}$$

    Das Ereignis „Partei 1 erhält mindestens 30%“ entspricht:

    $$A = \{(i_1, i_2, \ldots, i_{N_{\mathrm{P}}}) \in \Omega : i_1 \geq 0.3 \cdot N\}$$

    Die Ereignis „Die drei ersten Parteien erhalten über 50%“ ist unmöglich:

    $$A = \{(i_1, i_2, \ldots, i_{N_{\mathrm{P}}}) \in \Omega : i_1 \geq 0.5 \cdot N, i_2 \geq 0.5 \cdot N, i_3 \geq 0.5 \cdot N\}\} = \emptyset$$

Ereignisse

- **Bemerkung:**
  - Ereignisse gruppieren günstige/gültige Ergebnisse hinsichtlich einer bestimmten Fragestellung.
  - Nach Definition sind alle Teilmengen von Ω mögliche Ereignisse. Die Menge aller Ereignisse ist somit die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$. Bald wird sich zeigen, dass dieser Ansatz nicht immer sinnvoll/möglich ist.

  - Oft sind Vorgänge gar nicht von sich aus zufällig, sondern werden mangels Kenntnis so modelliert.
    - Es wird (hoffentlich) keine Person die Wahl einer Partei durch Zufall entscheiden.
    - Das Ergebnis des Würfelwurfs kann evtl. berechnet werden, sofern Abwurfwinkel, Abwurfgeschwindigkeit, Drehmoment, Oberflächen, Luftdruck, ... bekannt sind.

Erinnerung: Rechnen mit Mengen

- **Vereinbarung:**
  - Sofern nicht anders gesagt sind im Folgenden $A, B, C, A_t \subset \Omega$

- **Grundoperationen:**
  - Durchschnitt
    $$A \cap B = AB = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$$
  - Vereinigung
    $$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$$
  - Komplementbildung
    $$\overline{B} = B^{\mathrm{c}} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin B\}$$
  - Differenz
    $$A \setminus B = A\overline{B} = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$$
  - Mächtigkeit
    $$|A| = \text{ Anzahl der Element von } A$$

Erinnerung: Rechnen mit Mengen

- **Eigenschaften:**[5]

$$A \cup A = A; \quad A \cup \Omega = \Omega; \quad A \cup \emptyset = A; \quad A \cup B = B \cup A$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$$

$$A \cap A = A; \quad A \cap \Omega = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset; \quad A \cap B = B \cap A$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$$

[5] **Übung:** Rechnen Sie die Aussagen unter Verwendung der Definitionen nach.

Erinnerung: Rechnen mit Mengen

- **Eigenschaften:** (ctd.)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\bigcup_{t \in T} A_t} = \bigcap_{t \in T} \overline{A_t}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\bigcap_{t \in T} A_t} = \bigcup_{t \in T} \overline{A_t}$$

Ereignisse

- Rechnen mit Ereignissen: ($A, B, C \subset \Omega$)
  - A ist ein *Teilereignis* von B, falls

$$A \subset B$$

  - Das *entgegengesetzte* oder *komplementäre Ereignis* zu A ist

$$\overline{A} = A^{\mathrm{c}} = \Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$$

  - Ereignisse A, B heißen *disjunkt* oder *unvereinbar*, falls

$$AB = \emptyset$$

  - A heißt *zerlegbar*, falls

$$A = B \cup C, \qquad B \cap C = \emptyset$$

Ereignisse

- **Bemerkung**
  - Der Bergriff der Zerlegbarkeit ist obsolet, falls alle Teilmengen Ereignisse sind. In diesem Fall ist jedes Ereignis zerlegbar, sofern es kein Elementarereignis ist.
  - Der Begriff ist dennoch nützlich, da
    - später Situationen auftreten werden, in denen nicht alle Teilmengen Ereignisse sind.
    - durch die Zerlegung u.U. die Rechnung vereinfacht werden kann.

Übersicht

2 Der Wahrscheinlichkeitsraum

- Ereignisse
- Einschub: Kombinatorik
- Wahrscheinlichkeit nach Laplace
- Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff
- Lernziele
- Literatur

Einschub: Kombinatorik

- **Ziel:** Kombinatorik beschreibt die Anzahl der möglichen Anordnungen bestimmter gegebener Elemente

- **Ansatzpunkt:**
  - Gegeben ist eine Menge
    $$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$$
    mit N Elementen
  - Gesucht ist die Anzahl der möglichen Anordnungen bei $K \leq N$ Ziehungen unter bestimmten Randbedingungen (mit/ohne Beachtung der Reihenfolge; mit/ohne Zurücklegen/Wiederholung)
  - Da jedes Mal ein Element aus Ω gezogen wird, besteht der Ereignisraum immer aus Tupeln in
    $$\Omega^K = \Omega \times \cdots \times \Omega$$

Einschub: Kombinatorik

- *Variationen* $V_N^{(K)}$
  - **Szenario:**
    - Aus Ω werden $K \leq N$ Elemente *mit Beachtung der Reihenfolge* gezogen
    - Die Elemente von Ω sind alle *unterscheidbar* und werden *nicht zurückgelegt*
    - Formal:
$$V_N^{(K)} = \left\{(a_1, \ldots, a_K) \in \Omega^K : a_i \neq a_j, i \neq j\right\}$$
  - **Eigenschaft:**[6]
$$\left|V_N^{(K)}\right| = \frac{N!}{(N-K)!}$$
  - **Nachweis:** Für das erste Element hat man N Möglichkeiten, für das zweite $N-1$ etc. Beim K-ten hat man noch $N-K+1$ Möglichkeiten. Es folgt: $|V_N^{(K)}| = N \cdot (N-1) \cdots (N-K+1) = N!/(N-K)!$. ■

[6] Die *Fakultät* einer ganzen Zahl lautet: $N! = 1 \cdot 2 \cdots N$.

Einschub: Kombinatorik

- *Variationen* $\widetilde{V}_N^{(K)}$
  - **Szenario:**
    - Aus Ω werden $K \leq N$ Elemente *mit Beachtung der Reihenfolge* gezogen
    - Die Elemente von Ω sind *alle unterscheidbar* und werden *zurückgelegt*[7]
    - Formal:

$$\widetilde{V}_N^{(K)} = \left\{(a_1, \ldots, a_K) \in \Omega^K\right\}$$

  - **Eigenschaft:**

$$\left|\widetilde{V}_N^{(K)}\right| = N^K$$

  - **Nachweis:** In jedem Zug hat man N Möglichkeiten.

[7] **Hinweis:** Da die Elemente zurückgelegt werden, ist die Forderung $K \leq N$ nicht notwendig.

Einschub: Kombinatorik

- *Variationen*
  - **Beispiele:**
    - Wählen Sie 3 WT-Bücher aus 10 unterscheidbaren ohne Zurücklegen aus und stellen diese ins Regal, so haben Sie dafür
      $$\frac{10!}{7!} = 720$$
      Möglichkeiten.
    - Bei N-fachem unabhängigen Wurf einer identischen Münze gibt es 2^N Möglichkeiten.[8]
    - Mit drei unterscheidbaren Würfeln ergeben sich
      $$6^3 = 216$$
      mögliche Würfelergebnisse.

[8] Angenommen, dass sie nicht auf der Seite stehenbleibt.

Einschub: Kombinatorik

- *Permutationen* Π_N
  - **Szenario:**[9]
    - Aus Ω werden $K = N$ Elemente *mit Beachtung der Reihenfolge* gezogen
    - Die Elemente von Ω sind *alle unterscheidbar* und werden *nicht zurückgelegt*
    - Formal:
$$\Pi_N = \left\{(a_1, \ldots, a_N) \in \Omega^N : a_i \neq a_j, i \neq j\right\}$$
  - **Eigenschaft:**
$$|\Pi_N| = N!$$
  - **Nachweis:** Folgt wegen $\Pi_N = V_N^{(N)}$. ■

[9] **Übung:** Machen Sie sich klar, dass die Elemente damit lediglich umsortiert werden.

Einschub: Kombinatorik

- *Permutationen* $\Pi_N^{(L)}$
  - **Szenario:**[10]
    - Aus Ω werden $K = N$ Elemente *mit Beachtung der Reihenfolge* gezogen
    - $L \leq N$ der N Elemente von Ω sind gleich, alle anderen Elemente unterscheidbar
    - Formal:

$$\Pi_N^{(L)} = \left\{(a_1, \ldots, a_N) \in \Omega^N : a_i = a_j \text{ genau } L \text{ Mal}\right\}$$

  - **Eigenschaft:**

$$\left|\Pi_N^{(L)}\right| = \frac{N!}{L!}$$

  - **Nachweis:** Für die Anordnung der N Elemente hat man $N!$ Möglichkeiten. Alle Anordnungen, die nur die L gleichen Elemente vertauschen, sind identisch. Somit ist:

$$\left|\Pi_N^{(L)}\right| = \frac{|\Pi_N|}{|\Pi_L|} = \frac{N!}{L!}$$

[10] Zur Unterscheidbarkeit zum K bei Variationen, werden die Anzahlen gleicher Elemente mit L bezeichnet.

Einschub: Kombinatorik

- *Permutationen* $\Pi_N^{(L_1,L_2,\ldots,L_M)}$
  - **Szenario:**[11]
    - Aus Ω werden $K = N$ Elemente *mit Beachtung der Reihenfolge* gezogen
    - Jeweils $L_1, L_2, \ldots, L_M$ der N Elemente sind gleich, alle anderen Elemente unterscheidbar[12]
  - **Eigenschaft:**

$$\left|\Pi_N^{(L_1,L_2,\ldots,L_M)}\right| = \frac{N!}{L_1! \cdot L_2! \cdots L_M!}$$

  - **Nachweis:** Wiederholtes Argumentieren wie bei $\Pi_N^{(L)}$

[11] Zur Unterscheidbarkeit zum K bei Variationen, werden die Anzahlen gleicher Elemente mit L bezeichnet.
[12] Ist $L_1 + \cdots + L_M = N$, so ist jedes Element Teil einer Gruppe.

Einschub: Kombinatorik

- *Permutationen*
  - **Beispiele:**
    - Mögliche Anordnungen von 10 verschiedenen Büchern im Regal: $10! = 3\,628\,800$
    - Mögliche Anordnung von 10 Büchern, wobei 5 gleiche WT-Bücher[13] sind:

$$\frac{10!}{5!} = 30\,240$$

    - Mögliche Anordnung von 10 Büchern, wobei 5 gleiche WT-Bücher, 3 gleiche NT-Bücher und 2 gleiche Physik-Bücher sind:

$$\frac{10!}{5!\,3!\,2!} = 2\,520$$

[13] ... ohne unterscheidbare Kennung...

Einschub: Kombinatorik

- *Kombinationen* $C_N^{(K)}$
  - **Szenario:**
    - Aus Ω werden $K \leq N$ Elemente *ohne Beachtung der Reihenfolge* gezogen
    - Die Elemente von Ω sind *alle unterscheidbar* und werden *nicht zurückgelegt*
    - Formal:

$$C_N^{(K)} = \left\{(a_1, \ldots, a_K) \in \Omega^K : a_1 < a_2 < \cdots < a_K\right\}$$

  - **Eigenschaft:**

$$\left|C_N^{(K)}\right| = \binom{N}{K}$$

  - **Nachweis:** Um K aus N *mit* Beachtung der Reihenfolge zu ziehen hat man $|\Pi_N^{(K)}|$ Möglichkeiten. Da für Kombinationen die Reihenfolge keine Rolle spielt, sind alle $K!$ Vertauschungen äquivalent. Es folgt $|C_N^{(K)}| = |V_N^{(K)}|/K! = \frac{N!}{(N-K)!K!}$. ■

Einschub: Kombinatorik

- *Kombinationen* $\widetilde{C}_N^{(K)}$
  - **Szenario:**
    - Aus Ω werden K Elemente *ohne Beachtung der Reihenfolge* gezogen
    - Die Elemente von Ω sind *alle unterscheidbar* und werden *zurückgelegt*
    - Formal:

$$\widetilde{C}_N^{(K)} = \left\{(a_1, \ldots, a_K) \in \Omega^K : a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_K\right\}$$

  - **Eigenschaft:**

$$\left|\widetilde{C}_N^{(K)}\right| = \binom{N+K-1}{K}$$

  - **Nachweis:** Siehe [Hen13] ■

Einschub: Kombinatorik

- *Kombinationen*
  - **Beispiele:**
    - Für die Ziehung der Lottozahlen[14] gibt es

$$\binom{49}{6} = 13\,983\,816$$

      mögliche Ergebnisse.
    - Für das Durcharbeiten von 3 aus 7 möglichen WT-Büchern haben Sie

$$\binom{7}{3} = 35$$

      verschiedene Optionen.
    - Mit drei nicht unterscheidbaren Würfeln können Sie

$$\binom{6+3-1}{3} = 56$$

      verschiedene Ergebnisse erzielen.

[14] ... ohne Zusatzzahl, Superzahl etc...

Einschub: Kombinatorik

- **Übersicht:**

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Mit Reihenfolge	$\left\lvert \widetilde{V}_N^{(K)} \right\rvert = N^K$	$\left\lvert V_N^{(K)} \right\rvert = \frac{N!}{(N-K)!}$
Ohne Reihenfolge	$\left\lvert \widetilde{C}_N^{(K)} \right\rvert = \binom{N+K-1}{K}$	$\left\lvert C_N^{(K)} \right\rvert = \binom{N}{K}$

Einschub: Kombinatorik

- **Beispiel:**[15] Theorie und Simulation bei $10\,000$ Ziehungen pro Szenario für $K = 4$ und $N = 7$

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Mit Reihenfolge	theo.: $7^4 = 2\,401$ sim.: 2366	theo.: $\frac{7!}{4!} = 840$ sim.: 840
Ohne Reihenfolge	theo.: $\binom{7+4-1}{4} = 210$ sim.: 210	theo.: $\binom{7}{4} = 35$ sim.: 35

[15] **Datei:** combinatorics.ipynb

Einschub: Kombinatorik

Hinweise

- Variationen und Kombinationen beschreiben Auswahlvorgänge („Ziehen“), während Permutationen die Umordnungen beschreiben.[16]
- Die Bezeichnung der einzelnen Szenarien ist in der Literatur uneinheitlich. So bezeichnet beispielsweise [Hen13] die hier und in [JW02] als Variationen eingeführten Szenarien als Permutationen.

[16] Eine Umordnung von N Elementen entspricht einem N-fachen Ziehen ohne Zurücklegen.

Übersicht

Wahrscheinlichkeit nach Laplace

Hinweis

Im Folgenden wird die Größe N oft als obere Anzahl von Beobachtungen oder als obere Grenze von Vereinigungen oder Summen verwendet. Da die Menge $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ nicht mehr/nur noch selten direkt hingeschrieben wird, sollte hierdurch keine Verwirrung entstehen.

Wahrscheinlichkeit nach Laplace

- **Ziel:** Einführen eines intuitiv und analytisch fassbaren und nachvollziehbaren Begriffs/Definition für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.

- **Intuition:** Was häufiger beobachtet wird ist wahrscheinlicher.

Wahrscheinlichkeit nach Laplace

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Führt man N unabhängige[17] Wiederholungen[18] des Zufallsexperiments $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ mit den Ergebnissen[19] $x_1, \ldots, x_N \in \Omega$ durch, so ist die *absolute Häufigkeit* von $A \subset \Omega$

$$h_N(A) = |\{i : x_i \in A\}|$$

und die *relative Häufigkeit*

$$H_N(A) = \frac{h_N(A)}{N}.$$

---

[17] Diese Annahme ist stets zu prüfen.

[18] N beschreibt die Anzahl der Versuche/Wiederholungen und nicht die Elementanzahl von Ω.

[19] Damit entspricht jedes x_i einem $\omega \in \Omega$.

Wahrscheinlichkeit nach Laplace

- **Beispiel:**
  - Mit dem PC wurden $N = 1\,000$ bzw. $N_2 = 100\,000$ zufällige Zahlen aus $\{1, \ldots, 6\}$ erzeugt[20]:

k	1	2	3	4	5	6
$h_N(k)$	166	163	181	158	168	164
$h_{N_2}(k)$	16 781	16 516	16 648	16 801	16 593	16 661

  - Es ergeben sich die folgenden absoluten und relativen Häufigkeiten:

$$
\begin{aligned}
h_N(5) &= 168 \\
h_N(\text{gerade Zahl}) &= 163 + 158 + 164 = 485 \\
H_N(\text{Zahl kleiner gleich 5}) &= \frac{1\,000 - 164}{1\,000} = \frac{836}{1\,000} = 0.836 \\
H_N(\text{teilbar durch 3}) &= \frac{181 + 164}{1\,000} = \frac{345}{1\,000} = 0.345
\end{aligned}
$$

[20] ... und damit eine Sequenz von Würfelwürfen simuliert...

Wahrscheinlichkeit nach Laplace

- **Eigenschaften:**

$$0 \leq H_N(A) \leq 1, \qquad A \in \mathcal{P}(\Omega)$$
$$H_N(\Omega) = 1$$
$$AB = \emptyset \implies H_N(A \cup B) = H_N(A) + H_N(B)$$

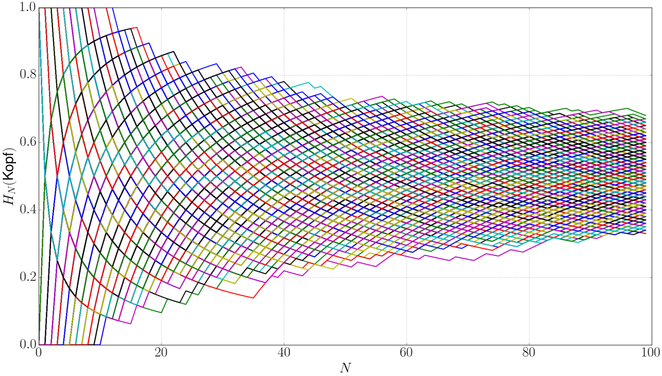
- **Folgerungen:**[21]

$$H_N(\overline{A}) = 1 - H_N(A)$$
$$H_N(A \cup B) = H_N(A) + H_N(B) - H_N(AB)$$

[21] **Nachweis: Übung**

Wahrscheinlichkeit nach Laplace

- **Beispiel:**[22] Relative Häufigkeit von „Kopf“ in Sequenzen der Länge 100 und Simulation von 100 Sequenzen



[22] **Datei:** relative_frequency.ipynb

Wahrscheinlichkeit nach Laplace

- **Diskussion:**
  - Die absolute und die relative Häufigkeit beruhen auf einer Beobachtungsfolge. Aus $H_N(A) = 0$ folgt mitnichten, dass A niemals auftreten kann! Ebenso wenig folgt aus $H_N(A) = 1$, dass A stets auftritt.
  - **Beispiel:** Würden Sie aus $5 \cdot 3$ erfolglosen Würfen beim „Mensch ärgere Dich nicht“ schließen, dass es gar keine 6 gibt?

  - **Idee:** Mache die Folge beliebig lang; definiere Wahrscheinlichkeit als Grenzwert.
  - **Problem:** ([Hen13]) Auch damit lässt sich kein konsistenter Wahrscheinlichkeitsbegriff definieren, da genau diese eine Beobachtung[23] theoretisch vollkommen uncharakteristisch sein kann.

[23] Beachte: Man würde im letzten Beispiel genau eine der Sequenzen beobachten!

Wahrscheinlichkeit nach Laplace

- **Status Quo:** Keine sinnvolle Definition der Wahrscheinlichkeit über Häufigkeiten
- **Konsequenz:** Gehe von Beobachtungsfolgen wieder zurück zu $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Wahrscheinlichkeit nach Laplace

Definition

Treten alle Ergebnisse $\omega_i \in \Omega$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf,

$$P(\omega_i) = \frac{1}{|\Omega|},$$

so nennt man das Zufallsexperiment ein *Laplace'sches Zufallsexperiment*.

Wahrscheinlichkeit nach Laplace

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

In einem Laplace'schen Zufallsexperiment ergibt sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $A \subset \Omega$ durch:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl günstige Möglichkeiten}}{\text{Anzahl Möglichkeiten}}$$

Wahrscheinlichkeit nach Laplace

- **Bemerkungen:**
  - In einem Laplace-Experiment ist stets
$$P(A) = \frac{k}{|\Omega|}, \qquad 0 \leq k \leq |\Omega|$$
  - Sämtliche Aufgaben der Kombinatorik lassen sich mittels Laplace-Experimenten beschreiben.
  - Beachte: Im Gegensatz zu relativen Häufigkeiten „zählt man nicht in Zeitrichtung, sondern in Zufallsrichtung“

Wahrscheinlichkeit nach Laplace

KIT – Karlsruher Institut für Technologie

- **Beispiel:**[24]
  - **Szenario:** In einer Urne sind R rote und $N-R$ weiße Kugeln
  - **Frage:** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei Ziehen von n Kugeln genau r rot und $n-r$ weiß sind?
  - **Lösung:**
    - Möglichkeiten n aus N zu ziehen: $|C_N^{(n)}| = \binom{N}{n}$
    - Möglichkeiten r aus R zu ziehen: $|C_R^{(r)}| = \binom{R}{r}$
    - Möglichkeiten $n-r$ aus $N-R$ zu ziehen: $|C_{N-R}^{(n-r)}| = \binom{N-R}{n-r}$
    - Es ergibt sich die Wahrscheinlichkeit:

$$P_r = \frac{\binom{R}{r}\binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

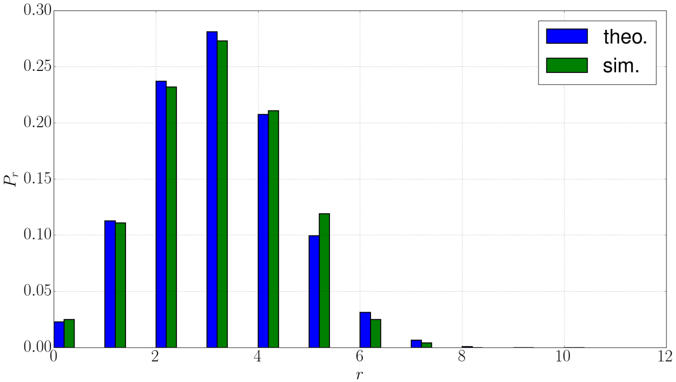
mit „ziehe r aus R“ , „ziehe $n-r$ aus $N-R$“ und „ziehe n aus N“

[24] Dies wird später als hypergeometrische Verteilung bezeichnet werden.

Wahrscheinlichkeit nach Laplace

- **Beispiel:**[25] (ctd.) $N = 100$, $R = 30$, $n = 10 \implies P_r = \frac{\binom{30}{r}\binom{70}{10-r}}{\binom{100}{10}}$;

  Simulation von $1\,000$ Ziehungen

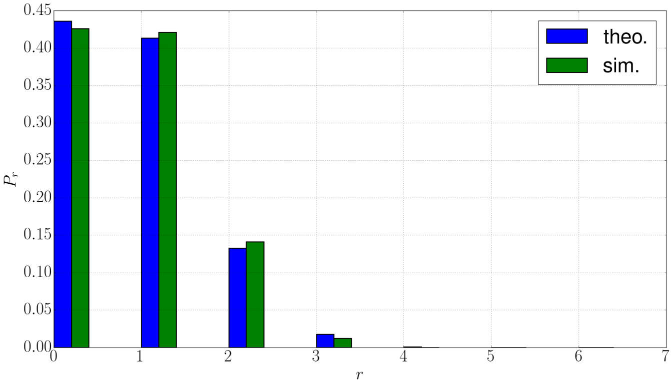


[25] **Datei:** laplace_hypergeometric.ipynb

Wahrscheinlichkeit nach Laplace

- **Beispiel:**[26] (ctd.) $N = 49$, $R = 6$, $n = 6 \implies P_r = \frac{\binom{6}{r}\binom{43}{6-r}}{\binom{49}{6}}$;

  Simulation von $1\,000$ Ziehungen



[26] **Datei:** laplace_hypergeometric.ipynb

Wahrscheinlichkeit nach Laplace

- **Beispiel/Übung:** Betrachten Sie einen Wurf mit zwei Würfeln. Begründen Sie, ob es sich um ein Laplace-Experiment handelt, wenn
  - beide Würfel dieselbe Farbe besitzen.
  - die Würfel verschiedene Farben haben.

Wahrscheinlichkeit nach Laplace

Diskussion

Vor kurzem wurde argumentiert, dass über relative Häufigkeiten kein Wahrscheinlichkeitsbegriff *definiert* werden kann.
Jegliche Form von Simulation (wie in den letzten Beispielen) erzeugt aber genau Größen der Form

$$\frac{\#\ \text{Treffer}}{\#\ \text{Versuche}}.$$

Wenngleich also über solch ein Vorgehen keine Definition möglich ist, so kann die Wahrscheinlichkeit offenbar doch gut *approximiert* werden. Die Begründung dieser Tatsache erfolgt später.

Übersicht

Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

- **Wiederholung:** (Eigenschaften der relativen Häufigkeit)

$$0 \leq H_N(A) \leq 1, \qquad A \in \mathcal{P}(\Omega)$$
$$H_N(\Omega) = 1$$
$$AB = \emptyset \implies H_N(A \cup B) = H_N(A) + H_N(B)$$

- **Erinnerung:** Es ist nicht möglich, darüber Wahrscheinlichkeit zu *definieren*, da $H_N(A)$ von der beobachteten Folge abhängt.
- **Idee:** Bilde ein Framework, das mathematisch „safe“ ist und diese Eigenschaften beibehält.

Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

- **Beobachtung:** Die Ergebnismenge vieler zufälliger Vorgänge ist nicht endlich, sondern entweder abzählbar unendlich (ähnlich zu $\mathbb{N}$) oder gar überabzählbar unendlich (ähnlich $\mathbb{R}$)
- **Beispiele:** Anzahl der Würfelwürfe „bis zur ersten 6“; Spannung an einem rauschenden Widerstand

- **Problem:** Es kann gezeigt werden ([Hen13]), dass es für $\mathbb{R}$ nicht möglich ist, die Potenzmenge als Menge der möglichen Ereignisse zu verwenden.
- **Lösung:** Verwende einen Teil der Potenzmenge als Ereignismenge.

Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

- **Frage:** Welche Eigenschaften sollte diese Ereignismenge besitzen?
- **Antwort:**
  1. „Irgendetwas tritt ein“ $\equiv \Omega$ sollte ein Ereignis sein
  2. Ist A ein Ereignis, so sollte das Gegenteil $\overline{A}$ ein Ereignis sein
  3. Für mehrere zulässige Ereignisse A_n sollte „mindestens eines der Ereignisse“ ein mögliches Ereignis sein
  4. Beliebige Kombinationen der Punkte 2 und 3 sollten wieder ein mögliches Ereignis sein

Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

Definition

Eine nicht-leeres Teilmengensystem[27] $\emptyset \neq \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ-*Algebra* (zur Grundmenge Ω), falls:

$$\Omega \in \mathcal{B}$$

$$A \in \mathcal{B} \implies \overline{A} \in \mathcal{B}$$

$$A_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$$

[27] $\mathcal{B}$ ist damit eine Menge von Mengen!

Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

- **Bemerkungen:**
  - Die erste Forderung ist mathematisch nicht notwendig, da:

$$\mathcal{B} \neq \emptyset \implies \text{ex. } A \in \mathcal{B} \implies \Omega = A \cup \overline{A} \in \mathcal{B}$$

  - Aufgrund der dritten Bedingung sind alle endlichen Vereinigungen wieder in $\mathcal{B}$.
  - Wegen der zweiten und dritten Bedingung sind alle Durchschnitte in $\mathcal{B}$:

$$A_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n} \in \mathcal{B}$$

Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

- **Bemerkungen:** (ctd.)
  - Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ ist eine σ-Algebra, ist aber oft „zu groß“
  - Für *endliche Wahrscheinlichkeitsräume* Ω wird die dritte Bedingung auf endliche Vereinigungen reduziert:[28]

$$A_n \in \mathcal{B}, n = 1, \dots, N \implies \bigcup_{n=1}^{N} A_n \in \mathcal{B}$$

[28] **Übung/Frage:** Wieso?

Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

- **Folgerung:** Für jedes[29] $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist die *von $\mathcal{M}$ erzeugte σ-Algebra* $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ gegeben durch

$$\begin{aligned} &\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{M}) \\ &\mathcal{B}' \supset \mathcal{M} \ \sigma\text{-Algebra} \implies \mathcal{B}' \supset \mathcal{B}(\mathcal{M}) \end{aligned}$$

  als die *kleinste σ-Algebra, die die Ereignisse aus $\mathcal{M}$ enthält*.

- **Konsequenz:** Man kann sich überlegen, welche Ereignisse man mindestens haben möchte, diese alle in $\mathcal{M}$ schreiben und über $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ eine geeignete σ-Algebra konstruieren.

[29] **Achtung:** $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega) \implies \mathcal{M}$ ist eine Menge von (Teil-)Mengen!

Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

- **Beispiel/Übung:**
  - Was ist die kleinste σ-Algebra über Ω?
  - Geben Sie für den Würfelwurf mit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ an:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Omega) &= ? \\ \sigma(\{\{1,2\}\}) &= ? \\ \sigma(\{\{1,2\},\{5\}\}) &= ? \end{aligned}$$

- **„Übung++“:** Schreiben Sie ein Programm, das bei gegebenen Ω und $\mathcal{M}$ die σ-Algebra $\sigma(\mathcal{M})$ erzeugt.[30]

---

[30] **Hinweis:** Etwas schwieriger. Evtl. Abbruchkriterium der Art „keine neue Menge hinzugekommen“.

Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

Definition

Die *Borel'sche σ-Algebra* ist die für $\Omega = \mathbb{R}$ von allen halboffenen Intervallen erzeugte σ-Algebra:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(a, b] : a \leq b\})$$

- **Bemerkung:** Praktisch enthält $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ alle für die Anwendung relevanten Ereignisse. Es kann aber gezeigt werden, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ [Kre91].

Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

Definition

Eine *Ereignisdisjunktion* oder *Zerlegung* von $(\Omega, \mathcal{B})$ ist ein abzählbares Mengensystem/eine abzählbare Mengenfolge $A_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}$ mit

$$A_n A_m = \emptyset, n \neq m; \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$$

Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

Notation

Für die Vereinigung disjunkter Mengen schreibt man in Kurzform:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \quad \equiv \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ mit } A_n A_m = \emptyset, n \neq m$$

Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

Satz

Jede abzählbare Vereinigung lässt sich als disjunkte Vereinigung schreiben.

- **Nachweis:** Verwendet man nur die „jeweils neuen Elemente“, so ist:[31]

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right)$$

[31] **Übung:** Machen Sie sich klar, dass die Mengen in der Klammer paarweise disjunkt sind.

Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

- **Beispiel:** Für $\Omega = \{2, \ldots, 15\}$ ist

$$\Omega = \{2,4,6,8,10,12,14\} \cup \{3,6,9,12,15\} \\ \cup \{5,10,15\} \cup \{7,14\} \cup \{11\} \cup \{13\}.$$

Hierfür ergibt sich aus dem letzten Satz („nichts dazu, was schon da war"):

$$\Omega = \{2,4,6,8,10,12,14\} + \{3,9,15\} \\ + \{5\} + \{7\} + \{11\} + \{13\}$$

Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

Definition

Für einen Ergebnisraum Ω mit σ-Algebra $\mathcal{B}$ ist eine *Wahrscheinlichkeit* eine Abbildung $P : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ mit:

$$P(A) \geq 0, A \in \mathcal{B}$$
$$P(\Omega) = 1$$
$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right), \quad A_n \in \mathcal{B}$$

Das Tupel $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ heißt *Wahrscheinlichkeitsraum*. Der Wert $P(A), A \in \mathcal{B}$, ist die *Wahrscheinlichkeit des Ereignisses* $A \in \mathcal{B}$.

Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

- **Bemerkungen:**
  - Aus der dritten Bedingung folgt insbesondere für $AB = \emptyset$:

    $$P(A+B) = P(A) + P(B);$$

    damit bilden die an eine Wahrscheinlichkeit gestellten Bedingungen genau die Eigenschaften der relativen Häufigkeit ab.
  - Beachten Sie, dass $P(\cdot)$ nur auf $\mathcal{B}$ definiert ist. Für „Nicht-Ereignisse“ kann keine Wahrscheinlichkeit angegeben werden.

Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

- **Eigenschaften:** Für $A, B \in \mathcal{B}$ gilt:

$$P(\emptyset) = 0$$
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$
$$A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$$
$$0 \leq P(A) \leq 1$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega \implies P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$$

- **Nachweis:** Tafel

Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

- *Endliche Wahrscheinlichkeitsräume*[32]
  - Ist Ω endlich, so kann $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ gewählt und für jedes Ereignis eine Wahrscheinlichkeit berechnet werden.
  - Für endliche Wahrscheinlichkeitsräume reduziert sich die dritte Forderung auf

$$P\left(\sum_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} P\left(A_n\right)$$

  - Wegen

$$P(A) = P\left(\sum_{a\in A} \{a\}\right) = \sum_{a\in A} P\left(\{a\}\right)$$

genügt es in einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum die Wahrscheinlichkeit von Elementarereignissen festzulegen, um das Wahrscheinlichkeitsmaß vollständig zu charakterisieren.

[32] Bemerkungen teilweise nach [Hen13]

Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

- *Endliche Laplace'sche Wahrscheinlichkeitsräume*
  - In einem Laplace'schen Zufallsexperiment ist $|\Omega|$ endlich, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\{a\}) = \frac{1}{|\Omega|}$ und somit:
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$
  - **Übung:** Prüfen Sie durch formales Rechnen nach, dass durch ein Laplace-Experiment ein Wahrscheinlichkeitsraum entsteht.

Übersicht

Lernziele

- Die folgende Aufstellung fasst die zentralen Punkte zusammen.
- Es wird aufgezeigt, welche Punkte nach Bearbeitung des Kapitels klar sein sollten.
- **Hinweise:**
  - Die Auflistung ist nicht vollständig, sondern führt die wichtigsten Aussagen auf; nicht erwähnte Inhalte sind dennoch bedeutsam.
  - Oft enthalten die Nachweise wichtige Ideen; diese also nicht vernachlässigen.
  - Stets versuchen, Gleichungen in Verbindung mit Interpretationen und Anwendungen zu sehen
  - Des weiteren sollten alle kleinen nützlichen Ergänzungen verstanden sein.
  - Es ist immer eine gute Idee, etwas Gelerntes im Rechner umzusetzen. Dies hilft beim Verständnis und schärft das Bewusstsein für mögliche Probleme.

Lernziele

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Definition eines Ergebnisraums, Ereignisse, Elementarereignisse, Teilereignise, komplementäres Ereignis, disjunkte Ereignisse
- Wiederholung: Rechnen mit Mengen
- Kombinatorik: Variationen, Permutationen, Kombinationen
- Absolute und relative Häufigkeit, Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsbegriff und Anwendungen
- Notwendigkeit und Motivation zur Definition von σ-Algebra und deren Eigenschaften
- Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Kolmogoroff und Eigenschaften

Übersicht

Literatur I

[JW02] F. Jondral, A. Wiesler, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse*, Teubner, 2002

[Kre91] U. Krengel, *Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, Vieweg, 1991

[Ren62] A. Rényi, *Wahrscheinlichkeitsrechnung – mit einem Anhang über Informationstheorie*, VEB Verlag der Wissenschaften, 1962

[Hen13] N. Henze. *Stochastik für Einsteiger – Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls*, Springer, 2013

[Pap91] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 3rd Ed., New York 1991: McGraw-Hill, Inc.