

Wahrscheinlichkeitstheorie – Stetige Verteilungen

Holger Jäkel

Communications Engineering Lab (CEL)



- 5 Stetige Verteilungen
 - Wiederholung
 - Verteilungsfunktion und Dichte
 - Kenngrößen stetiger Zufallsvariablen
 - Wichtige Verteilungen
 - Funktionen von Zufallsvariablen
 - Lernziele
 - Literatur



- Folgende Diskussionen erfolgen gemäß¹

[JW02]: F. Jondral, A. Wiesler, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse*, Teubner, 2002

¹ Von dort entstammt die Struktur der Folien, die Formeln und die meisten Bilder.

5 Stetige Verteilungen

- Wiederholung
- Verteilungsfunktion und Dichte
- Kenngrößen stetiger Zufallsvariablen
- Wichtige Verteilungen
- Funktionen von Zufallsvariablen
- Lernziele
- Literatur



■ Erinnerung:

- Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* ist ein Tupel $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Hierbei ist
 - Ω der Ergebnisraum,
 - $\mathcal{B}$ eine σ -Algebra auf Ω und
 - die *Wahrscheinlichkeit* eine Abbildung $P : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

$$P(A) \geq 0, A \in \mathcal{B}$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n), \quad A_n \in \mathcal{B}$$

Der Wert $P(A)$, $A \in \mathcal{B}$, ist die *Wahrscheinlichkeit des Ereignisses* $A \in \mathcal{B}$.



■ Erinnerung:

- Eine *reellwertige Zufallsvariable* auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ ist eine Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

die jedem Elementarereignis eine reelle Zahl zuordnet und für die gilt:

$$X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{B}$$

Die *Verteilung* einer Zufallsvariablen beschreibt die Verteilung der Wahrscheinlichkeit über $\mathbb{R}$:

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

5 Stetige Verteilungen

- Wiederholung
- Verteilungsfunktion und Dichte
 - Definition und Eigenschaften
 - Verteilungsfunktion und Dichte diskreter Verteilungen
- Kenngößen stetiger Zufallsvariablen
- Wichtige Verteilungen
- Funktionen von Zufallsvariablen
- Lernziele
- Literatur

Definition

Die *Verteilungsfunktion*² der Zufallsvariablen X ist definiert durch³

$$F_X(x) := F(x) := P(X \leq x).$$

Aufgrund der Forderung $X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{B}$ kann diese Wahrscheinlichkeit stets berechnet werden.

²Engl.: *cumulative distribution function, cdf*. Die Abkürzung wird auch in deutscher Literatur gelegentlich verwendet.

³Die „faule“ zweite Notation $F(x)$ wird verwendet, sofern hierdurch keine Unklarheiten entstehen.



- **Bemerkungen:** (siehe [Kre91], [Ren62])

- Es folgt:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

- Man kann zeigen [Ren62], dass die Verteilung einer Zufallsvariablen vollständig durch die Verteilungsfunktion beschrieben ist.
- Die Eigenschaft $X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{B}$ wird als *Messbarkeit* der Abbildung bezeichnet.
- Je nach Autor wird die Verteilungsfunktion auch als $\tilde{F}(x) = P(X < x)$ definiert. In den *stetigen*⁴ Fällen ist, wie sich zeigen wird, dieser Unterschied unkritisch.

⁴... wird präzisiert...

■ Ergänzung:⁵

- Es kann gezeigt werden [Ren62], dass

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma \left(\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\} \right),$$

d. h. die Borelsche σ -Algebra die kleinste σ -Algebra ist, die alle Intervalle $(-\infty, a]$ enthält.

- In diesem Sinne lautet die mathematisch vollständige Notation einer reellwertigen Zufallsvariablen:

$$X : \begin{cases} (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ X^{-1}(B) \in \mathcal{B} \text{ für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

- Dann ist $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$ mit $P_X(B) = P(X^{-1}(B))$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. [Kre91], [Ren62]

⁵**Erinnerung:** Wir hatten in Kapitel 2 die Borelsche σ -Algebra kennengelernt, als von den halboffenen Intervallen erzeugte σ -Algebra.



- **Eigenschaften:** Die Verteilungsfunktion⁶ hat folgende Eigenschaften:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

$$x_1 \leq x_2 \implies F(x_1) \leq F(x_2)$$

$$F(x+) = \lim_{h \searrow 0} F(x+h) = F(x)$$

D.h. $F(x)$ nimmt nur Werte in $[0, 1]$ an, ist monoton nicht-fallend und rechtsseitig stetig.

⁶**Erinnerung:** $F(x) = P(X \leq x)$

Definition

Eine reellwertige Zufallsvariablen X ist *stetig*, falls eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit:

$$f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

Die Funktion $f(x)$ heißt dann die *Dichte*⁷ von X und erfüllt $f(x) = dF(x)/dx$. Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1$$

⁷Engl.: *probability density function, pdf*. Die Abkürzung wird auch in deutscher Literatur gelegentlich verwendet.

- Die mathematisch exakte Formulierung lautet: ([Ren62])

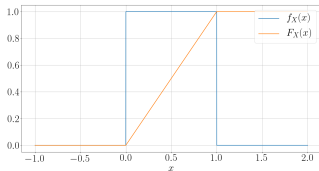
Die Verteilung einer reellwertigen Zufallsvariablen X heißt *stetig*, falls ihre Verteilungsfunktion $F_X(x)$ absolut stetig ist. In diesem Fall ist $F(x)$ fast überall differenzierbar und man setzt $f(x) = F'(x)$.

Für das Grundverständnis im Rahmen einer einführenden Vorlesung ist diese Feinheit nicht signifikant.

■ Beispiele:

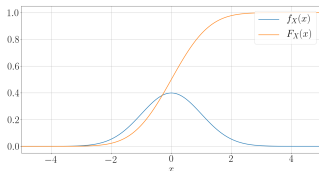
- Die *(stetige) Gleichverteilung* auf $[0, 1]$ wird beschrieben durch die Dichte:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



- Die *Standardnormalverteilung* oder auch *standardisierte Gaußverteilung* besitzt die Dichte:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$



■ Bemerkungen:

- Nach Definition der Verteilungsfunktion und Dichte ist für eine stetige Zufallsvariable

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

- Setzt man $x_1 = x$, $x_2 = x + dx$, dann ergibt sich:

$$P(x < X \leq x + dx) \approx f(x) dx$$

und somit

$$f(x) \approx \frac{P(x < X \leq x + dx)}{dx}$$

Die Dichte beschreibt einen „Wahrscheinlichkeitsbelag“ über den reellen Werten.

■ Bemerkungen: (ctd.)

- Für eine stetige Zufallsvariable folgt:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} P(x < X \leq x + dx) = \lim_{dx \rightarrow 0} \int_x^{x+dx} f(u) du = 0.$$

In diesem Sinne wäre $P(X = x) = 0$; bei einer stetigen Zufallsvariablen hat jeder Punkt die Wahrscheinlichkeit 0, obwohl das Ereignis $\{X = x\}$ nicht unmöglich ist.

■ Beispiele: (vgl. Folie 14)

- Für die stetige Gleichverteilung auf $[0, 1)$ und $a \in [0, 1 - \Delta a)$ ist

$$P(a < X \leq a + \Delta a) = \Delta a;$$

die Wahrscheinlichkeit ist überall gleich (unabh. von a) und proportional zur Länge des Beobachtungsintervalls.

- Bei der Standardnormalverteilung sind Werte um 0 deutlich wahrscheinlicher als andere Werte. Approximativ gilt:

$$P(-0.1 < X \leq 0.1) \approx 0.2 \cdot 0.4 = 0.08 = 8\%$$

$$P(1.9 < X \leq 2.1) \approx 0.2 \cdot 0.05 = 0.01 = 1\%$$

- **Aufgabe:** Diskrete Verteilungen sollen gemeinsam mit stetigen Zufallsgrößen beschrieben werden können
- **Lösung:** Verwendung der δ -Distribution oder *Dirac-Distribution*, die einem Punkt eine Masse zuordnet

Definition

Die δ -Distribution ist definiert durch

$$\int_{\mathbb{R}^N} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x}_0),$$

was als *Ausblendeigenschaft* der δ -Distribution bezeichnet wird.

In der Wahrscheinlichkeitstheorie kann sie dazu verwendet werden, einem Punkt des $\mathbb{R}^N$ Masse zuzuweisen.

■ Bemerkungen:

- Die Schreibweise als Integral dient der Verdeutlichung und der leichteren Handhabung. Beachten Sie stets, dass es sich um eine *Distribution*, d.h. ein Abbildung von Funktionen auf Werte, handelt. [Pap91]
- In dieser Vorlesung gehen wir davon aus, dass die Funktionen „hinreichend gutmütig“ sind, so dass die Berechnung gemäß Ausblendeigenschaft immer möglich ist.

■ Bemerkungen: (ctd.)

- Formales Rechnen liefert:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x} = 1$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \delta(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) d\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x}_0)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \delta(a\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{|a|} \int_{\mathbb{R}^N} \delta(\mathbf{x}) \varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right) d\mathbf{x} = \frac{1}{|a|} \varphi(\mathbf{0})$$



■ **Anschauung:** ($N = 1$)

- Betrachte Rechtecke der Form ($a > 0$)

$$\frac{1}{a} \text{rect} \left(\frac{x}{a} \right) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & |x| \leq \frac{a}{2} \\ 0, & |x| > \frac{a}{2} \end{cases},$$

die für $a \rightarrow 0$ sehr schmal und sehr hoch werden.

- Es folgt:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a} \text{rect} \left(\frac{x}{a} \right) \varphi(x) dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{a} \varphi(x) dx$$

$$\stackrel{\text{Zwischenwertsatz}}{=} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \cdot a \varphi(\xi), \quad \xi \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right]$$

$$\stackrel{\varphi \text{ stetig in } 0}{=} \varphi(0)$$

$$\stackrel{\text{Def. von } \delta}{=} \int_{\mathbb{R}} \delta(x) \varphi(x) dx$$



■ **Anschauung:** ($N = 1$) (ctd.)

- **Erinnerung:** Betrachte Rechtecke der Form ($a > 0$)

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a} \operatorname{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \delta(x) \varphi(x) dx$$

- Für die Vorstellung der δ -Distribution kann ein unendlich schmales, unendlich hohes Rechteck der Fläche 1 dienen.

■ **Bemerkungen:**

- Neben Rechtecken funktioniert dies mit vielen anderen Funktionen ebenfalls, etwa Gaußfunktionen.
- In der Vorlesung „Signale und Systeme“ wird die Dirac-Distribution noch eine wichtige Rolle spielen. [PJ15]

Hinweis

Für die folgenden Betrachtungen sind für $N = 1$ hauptsächlich relevant:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x - x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0)$$

Insbesondere:

$$\int_{-\infty}^a \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1, & a \geq x_0 \\ 0, & a < x_0 \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 1$$

Verteilungsfunktion und Dichte diskreter Verteilungen

- **Ziel:** Beschreibung von diskreten Zufallsvariablen mit Dichten
- **Beobachtung:** Verteilungsfunktion enthält Sprünge, entsprechend Wahrscheinlichkeitsmasse auf diskreten Punkten⁸
- **Idee:** Verwende δ -Distributionen
- **Hinweis:** Die folgenden Betrachtungen sind „mathematisch nicht ganz einwandfrei“, da $\delta(\cdot)$ keine integrierbare Funktion, sondern eine Distribution darstellt. Zur einheitlichen Behandlung von diskreten und stetigen Zufallsvariablen ist dies dennoch hilfreich. Aber: „Be aware“!

⁸Vgl. das Beispiel zu Würfelwurf in Kapitel 4.

Verteilungsfunktion und Dichte diskreter Verteilungen

- **Ansatz:** Für eine diskrete Zufallsvariable X mit Punktmassen in $x_1, x_2, \dots$ also Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_1), P(X = x_2), \dots$ setze

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X = x_n) \delta(x - x_n)$$

Für die Verteilungsfunktion ergibt sich (Details: Tafel)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = \sum_{n: x_n \leq x} P(X = x_n)$$

und somit die erwartete Treppenfunktion.

■ Bemerkungen:

- Die Darstellung einer Punktwahrscheinlichkeit über eine δ -Distribution ist nur zur mathematischen Behandlung relevant *oder* wenn in einer Dichte stetige und diskrete Anteile gemeinsam vorkommen. Bei rein diskreten ist die Darstellung der Wahrscheinlichkeiten⁹ vernünftiger.
- Die Treppengestalt der Verteilungsfunktion entsteht aus $F(x) = P(X \leq x)$, da in einem der diskreten Punkte der entsprechende Dirac hinzukommt und somit $P(X \leq x)$ um $P(X = x_n)$ springt.

⁹ ... etwa wie bei der Augensumme zweier Würfel...

■ **Bemerkungen:** (ctd.)

- Ausgehend von einer Verteilungsfunktion in Treppenform, ist die δ -Distribution anschaulich die Ableitung eines Sprungs.¹⁰
- Da die Sprungfunktion in ihrer Sprungstelle nicht differenzierbar ist, wird klar, dass das Konzept eher anschaulich als mathematisch streng zu verstehen ist. Mathematisch konsistent ist eine solche Beschreibung in der Maßtheorie möglich. Diese verwendet das Lebesgue-Integral und geht weit über den vorliegenden Kurs hinaus. Eine Einführung findet sich beispielsweise in [Ren62].

¹⁰ **Frage/Übung:** Können Sie dies graphisch erklären?

- 5 Stetige Verteilungen
 - Wiederholung
 - Verteilungsfunktion und Dichte
 - **Kenngrößen stetiger Zufallsvariablen**
 - Wichtige Verteilungen
 - Funktionen von Zufallsvariablen
 - Lernziele
 - Literatur



Definition

Der *Erwartungswert* oder *Mittelwert* einer Zufallsvariablen mit Dichte $f(x)$ ist definiert durch

$$E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

falls das Integral existiert.

■ Bemerkungen:

- Als Beispiel für die Nicht-Existenz eines Erwartungswertes (siehe [Ren62], [JW02]) dient die *Cauchy-Verteilung* mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x - \mu)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Für diskrete Zufallsvariablen mit Wertebereich $\{x_1, x_2, \dots\}$ ergibt sich¹¹ aus Definition und mittels der Ausblendeigenschaft der δ -Distribution:

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n P(X = x_n)$$

und somit das bereits bekannte Resultat.

¹¹ **Nachweis:** Tafel

Definition

Falls die entsprechenden Integrale existieren, so ist der Erwartungswert bzgl. $g(\cdot)$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

und damit das k -te Moment

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$$

bzw. das k -te zentrale Moment:

$$E((X - E(X))^k) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^k f(x)dx$$

Das zweite zentrale Moment heißt *Varianz* $D^2(X)$.

Definition

- Nimmt die Dichte $f(x)$ einer stetigen Zufallsvariablen ein lokales Maximum an, so heißt x_0 *Modalwert* der Verteilung/der Zufallsvariablen.
- Ein Wert x_p , für den

$$P(X < x_p) \leq p, \quad P(X > x_p) \leq 1 - p$$

gilt, heißt *p-tes Quantil*. Das $p = \frac{1}{2}$ -Quantil heißt *Median*.

■ Beispiele:

- Für die Gleichverteilung auf $[0, 1)$ folgt:

$$E(X) = 0.5 = x_{\frac{1}{2}}$$

- Für die Standardnormalverteilung ist

$$E(X) = 0 = x_0 = x_{\frac{1}{2}},$$

d.h. der Erwartungswert ist sowohl Modalwert als auch 50%-Quantil.

- Für stetige Zufallsvariablen mit Dichte $f(x)$ folgt die charakteristische Funktion zu:

$$\varphi_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jsx} f(x) dx$$

- Aus der charakteristischen Funktion lassen sich die Momente der Verteilung bestimmen: Falls das k -te Moment der Zufallsvariablen X existiert, so gilt:

$$E(X^k) = \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{j^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

■ Beispiele:

- Für die Standardnormalverteilung $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ folgt¹²

$$\begin{aligned}\varphi_X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jsx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= e^{-\frac{s^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2 - 2jxs - s^2}{2}} dx \\ &= e^{-\frac{s^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-j s)^2}{2}} dx \\ &\stackrel{(a)}{=} e^{-\frac{s^2}{2}}\end{aligned}$$

- Daraus folgt für¹³ $Y = \sigma X + \mu$:

$$\varphi_Y(s) = E\left(e^{jsY}\right) = E\left(e^{js(\sigma X + \mu)}\right) = e^{js\mu} \varphi_X(\sigma s) = e^{js\mu} e^{-\frac{\sigma^2 s^2}{2}}$$

¹²Der Nachweis von (a) ist etwas schwieriger. Hier kann entweder eine Integraltabelle helfen oder wie in [Ren62] komplexe Analysis bemüht werden.

¹³Es wird später nachgerechnet werden, dass Y ebenfalls eine Normalverteilung besitzt.

■ Beispiele:

- Die Varianz ergibt sich aus der charakteristischen Funktion durch:

$$D^2(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = -\varphi_Y''(0) + (\varphi_Y'(0))^2$$

- Für $Y = \sigma X + \mu$, $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ folgt aus $\varphi_Y(s) = e^{js\mu - \frac{\sigma^2 s^2}{2}}$:

$$\varphi_Y'(s) = (j\mu - \sigma^2 s)e^{js\mu - \frac{\sigma^2 s^2}{2}}$$

$$\varphi_Y''(s) = (j\mu - \sigma^2 s)^2 e^{js\mu - \frac{\sigma^2 s^2}{2}} - \sigma^2 e^{js\mu - \frac{\sigma^2 s^2}{2}}$$

und damit¹⁴

$$E(Y) = \frac{\varphi_Y'(0)}{j} = \frac{j\mu}{j} = \mu$$

$$D^2(Y) = -\varphi_Y''(0) + (\varphi_Y'(0))^2 = -((j\mu)^2 - \sigma^2) + (j\mu)^2 = \sigma^2$$

¹⁴... wie auch mittels der Rechenregeln für $E(\cdot)$, $D^2(\cdot)$ nachweisbar...

■ Bemerkungen:

- Die charakteristische sowie die erzeugende Funktionen treten in ähnlicher Form in der Systemtheorie auf.

■ *Fouriertransformation*

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \implies \varphi_X(s) = \mathcal{F}\{f_X(t)\} \left(-\frac{s}{2\pi}\right)$$

■ *z-Transformation*

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \implies \psi_X(z) = \mathcal{Z}\{P(X = x_n)\} \left(\frac{1}{z}\right)$$



■ Bemerkungen: (ctd.)

- Aus den *Korrespondenztabelle*n zur Systemtheorie lassen sich charakteristische und erzeugende Funktion oft durch Ablesen bestimmen.

- **Beispiel:** Aus [PJ15], Anhang A, folgt

$$\mathcal{F} \left\{ e^{-at^2} \right\} (f) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{(\pi f)^2}{a}}$$

und damit für $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$:

$$\begin{aligned} \varphi_X(s) &= \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \right\} \left(-\frac{s}{2\pi} \right) \\ &\stackrel{a=\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} \cdot e^{-2 \left(-\pi \frac{s}{2\pi} \right)^2} \\ &= e^{-\frac{s^2}{2}} \end{aligned}$$

■ Bemerkungen:

- Für stetige Zufallsvariablen mit Dichte $f(x)$ ergibt sich aus der Analogie von charakteristischer Funktion und Fouriertransformation die Rücktransformation:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) e^{-jsx} ds$$

Somit wird im stetigen Fall die Dichte durch die charakteristische Funktion bestimmt.

5 Stetige Verteilungen

- Wiederholung
- Verteilungsfunktion und Dichte
- Kenngrößen stetiger Zufallsvariablen
- **Wichtige Verteilungen**
 - Die (stetige) Gleichverteilung
 - Die Exponentialverteilung
 - Die Normalverteilung
 - Die Weibullverteilung
- Funktionen von Zufallsvariablen
- Lernziele
- Literatur

- **Motivation:** Einige Verteilungen sind in der Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie von großer Bedeutung, weil sie sich als Modelle für bestimmte Phänomene bewährt haben.
- **Beispiele:**¹⁵
 - Modellieren des Rauschens in nachrichtentechnischen Systemen
 - Modellieren des Quantisierungsfehlers
 - Modellieren der Zeitdauer bis zum Eintritt eines bestimmten Ereignisses

¹⁵Es sei die Egozentrik verziehen, dass die Nachrichtentechnik in dieser Auflistung dominiert. Aufgrund des eigenen Arbeitsgebiets liegen diese Beispiele nahe.

■ Modell:

- Werte aus dem Kontinuum $[a, b)$ sollen mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten
- Da eine stetige Verteilung vorliegt: Beschreibung durch Dichte

■ Anwendung/Motivation:

- Beschreibung von Ankunftszeiten
- Modellierung des Quantisierungsfehlers [JW02]

Definition

Eine stetige Zufallsvariable ist *gleichverteilt* auf dem Intervall¹⁶ $[a, b)$, falls sie die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x < b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt. Man schreibt $X \sim \mathcal{U}([a, b))$.

¹⁶Es ist durch entsprechendes Anpassen der Dichte auch eine Gleichverteilung auf $[a, b]$, $(a, b]$... möglich.

■ Kenngrößen:¹⁷

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

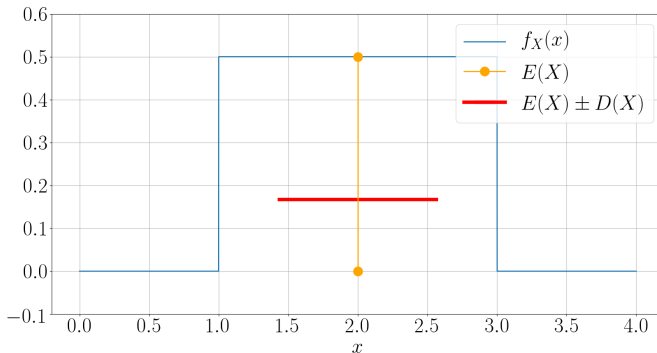
$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$D^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\varphi(s) = \frac{e^{jsb} - e^{jsa}}{js(b-a)}$$

¹⁷ **Nachweis:** Tafel

■ Illustration: Gleichverteilung auf $[1, 3]$



■ Beispiel:

- **Szenario:** Straßenbahnen fahren deterministisch alle 10 Minuten; Sie kommen zu einem zufälligen gleichverteilten Zeitpunkt an
- **Frage:** Wie lange warten Sie im Mittel? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mehr als 7 Minuten warten müssen?

■ Antwort:

- Ist die Ankunftszeit X auf $[0, 10]$ gleichverteilt, so ist die Wartezeit $10 - X$ ebenfalls auf $[0, 10]$ gleichverteilt.
- Die mittlere Wartezeit beträgt damit $\frac{10}{2} = 5$ Minuten.
- Die Wahrscheinlichkeit, mehr als 7 Minuten zu warten, ergibt sich zu:

$$P(\text{Wartezeit} > 7) = \int_0^3 f_X(x) dx = \int_0^3 \frac{1}{10} dx = 0.3$$

■ Beispiel:¹⁸ (Quantisierungsfehler, [JW02])

- Ein A/D-Wandler setzt analoge Signale in digitale Signale um. Hierbei *quantisiert* er die Amplitude, indem er einen analogen Wert auf einen diskreten Wert abbildet.
- Der Quantisierungsfehler wird oft als über die Quantisierungsstufe gleichverteilt angenommen.
- Falls die Höhe der Quantisierungsstufe ($\rightarrow$ Tafel) q beträgt, so folgt für den Quantisierungsfehler:

$$D^2(X) = \frac{q^2}{12}$$

Der Erwartungswert des Quantisierungsfehlers hängt von der Quantisierungs-Methode ab. ($\rightarrow$ Tafel)

¹⁸ **Datei:** quantization.ipynb

■ Modell:

- Werte aus dem Kontinuum $[0, \infty)$ sollen mit exponentiell abfallender Wahrscheinlichkeit auftreten
- Da eine stetige Verteilung vorliegt: Beschreibung durch Dichte

■ Anwendung/Motivation:

- Beschreibung von Dauern (etwa von Telefongesprächen)
- Beschreibung von Zerfallsvorgängen

Definition

Eine stetige Zufallsvariable ist *exponentialverteilt* mit Parameter $\lambda > 0$, falls sie die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

besitzt.

■ Kenngrößen:¹⁹

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & 0 \leq x \end{cases}$$

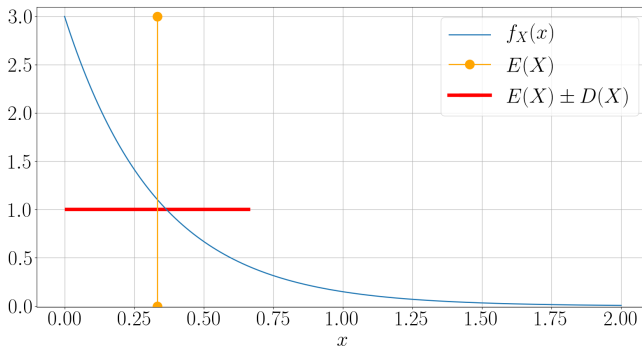
$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$D^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{1 - \frac{js}{\lambda}}$$

¹⁹ **Nachweis:** Tafel

■ Illustration: Exponentialverteilung mit $\lambda = 3$



- **Beispiel:** (Dauer eines Telefongesprächs, [JW02])
 - Die Dauer eines Telefongesprächs sei durch eine Exponentialverteilung mit Mittelwert 15 Min. modelliert.
 - **Frage:** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gespräch kürzer als 5 Min. bzw. länger als 1 Stunde dauert?
 - **Lösung:** Aus Mittelwert = 15 Min. folgt $\lambda = \frac{1}{15}$ 1/Min. Direktes Rechnen liefert:

$$P(X \leq 5) = F(5) = 1 - e^{-\frac{1}{15} \cdot 5} = 1 - e^{-0.33333} \approx 0.2834$$

$$P(X > 60) = 1 - F(60) = e^{-\frac{1}{15} \cdot 60} = e^{-4} \approx 0.01831$$

■ **Beispiel:** (Halbwertszeit, [Ren62])

- Für die Verteilungsfunktion der Lebensdauer eines radioaktiven Elements ergibt sich das Resultat:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

- Die Lebensdauer besitzt damit eine Exponentialverteilung²⁰ mit Parameter

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}},$$

wobei $T_{1/2}$ die Halbwertszeit bezeichnet.

■ **Zahlenbeispiele:**²¹

- Radium: 1580 Jahre, $\lambda = 4.4 \cdot 10^{-4}$ 1/Jahr
- ^{238}U : 4 468 000 000 Jahre $\implies \lambda \approx 1.6 \cdot 10^{-10}$ 1/Jahr

²⁰ $\rightarrow$ Exponentielles Zerfallsgesetz

²¹ Quellen: [Ren62]; <https://de.wikipedia.org/wiki/Halbwertszeit>, abgerufen am 5.9.2016

■ Modell:

- Werte aus dem Kontinuum $\mathbb{R}$ können auftreten
- In einem noch zu definierenden Sinn soll die Verteilung „normal“ (häufig auftretend) sein

■ Anwendung/Beispiele:

- Rauschamplitude in nachrichtentechnischen Systemen
- Größe einer Person
- Viele, viele weitere Beispiele



Definition

Eine stetige Zufallsvariable ist *normalverteilt* mit Parametern μ, σ^2 , falls sie die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

besitzt. Man schreibt $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

■ Kenngrößen:²²

$$\Phi(x) := F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

$$E(X) = \mu$$

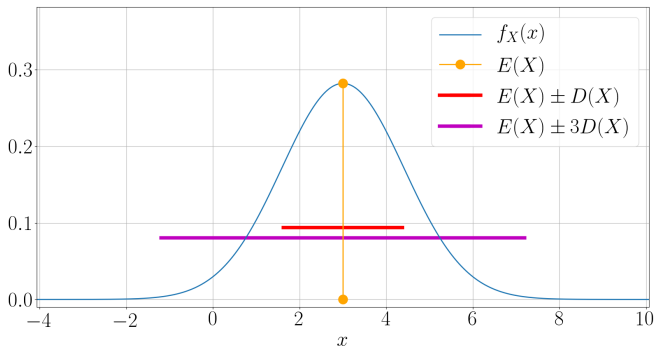
$$D^2(X) = \sigma^2$$

$$E((X - E(X))^k) = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdots (k-1)\sigma^k, & k \text{ gerade} \\ 0, & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\varphi(s) = e^{js\mu} e^{-\frac{(\sigma s)^2}{2}}$$

²² Insbesondere ist die Verteilungsfunktion der Normalverteilung nicht geschlossen darstellbar.

■ Illustration: Normalverteilung $\mathcal{N}(3, 2)$



■ Bemerkungen:

- Die Normalverteilung ist eine der wichtigsten Verteilungen, deren Bedeutung für die Praxis nicht überschätzt werden kann.
- Wie sich zeigen wird, ist eine Überlagerung mehrerer unabhängiger Anteile unter gewissen Randbedingungen stets normalverteilt.
- Da die Verteilungsfunktion nicht geschlossen darstellbar ist, muss mit Tabellen²³ gearbeitet werden. Hierzu führt man über $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ eine Standardisierung durch und liest die gesuchte Wahrscheinlichkeit aus Tabellen für $\mathcal{N}(0, 1)$ ab.
- Es gelten die Zusammenhänge:²⁴

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x); \quad \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1$$

²³ ... oder PC-Tools...

²⁴ **Nachweis:** Übung/Tafel

■ Bezug zur Fehlerfunktion:

- Die (Gaußsche) Fehlerfunktion und die komplementäre (Gaußsche) Fehlerfunktion sind definiert durch

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

■ Rechenregeln:

$$\Phi(x) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x),$$

$$\operatorname{erfc}(-x) = 2 - \operatorname{erfc}(x),$$

$$\operatorname{erf}(0) = 0, \operatorname{erf}(\infty) = 1$$

$$\operatorname{erfc}(0) = 1, \operatorname{erfc}(\infty) = 0$$



■ Bezug zur Q -Funktion:

- Die Q -Funktion ist definiert durch

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

■ Rechenregeln:

$$\Phi(x) = 1 - Q(x)$$

$$Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$



■ Bemerkungen:

- Die Q -Funktion beschreibt die komplementäre Verteilungsfunktion²⁵, also die Wahrscheinlichkeit, dass eine normalverteilte Zufallsvariable einen Wert größer als x annimmt.

Bei der Analyse von Fehlerwahrscheinlichkeiten in der Nachrichtenübertragung wird oft die Q -Funktion verwendet.

²⁵Engl.: *Complementary cumulative distribution function, ccdf*

■ Bemerkungen: (ctd.)

- Für normalverteilte X gelten die Approximationen

$$P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) \approx 0.68$$

$$P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.955$$

$$P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.997$$

Anschaulich: „Nahezu alle“ Werte liegen zwischen den 3σ -Grenzen $\mu - 3\sigma$ und $\mu + 3\sigma$

- Da „nahezu alle“ Werte im Bereich um den Erwartungswert liegen, kommen sehr stark abweichende Werte selten vor. Somit kann die Normalverteilung auch dann als Modell verwendet werden, falls gewisse Wertebereich gar nicht möglich sind, wie etwa bei der Modellierung der Körpergröße oder des IQ. Siehe auch das folgende Beispiel.

■ Beispiel:

- Der Intelligenzquotient kann als normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 100$ und $\sigma = 15$ modelliert werden. [Hen13]
- **Frage:** Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der IQ einer zufällig gewählten Person zwischen 75 und 125? Mit welcher Wahrscheinlichkeit über 125?

■ Antwort:

- Beschreibt X den IQ einer zufällig gewählten Person, so gilt $X \sim \mathcal{N}(100, 225)$.
- Normierung liefert:

$$Y := \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Nach Normierung kann nun die tabellierte Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung verwendet werden.

■ Beispiel: (ctd.)

■ Antwort: (ctd.)

- Rechnung ergibt ($Y = (X - 100)/15$):

$$\begin{aligned}P(X \in [75, 125]) &= P\left(Y \in \left[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right]\right) = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) \\&= 2\Phi\left(\frac{5}{3}\right) - 1 \approx 2 \cdot 0.9515427 - 1 = 0.903\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X > 125) &= \frac{1}{2} (1 - P(X \in [75, 125])) \\&\approx 0.0485\end{aligned}$$

- **Hinweis:** Die Weibullverteilung wird in dieser Vorlesung nicht besprochen. Sie kann bei Interesse in [JW02] nachgelesen werden.

5 Stetige Verteilungen

- Wiederholung
- Verteilungsfunktion und Dichte
- Kenngrößen stetiger Zufallsvariablen
- Wichtige Verteilungen
- Funktionen von Zufallsvariablen
- Lernziele
- Literatur



■ Motivation:

- Verteilung/Dichte einer Zufallsvariablen X sei bekannt
- Gesucht wird die Verteilung/Dichte einer Zufallsvariablen Y , die sich über $Y = g(X)$ als Funktion von X darstellen lässt

■ Lösung:

- Umformen der Wahrscheinlichkeiten ähnlich zu:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = \dots = P(X \leq \cdot)$$

- Erhalte Dichte durch Ableiten:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \dots$$

- **Hinweis:** Die folgenden Betrachtungen motivieren das Vorgehen anhand von Beispielen und sind nicht allgemeingültig

- **1. Fall:** $g(\cdot)$ ist eineindeutig und umkehrbar

- **Vorgehen:** Auflösen von $P(Y \leq y)$ hin zu $P(X \leq x)$ und ableiten

- **Beispiel:** Für $Y = aX + b$ mit $a > 0$ ergibt sich²⁶

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

und damit

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

²⁶ **Frage/Übung:** Wieso $a > 0$? Was passiert bei $a < 0$?



■ Beispiele:

- Wendet man auf die Standardnormalverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

die Transformation $Y = \sigma X + \mu$ an, so hat Y die Dichte

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad y \in \mathbb{R},$$

also eine Normalverteilung mit Erwartungswert $E(Y) = \mu$ und Varianz σ^2 .

■ Beispiel:²⁷

- Es sei $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ und $X := e^Y$; dann folgt für $x \geq 0$:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(Y \leq \ln(x)) = \Phi_{\mu, \sigma^2}(\ln(x))$$

und

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx} \Phi_{\mu, \sigma^2}(\ln(x)) \\ &= \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

- X besitzt eine *Log-Normalverteilung* mit:

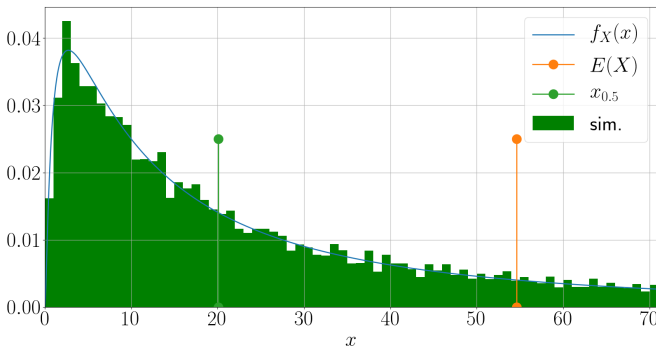
$$x_0 = e^{\mu-\sigma^2} < x_{\frac{1}{2}} = e^{\mu} < E(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$$

²⁷Nach [Hen13, S. 304]



■ Beispiel:²⁸ (ctd.)

■ **Illustration:** Log-Normalverteilung für $\mu = 3$ und $\sigma^2 = 2$



²⁸Nach [Hen13, S. 304]

■ Beispiel: (ctd.)

■ Ergänzung: Log-normalverteilte Zufallsgrößen dienen der Modellierung von

- Einkommensverteilungen ([Hen13, S. 304])
 - Schadenshöhen im Versicherungswesen ([Hen13, S. 304])
 - Abschattungseffekten bei der Wellenausbreitung ([Gol05, S. 49])
-
- Es gibt sehr viele „kleine bis mittel-kleine“ und wenige „sehr große“ Werte.
 - Die wenigen großen Werte verschieben den Erwartungswert deutlich zu großen Werten hin.

Hinweis

- Wie bei der Log-Normalverteilung wurden und werden in vielen Beispielen neben theoretischen Verteilungen auch Approximationen gezeigt, die durch Berechnung relativer Häufigkeiten entstehen (sogenannte *Histogramme*).
- Ist die Anzahl der Realisierung hoch, so wird das Histogramm vermutlich sehr ähnlich zur tatsächlichen Dichte sein. Es ist allerdings zu beachten, dass Klassenanzahl, Klassenbreite etc. das Histogramm beeinflussen.
- Zudem basiert die Beurteilung „sehr ähnlich“ auf unserer optischen Wahrnehmung. Mathematisch präziser arbeiten *Verteilungstests*, die allerdings nicht Gegenstand der Vorlesung sind.



■ **1. Fall:** $g(\cdot)$ ist eineindeutig und umkehrbar (ctd.)

■ **Beispiel:** $Y = aX^3 + b$, $a > 0$; es folgt

$$F_Y(y) = P(aX^3 + b \leq y) = P\left(X \leq \sqrt[3]{\frac{y-b}{a}}\right) = F_X\left(\sqrt[3]{\frac{y-b}{a}}\right)$$

und damit

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X\left(\sqrt[3]{\frac{y-b}{a}}\right) = \frac{1}{3a} \left(\frac{y-b}{a}\right)^{-\frac{2}{3}} f_X\left(\sqrt[3]{\frac{y-b}{a}}\right)$$

- **1. Fall:** $g(\cdot)$ ist eineindeutig und umkehrbar

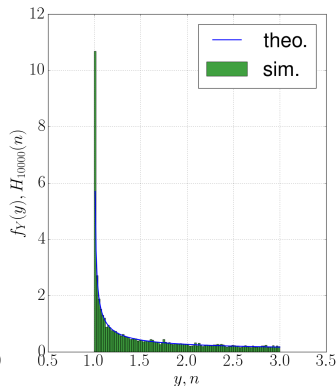
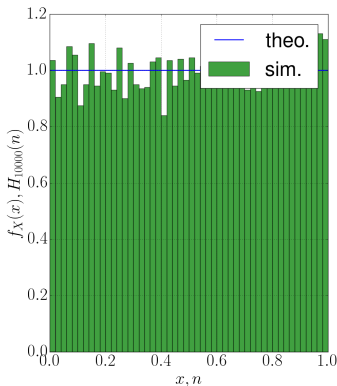
- **Beispiele:**

- Ist $Y = aX + b$ mit $a > 0$ und X gleichverteilt auf $[0, 1]$, so besitzt Y eine Gleichverteilung auf $[b, b + a]$.
 - Für $Y = aX^3 + b$, $a > 0$ und X gleichverteilt auf $[0, 1]$ folgt:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq b, y > a + b \\ \frac{1}{3a} \left(\frac{y-b}{a} \right)^{-\frac{2}{3}}, & b < y \leq a + b \end{cases}$$

Funktionen von Zufallsvariablen

- **Beispiel:**²⁹ Simulation von 10 000 Realisierungen einer Gleichverteilung und Transformation über $Y = 2 \cdot X^3 + 1$



²⁹ **Datei:** function_random_variable.ipynb

- **2. Fall:** Funktion $g(\cdot)$ ist nicht eineindeutig und umkehrbar

- **Beispiel:** Im Fall $Y = aX^2 + b$, $a > 0$, ergibt sich für³⁰ $y > b$

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(aX^2 + b \leq y) = P\left(|X| \leq \sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) \\&= F_X\left(\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right)\end{aligned}$$

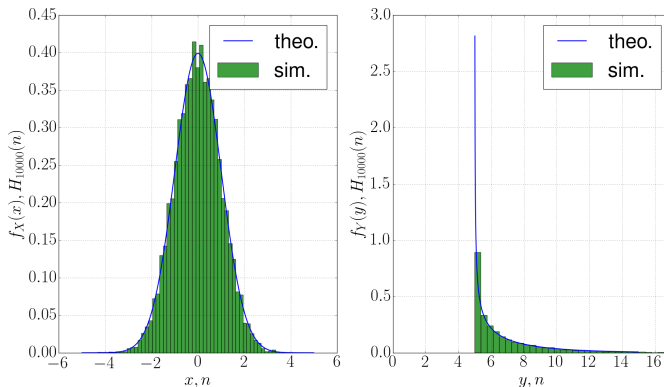
und schließlich

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2a} \left(\frac{y-b}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[f_X\left(\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) + f_X\left(-\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) \right], & y > b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

³⁰ **Frage/Übung:** Was ist für $y < b$?



- **Beispiel:**³¹ Simulation von 10 000 Realisierungen einer Standardnormalverteilung und Transformation über $Y = 2 \cdot X^2 + 5$



³¹ **Datei:** function_random_variable.ipynb

■ Bemerkungen:

- Das Ergebnis im 2. Fall kann geschrieben werden als

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|},$$

wobei $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{y-b}{a}}$ die Lösungen der Gleichung $y = ax^2 + b$ sind.

- Im allgemeinen Fall von N Lösungen $x_1, \dots, x_N$ der Gleichung $y = g(x)$ folgt

$$f_Y(y) = \sum_{n=1}^N \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|},$$

wobei die Definitionsbereiche der Funktion und der Dichte zu beachten sind.
[Pap91]

5 Stetige Verteilungen

- Wiederholung
- Verteilungsfunktion und Dichte
- Kenngrößen stetiger Zufallsvariablen
- Wichtige Verteilungen
- Funktionen von Zufallsvariablen
- **Lernziele**
- Literatur



- Die folgende Aufstellung fasst die zentralen Punkte zusammen.
- Es wird aufgezeigt, welche Punkte nach Bearbeitung des Kapitels klar sein sollten.
- **Hinweise:**
 - Die Auflistung ist nicht vollständig, sondern führt die wichtigsten Aussagen auf; nicht erwähnte Inhalte sind dennoch bedeutsam.
 - Oft enthalten die Nachweise wichtige Ideen; diese also nicht vernachlässigen.
 - Stets versuchen, Gleichungen in Verbindung mit Interpretationen und Anwendungen zu sehen
 - Des weiteren sollten alle kleinen nützlichen Ergänzungen verstanden sein.
 - Es ist immer eine gute Idee, etwas Gelerntes im Rechner umzusetzen. Dies hilft beim Verständnis und schärft das Bewusstsein für mögliche Probleme.



Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Grundgedanke und Notwendigkeit der Messbarkeit
- Verteilungsfunktion und Eigenschaften
- Dichte im stetigen und diskreten Fall; stetige Verteilungen haben Punktmassen 0
- δ -Distribution
- Motivation der Verwendung von Momenten
- Erwartungswert, Varianz und k -te Momente inkl. Rechenregeln
- Modalwert, Quantile, Median



Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Modalwert, Quantile, Median
- Charakteristische und erzeugende Funktion; Zusammenhang zu Momenten; Zusammenhang zur Systemtheorie
- Abbilden von Zufallsvariablen und Bildverteilung
- Wichtige Verteilungen und ihre Eigenschaften; insbesondere die *Normalverteilung*
 - $1/2/3$ – σ -Approximation und Verwendbarkeit der Normalverteilung
 - Zusammenhang zur Fehlerfunktion und zur Q -Funktion

5 Stetige Verteilungen

- Wiederholung
- Verteilungsfunktion und Dichte
- Kenngrößen stetiger Zufallsvariablen
- Wichtige Verteilungen
- Funktionen von Zufallsvariablen
- Lernziele
- Literatur



- [JW02] F. Jondral, A. Wiesler, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse*, Teubner, 2002
- [Kre91] U. Krengel, *Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, Vieweg, 1991
- [Ren62] A. Rényi, *Wahrscheinlichkeitsrechnung – mit einem Anhang über Informationstheorie*, VEB Verlag der Wissenschaften, 1962
- [Hen13] N. Henze. *Stochastik für Einsteiger – Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls*, Springer, 2013
- [Pap91] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 3rd Ed., New York 1991: McGraw-Hill, Inc.
- [PJ15] F. Puente Leon, H. Jäkel, *Signale und Systeme*, Oldenbourg, 2015
- [Gol05] A. Goldsmith, *Wireless Communications*, Cambridge University Press, 2005