Karlsruher Institut für Technologie

Wahrscheinlichkeitstheorie – Grundlagen stochastischer Prozesse

Holger Jäkel

Communications Engineering Lab (CEL)

Übersicht

Referenz

- Folgende Diskussionen erfolgen gemäß[1]

[JW02]: F. Jondral, A. Wiesler, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse*, Teubner, 2002

[1] Von dort entstammt die Struktur der Folien, die Formeln und die meisten Bilder.

Referenz

- **Vorbemerkungen:**
  Das folgende Kapitel ist relativ „puristisch“, redundanzbefreit und enthält weniger Beispiele als das bisher der Fall war.
  Dies liegt darin begründet, dass das anschließende Kapitel 9 „Spezielle stochastische Prozesse“ einige Beispiele behandelt, die für die Anwendung von großer Bedeutung sind. Somit sind Theorie und Anwendung stärker als bisher getrennt.

Übersicht

Definition stochastischer Prozesse

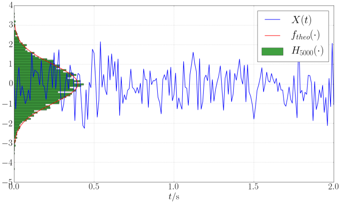
- **Motivation:** Viele technisch relevante Zufallseinflüsse sind zeitabhängig
  $\Longrightarrow$ Modellierung zeitlich veränderlichen Zufalls

- **Beispiel:** Spannung über einem Widerstand kann näherungsweise über eine Gaußverteilung modelliert werden. [Nyq28]

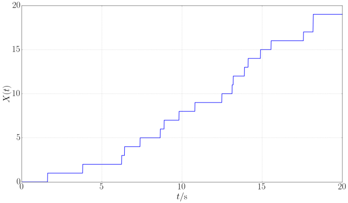
Definition stochastischer Prozesse

- **Beispiel:**[2]

Thermisches Rauschen



Poisson-Zählprozess



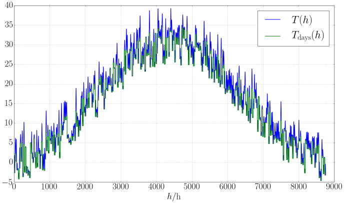
[2] **Dateien:** white_noise.ipynb; poisson.ipynb

Definition stochastischer Prozesse

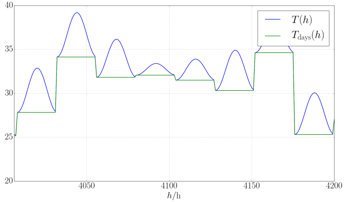
Karlsruher Institut für Technologie

- **Beispiel:**

Jahresverlauf Temperatur



Tagesverläufe Temperatur



Definition stochastischer Prozesse

- **Beispiel:**
  - Die Temperaturverläufe wurden erzeugt mittels der Vorschrift[3]:

$$
\begin{aligned}
T(h) = {} & 15 \cdot \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{h \text{ div } 24}{365}\right)\right) \\
& + T_{h \text{ div } 24} \\
& + \Delta_{h \text{ div } 24} \cdot \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{h \bmod 24}{24}\right)\right)
\end{aligned}
$$

für Stunden $h \in \{0, 1, \ldots, 8\,759 = 24 \cdot 365 - 1\}$ und mit:

- Sinus-Form über das Jahr
- Zufälliger Tagesoffset $T_{h \text{ div } 24} \sim \mathcal{U}\left([-5, 5)\right)$
- Zufälliger Temperaturhub pro Tag $\Delta_{h \text{ div } 24} \sim \mathcal{U}\left([0, 3)\right)$
- Sinus-Form über den Tag

[3] **Hinweis:** Die Kurve wurde ad-hoc konstruiert und entspricht meinem Wissen zufolge keinem gängigen Modell, sondern soll lediglich als Beispiel dienen.

Definition stochastischer Prozesse

- **Beispiel:** (ctd.)
  - Beschränkt man sich auf den Verlauf pro Tag, so folgt:[4]

$$T(h) = T_{\text{day}} + \Delta_{\text{day}} \cdot \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{h}{24}\right)\right), \qquad h \in \{k \cdot 24, ..., k \cdot 24 + 23\}$$

mit[5]

$$\begin{aligned} T_{\text{day}} &\sim \mathcal{U}\left([T_{\text{day},0} - 5, T_{\text{day},0} + 5)\right) \\ \Delta_{\text{day}} &\sim \mathcal{U}\left([0, 3)\right) \end{aligned}$$

und Tages-Nullwert:[6]

$$T_{\text{day},0} = 15 \cdot \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{h \operatorname{div} 24}{365}\right)\right)$$

---

[4] Über $h = 24 \cdot (h \operatorname{div} 24) + (h \mod 24)$ folgt $\cos\left(2\pi \frac{h \mod 24}{24}\right) = \cos\left(2\pi \frac{h}{24}\right)$.
[5] Beachte, dass $0 \leq 1 - \cos(\cdot) \leq 2$; der Vorfaktor entspricht demnach nur der halben Gesamtdifferenz.
[6] Beachte, dass der Tag von h abhängt! Dies Abhängigkeit wird zur Vereinfachung unterdrückt.

Definition stochastischer Prozesse

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Ein *reellwertiger stochastischer Prozess* ist eine Familie von reellwertigen Zufallsvariablen, die mit einem Parameter t indiziert ist:

$$X(t, \omega) : \mathcal{T} \times \Omega \to \mathbb{R}$$

Definition stochastischer Prozesse

- **Bemerkungen:**
  - Wie in der Motivation wird $t \in \mathcal{T}$ oft als Zeit interpretiert.
  - Für festes t_0 ist $X(t_0, \omega)$ eine „normale“ Zufallsvariable.
  - Für festes ω_0 ist $X(t, \omega_0)$ eine Zeitfunktion. Diese wird als *Realisierung* oder als *Pfad* eines Prozesses bezeichnet.[7]

- **Konvention:** Eine gängige Konvention referenziert den stochastischen Prozess als $X(t)$ unter Weglassen der Argumentes „ω“; durch Großschreibung wird der Zufallscharakter deutlich.

[7] Somit sind alle Beispiele auf Folie **??** Pfade des zugrundeliegenden Prozesses.

Definition stochastischer Prozesse

- **Aussage:** Die stochastische Beschreibung eines stochastischen Prozesses wird charakterisiert, indem *für jedes* $N \in \mathbb{N}$, *für alle* $t_1 < \cdots < t_N$ und *für alle* $x_{t_1}, \ldots, x_{t_N} \in \mathbb{R}$ die Verteilung

$$P(X(t_1) \leq x_{t_1}, X(t_2) \leq x_{t_2}, \ldots X(t_N) \leq x_{t_N})$$

beschrieben wird. [Gal08]

- **Beobachtung:** Obige (theoretische) Charakterisierung ist sehr umständlich und praktisch nicht möglich; in einigen Fällen vereinfacht sich diese...

Definition stochastischer Prozesse

Definition

Ein reellwertiger stochastischer Prozess $X(t)$ heißt *stark stationär*, falls *für jedes* $N \in \mathbb{N}$, *für alle* $t_1 < \cdots < t_N$ und *für alle* $x_{t_1}, \ldots, x_{t_N} \in \mathbb{R}$ und $h \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f_{(X(t_1),\ldots,X(t_N))}(x_{t_1}, \ldots, x_{t_N}) = f_{(X(t_1+h),\ldots,X(t_N+h))}(x_{t_1}, \ldots, x_{t_N})$$

Definition stochastischer Prozesse

- **Bemerkungen:**
  - Bei stark stationären Prozessen sind alle Verteilungen gegenüber Zeitverschiebungen invariant.
  - Insbesondere folgt mit $N = 1$,

$$f_{X(t)}(x) = f_{X(t+h)}(x),$$

    d. h. die Verteilung ist für jeden Zeitpunkt identisch.
    „Der Zufall sieht zu allen Zeiten gleich aus."

  - Die Formulierung erfolgt hier und im Folgenden mit Dichten. Diskrete Modelle seien gemäß der Darstellung über Dirac-Funktionen eingebettet.

Definition stochastischer Prozesse

- **Beispiele:** (Bezug zu Folien 7, 8)
  - In „unserem Temperaturmodell“ ist der Tagesverlauf zeitabhängig. Somit ist dieser Prozess auch bei Betrachtung nur eines Tages nicht stark stationär.
  - Die Verteilung der Rauschamplitude ist für alle Zeitpunkt identisch. Der Prozess ist stark stationär.

- **Beispiele:** (Sonstige)
  - Die Temperatur in Karlsruhe ist weder über den Tag noch über das Jahr betrachtet stark stationär.
  - Die Temperatur in einem Kühlschrank ist stark stationär, wenn man davon ausgeht, dass Schwankungen durch den Wärmetauscher bedingt sind und der Mechanismus unabhängig von der Außentemperatur regelt.[8]

[8] ... zumindest wenn er nie geöffnet wird...

Übersicht

Scharmittelwerte

- **Ansatz:** Für festes t_0 ist $X(t_0)$ eine Zufallsvariable $\Longrightarrow$ Betrachte deren Verteilung bzw. deren Momente.

Scharmittelwerte

Definition

Für einen reellwertigen stochastischen Prozess $X(t)$ ist das k*-te Moment* definiert durch:

$$E\left(X^k(t_n)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_n}^k f_{X(t_n)}(x_{t_n})\,\mathrm{d}x_{t_n}$$

Scharmittelwerte

- **Bemerkungen:**
  - Die Momente entstehen durch Erwartungswertbildung (in „Zufallsrichtung“) und werden deshalb als *Scharmittelwerte* bezeichnet.[9]
  - Da die Verteilung eines stochastischen Prozesses zeitabhängig ist/sein kann, sind die Momente zeitabhängig.
  - Ist der Prozess stark stationär, so sind die Momente nicht von der Zeit t_n abhängig.

[9] Der Begriff wird streng gefasst, um ihn von der bald diskutierten Mittelung in Zeitrichtung zu unterscheiden.

Scharmittelwerte

Definition

Für einen reellwertigen stochastischen Prozess $X(t)$ ist die *Autokorrelationsfunktion, AKF,* gegeben durch:

$$\begin{aligned}\varphi_{XX}(t_1,t_2) &= E(X(t_1)X(t_2)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} x_{t_2} f_{(X(t_1),X(t_2))}(x_{t_1},x_{t_2})\,\mathrm{d}x_{t_1}\,\mathrm{d}x_{t_2}\end{aligned}$$

Scharmittelwerte

- **Anschauung:**
  - Die AKF berechnet die Korrelation der Zufallsvariablen $X(t_1)$ und $X(t_2)$: „Wie ähnlich sind die jeweiligen Werte?“
  - Sind $X(t_1)$ und $X(t_2)$ unabhängig, so folgt

$$\varphi_{XX}(t_1, t_2) = \mu_{X(t_1)}\mu_{X(t_2)};$$

ist zusätzlich mindestens ein Prozess mittelwertfrei, so folgt

$$\varphi_{XX}(t_1, t_2) = 0.$$

Scharmittelwerte

Satz

Die AKF eines stark stationären, reellwertigen stochastischen Prozesses $X(t)$ ist nur von der Zeitdifferenz abhängig:

$$\varphi_{XX}(t_1, t_2) = E(X(t_1)X(t_2)) = \varphi_{XX}(t_1 - t_2)$$

Oft setzt man in diesem Fall $t_1 = t, \tau := t_1 - t_2$ und erhält:

$$\varphi_{XX}(\tau) = \varphi_{XX}(t, t - \tau) = E(X(t)X(t - \tau))$$

- **Nachweis:** Die Aussage folgt, da für stark stationäre Prozesse

$$f_{(X(t_1),X(t_2))}(x_{t_1}, x_{t_2}) = f_{(X(t_1+h),X(t_2+h))}(x_{t_1}, x_{t_2})$$

ist und somit die AKF bzgl. Verschiebungen invariant ist. ■

Scharmittelwerte

Satz

Die AKF eines stark stationären, reellwertigen stochastischen Prozesses $X(t)$ ist eine reelle und in τ gerade Funktion,

$$\varphi_{XX}(-\tau) = \varphi_{XX}(\tau),$$

die ihr Maximum in $\tau = 0$ besitzt:

$$|\varphi_{XX}(\tau)| \leq \varphi_{XX}(0)$$

Scharmittelwerte

- **Nachweis:**
  - Die erste Aussage folgt aus:

$$\varphi_{XX}(-\tau) = E(X(t)X(t+\tau)) \overset{t'=t+\tau}{=} E(X(t')X(t'-\tau)) = \varphi_{XX}(\tau)$$

    und der Tatsache, dass Erwartungswerte über reelle Größen reell sind.
  - Die Maximaleigenschaft ergibt sich über:

$$\begin{aligned}
|\varphi_{XX}(\tau)|^2 &\overset{(a)}{=} |E((X(t)X(t-\tau))|^2 \\
&\overset{(b)}{=} |\langle X(t), X(t-\tau)\rangle|^2 \\
&\overset{(c)}{\leq} |\langle X(t), X(t)\rangle| \cdot |\langle X(t), X(t-\tau)\rangle| \\
&\overset{(b)}{=} E(X(t)X(t)) \cdot (E(X(t-\tau)X(t-\tau)) \\
&\overset{(a)}{=} \varphi_{XX}(0)^2
\end{aligned}$$

    wobei (a) die Def. der AKF, (b) die Def. des Innenprodukts $\langle X, Y\rangle := E(XY)$ für Zufallsvariablen und (c) die Cauchy-Schwarz-Ungleichung ([PJ15]) ist. ■

Scharmittelwerte

Karlsruher Institut für Technologie

Hinweis

Die Definition der AKF bei stationären Prozessen unterscheidet sich von [JW02]! In der Vorlesung verwenden wir die Definition[10]

$$\varphi_{XX}(t_1, t_2) = \varphi_{XX}(t_1 - t_2) = \varphi_{XX}(\tau) = E(X(t)X(t-\tau));$$

in [JW02] wird verwendet:

$$\widetilde{\varphi}_{XX}(t_1, t_2) = \widetilde{\varphi}_{XX}(t_2 - t_1) = \widetilde{\varphi}_{XX}(\tau) = E(X(t)X(t+\tau))$$

Offensichtlich ist:

$$\widetilde{\varphi}_{XX}(\tau) = \varphi_{XX}(-\tau)$$

Aus Folie 24 folgt, dass die beiden Definitionen *für reellwertige Prozesse* äquivalent sind.

[10] Die Begründung für die getroffene Konvention wird auf einen späteren Zeitpunkt vertagt.

Scharmittelwerte

Definition

Ein reellwertiger stochastischer Prozess $X(t)$ heißt *(schwach) stationär*, wenn

$$
\begin{aligned}
E(X(t)) &= m \\
\varphi_{XX}(t_1, t_2) &= \varphi_{XX}(t_1 - t_2) = \varphi_{XX}(\tau)
\end{aligned}
$$

ist.
Die *mittlere Leistung* eines (schwach) stationären Prozesses ist definiert durch:[11]

$$\varphi_{XX}(0) = E(X^2(t)).$$

[11] Die Begründung für diese Definition erfolgt in Kürze.

Scharmittelwerte

- **Bemerkungen:**
  - Meist spricht man nur von stationär und meint damit schwach stationär. Auf starke Stationarität wird gesondert hingewiesen.
  - Bzgl. der ersten beiden Momente verhält sich ein schwach stationärer Prozess wie ein stark stationärer Prozess.
  - Jeder stark stationäre Prozess ist (schwach) stationär.

Scharmittelwerte

- **Beispiel:**[12]
  - Betrachtet wird eine Schwingung mit zufälliger Amplitude und Phase:

    $$X(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \phi), \quad A \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \phi \sim \mathcal{U}[0, 2\pi)$$

    Dieser Prozess ist schwach stationär, da gilt:

    $$E(X(t)) = E(A)E(\sin(2\pi f_0 t + \phi)) = 0$$

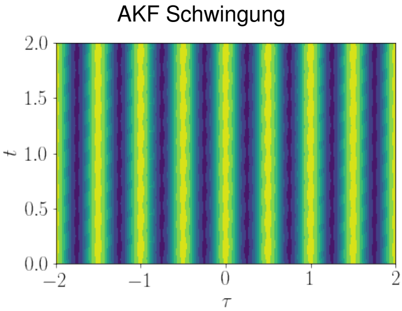
    $$\varphi_{XX}(t, t-\tau) \overset{\text{Übung}}{=} \cdots = \frac{\sigma^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

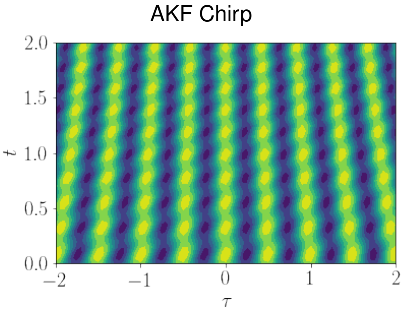
  - Betrachtet man stattdessen eine Schwingung mit ansteigender Frequenz[13] $f(t) = f_0 + \Delta_f t$, so ist der Prozess nicht mehr stationär. (**Übung**)

[12] **Datei:** weakly_stationary.ipynb
[13] ... sogenannter *Chirp*

Scharmittelwerte

- **Beispiel:**[14] (ctd.)





[14] **Datei:** weakly_stationary.ipynb

Scharmittelwerte

- **Beispiel:**
  - Für die AKF des Tagesverlaufs in dem Temperaturmodell folgt:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{TT}(h_1,h_2) &= E(T(h_1)T(h_2)) \\
&= E\left(\left[T_{\text{day}} + \Delta_{\text{day}} \cdot \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{h_1}{24}\right)\right)\right]\right. \\
&\qquad \left.\cdot \left[T_{\text{day}} + \Delta_{\text{day}} \cdot \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{h_2}{24}\right)\right)\right]\right) \\
&= E\left(T_{\text{day}}^2\right) \\
&\qquad + E\left(\Delta_{\text{day}}^2\right) \cdot \left(1 - \cos\frac{2\pi h_1}{24}\right) \cdot \left(1 - \cos\frac{2\pi h_2}{24}\right) \\
&\qquad + E\left(T_{\text{day}}\right) E\left(\Delta_{\text{day}}\right) \cdot \left[1 - \cos\frac{2\pi h_1}{24} + 1 - \cos\frac{2\pi h_2}{24}\right]
\end{aligned}
$$

Scharmittelwerte

- **Beispiel:** (ctd.)
  - Setzt man[15] $h_1 = 0$, so berechnet man die Korrelation der Temperatur in h_2 zu derjenigen in $h_1 = 0$:

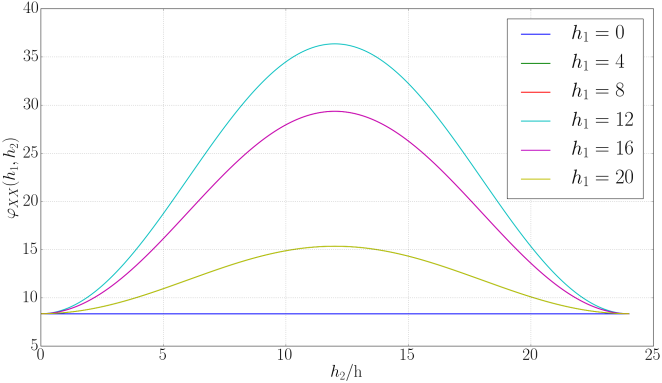
$$\begin{aligned}
\varphi_{TT}(0, h_2) = E\left(T_{\text{day}}^2\right) \\
&+ E\left(T_{\text{day}}\right) E\left(\Delta_{\text{day}}\right) \cdot \left[1 - \cos \frac{2\pi h_2}{24}\right] \\
&= E\left(T_{\text{day}}^2\right) + E\left(T_{\text{day}}\right) E\left(\Delta_{\text{day}}\right) \cdot \left[1 - \cos \frac{2\pi h_2}{24}\right] \\
&\overset{(a)}{=} E\left(T_{\text{day}}^2\right)
\end{aligned}$$

  - **Frage/Übung:** Begründen Sie (a). Interpretieren Sie das Ergebnis.

[15] Die Einheit „h“ wird zur Vereinfachung weggelassen.

Scharmittelwerte

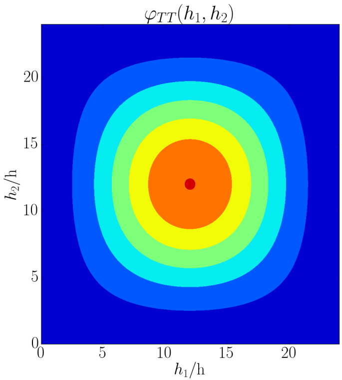
- **Beispiel:** (ctd.)
  - Darstellung der AKF[16] für verschiedene Werte von h_1



[16] **Frage:** Ist dieser Prozess (schwach) stationär? Wo sind die Kurven für $h_1 = 4, 8$?

Scharmittelwerte

- **Beispiel:** (ctd.)
  - Darstellung der AKF[17] als Funktion von h_1, h_2



[17] **Frage:** Ist dieser Prozess (schwach) stationär?

Scharmittelwerte

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Für einen reellwertigen stochastischen Prozess $X(t)$ ist die *Autokovarianzfunktion* gegeben durch:

$$\begin{aligned} c_{XX}(t_1,t_2) &= E\Big([X(t_1) - E(X(t_1))] \cdot [X(t_2) - E(X(t_2))] \Big) \\ &= \varphi_{XX}(t_1,t_2) - \mu(t_1)\cdot\mu(t_2) \end{aligned}$$

Ist der Prozess stationär, so lautet die Autokovarianzfunktion

$$\begin{aligned} c_{XX}(t_1,t_2) &= c_{XX}(t_1 - t_2) \\ &= c_{XX}(\tau) \\ &= \varphi_{XX}(\tau) - \mu^2. \end{aligned}$$

Scharmittelwerte

Definition

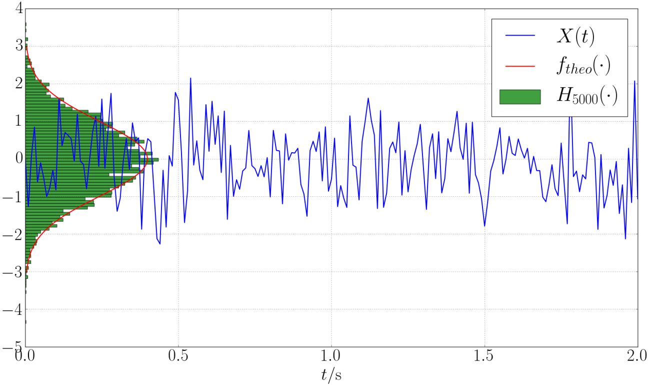
Ein reellwertiger stochastischer Prozess $X(t)$ ist ein *normaler Prozess* oder ein *Gaußprozess*, falls

$$(X(t_1), \ldots, X(t_N))^{\mathrm{T}}$$

für jedes $N \in \mathbb{N}$ und *für alle* $t_1 < \cdots < t_N$ eine N-dimensionale Normalverteilung besitzt.

Scharmittelwerte

- **Beispiel:**[18] Realisierung eines Gaußprozesses



18 **Datei:** white_noise.ipynb

Scharmittelwerte

- **Bemerkungen:**
  - Falls ein normaler Prozess schwach stationär ist, so sind Erwartungswert und Autokovarianzmatrix konstant bzw. nur von den Zeitdifferenzen abhängig.
  - Da eine Normalverteilung durch Erwartungswert und Autokovarianzmatrix aber vollständig bestimmt ist, wird hierdurch die komplette Verteilung des Prozesses und somit der Prozess charakterisiert. Es folgt:

> Für normale Prozesse sind schwache Stationarität und starke Stationarität äquivalent.

Scharmittelwerte

- **Stand:** Beschreibung der Verteilung (inneren Struktur) eines Prozesses
- **Fehlt:** Vergleichen der Ähnlichkeiten und Abhängigkeit zweier Prozesse

Scharmittelwerte

Definition

Sind $X(t)$, $Y(t)$ zwei reellwertige stochastische Prozesse, so werden die Prozesse gemeinsam durch die Verbunddichten

$$f_{XY}(x_{t_1}, \ldots, x_{t_N}, y_{t'_1}, \ldots, y_{t'_M})$$

charakterisiert.
Die *Kreuzkorrelationsfunktion, KKF,* ist

$$\varphi_{XY}(t_1, t_2) = E(X(t_1)Y(t_2))$$

und die *Kreuzkovarianzfunktion*

$$c_{XY}(t_1, t_2) = E(X(t_1)Y(t_2)) - \mu_X(t_1)\mu_Y(t_2).$$

Scharmittelwerte

Definition/Satz

Zwei reellwertige stochastische Prozesse $X(t)$, $Y(t)$ heißen *gemeinsam stationär*, falls $X(t)$ und $Y(t)$ stationär sind und deren KKF nur von der Zeitdifferenz $t_1 - t_2$ abhängt.

$$\varphi_{XY}(t_1, t_2) = \varphi_{XY}(t_1 - t_2) = \varphi_{XY}(\tau)$$
$$c_{XY}(t_1, t_2) = c_{XY}(t_1 - t_2) = c_{XY}(\tau)$$

Dann folgt:

$$\varphi_{XY}(-\tau) = \varphi_{YX}(\tau)$$

Scharmittelwerte

- **Nachweis:** Nur der letzte Punkt ist nachzuweisen. Rechnung liefert:

$$\begin{aligned}\varphi_{XY}(-\tau) &= E(X(t)Y(t+\tau)) \\ &= E(Y(t')X(t'-\tau)) \\ &= \varphi_{YX}(\tau)\end{aligned}$$

■

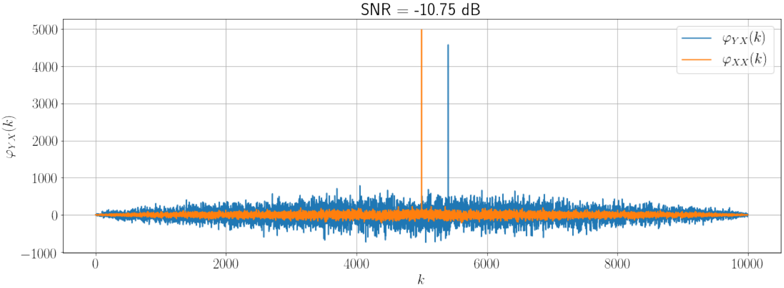
Scharmittelwerte

- **Bemerkung:**
  - Die „Position des τ“ ist nicht austauschbar. Die Ausdrücke $E(X(t)Y(t-\tau))$ und $E(X(t-\tau)Y(t))$ sind verschieden; vgl. Ergebnis auf Folie 41.
  - Für die Definition der Kreuzkorrelationsfunktion und der Kreuzkovarianzfunktion existieren ebenso wie bei der AKF in der Literatur verschiedene Definitionen (Position des „τ“). Hier ist bei Verwendung von Literatur Vorsicht geboten.

- **Anwendung:**
  - Vergleich („Korrelation“) eines Sendesignals $X(t)$ mit einem Empfangssignal $Y(t)$
  - Vergleich einer verrauschten Messung mit einem (erwarteten) unverrauschten Signal

Scharmittelwerte

- **Beispiel:**[19]
  - Schätzung einer unbekannten Verzögerung mittels Kreuzkorrelation
  - Resultat: Tatsächliche Verzögerung: 406 Samples, Schätzung: 406 Samples



[19] **Dateien:** white_noise.ipynb

Scharmittelwerte

Definition/Satz

Zwei reellwertige stochastische Prozesse $X(t)$, $Y(t)$ heißen *stochastisch unabhängig*, falls

$$f_{XY}(x_{t_1}, \dots, x_{t_N}, y_{t'_1}, \dots, y_{t'_M}) = f_X(x_{t_1}, \dots, x_{t_N}) \cdot f_Y(y_{t'_1}, \dots, y_{t'_M})$$

Scharmittelwerte

Definition/Satz

Zwei reellwertige stochastische Prozesse $X(t)$ und $Y(t)$ heißen *unkorreliert*, falls

$$\varphi_{XY}(t_1, t_2) = E(X(t_1)) \cdot E(Y(t_2))$$

In diesem Fall folgt:

$$c_{XY}(t_1, t_2) = 0.$$

Scharmittelwerte

Definition/Satz

Reellwertige stochastische Prozesse $X(t)$ und $Y(t)$ heißen *orthogonal*, falls

$$\varphi_{XY}(t_1, t_2) = 0.$$

Sind zwei Prozesse unkorreliert und ist mindestens einer der beiden Prozesse stationär mit Erwartungswert 0, so sind die Prozesse orthogonal.[20]

[20] **Bemerkung:** Hierbei genügt es, wenn die Prozesse unkorreliert sind und mindestens einer der Prozesse Erwartungswert 0 besitzt; Stationarität (welche das zweite Moment miteinbezieht) ist nicht notwendig.

Übersicht

8 Grundlagen stochastischer Prozesse
- Definition stochastischer Prozesse
- Scharmittelwerte
- Zeitmittelwerte
- Komplexwertige stochastische Prozesse
- Das Leistungsdichtespektrum
- Ergänzungen
- Lernziele
- Literatur

Zeitmittelwerte

- **Feststellung:** Scharmittelwerte sind „theoretische Realität"; praktisch kann man nur Realisierungen[21] messen und mit diesen weiterarbeiten

- **Forderung:** Eine Realisierung sollte idealerweise möglichst viel Information über den Prozess liefern.
- **Konsequenz:** Untersuche Zeitmittelwerte und deren Zusammenhang zu Scharmittelwerten.

[21] ... etwa Spannungsverläufe über einen bestimmten Beobachtungszeitraum...

Zeitmittelwerte

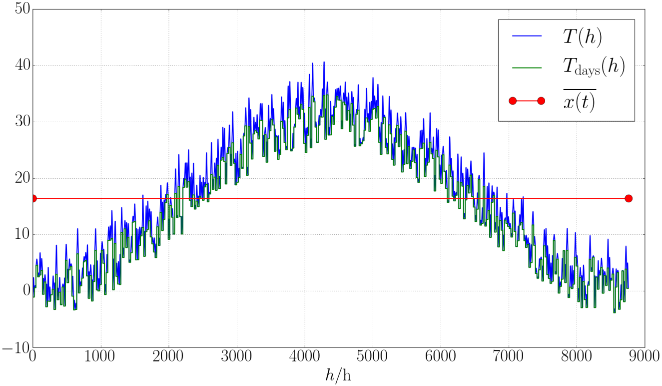
Definition

Für eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Realisierung $x(t) = X(t, \omega_0)$ eines reellwertigen, stark stationären Prozesses ist der *Zeitmittelwert der Realisierung bzgl.* $g(t)$ definiert als:

$$\overline{g(x(t))} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g(x(t))\,\mathrm{d}t$$

Zeitmittelwerte

- **Beispiel:**
  - Für die dargestellte Realisierung des Temperaturverlaufs ist $\overline{T(h)} = 15.10°$C.
  - Offensichtlich ist der Zeitmittelwert nicht charakteristisch für den Scharmittelwert.



Zeitmittelwerte

Definition

Ein stochastischer Prozess $X(t)$ heißt *ergodisch*, falls alle Eigenschaften des Prozesses aus einer Realisierung $x(t) = X(t, \omega_0)$ geschlussfolgert werden können.

Definition[22]

Ein stark stationärer stochastischer Prozess $X(t)$ heißt *ergodisch bzgl. einer Funktion* $g(\cdot)$, falls

$$\overline{g(x(t))} = E(g(X(t))).$$

[22] **Frage/Übung:** Können Sie anschaulich begründen, wieso nur stationäre Prozesse überhaupt für Ergodizität in Frage kommen?

Zeitmittelwerte

- **Beispiele:**
  - Für $g(x) = x$ ist der Zeitmittelwert gegeben durch

$$m = \overline{x(t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,\mathrm{d}t$$

    Falls Ergodizität bzgl. $g(x) = x$ erfüllt ist, so gilt

$$m = E(X),$$

  - In diesem Fall kann man somit den Mittelwert aus einer Realisierung ableiten. (**Beispiel:** Datei white_noise.ipynb)

Zeitmittelwerte

- **Beispiele:** (ctd.)
  - Für $g(x) = x^2$ ist der Zeitmittelwert gegeben durch

$$d^2 = \overline{x^2(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (x(t))^2 \, \mathrm{d}t$$

    Falls Ergodizität bzgl. $g(x) = x^2$ erfüllt ist, so gilt

$$d^2 = E(X^2).$$

  - In diesem Fall kann man somit den quadratischen Mittelwert aus einer Realisierung ableiten. (**Beispiel:** Datei white_noise.ipynb)

- **Bemerkung:** Da die rechte Seite der oberen Gleichung der Leistung von Signalen entspricht, wird klar, wieso $\varphi_{XX}(0) = E(X^2(t))$ als Leistung bezeichnet/definiert wurde.

Zeitmittelwerte

Karlsruher Institut für Technologie

- **Bemerkung:**[23] Durch Verwendung der Ergodenhypothese ergeben sich folgende Berechnungen:
  - k-tes Moment:
  $$m^{(k)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^k(t)\,\mathrm{d}t$$
  - k-tes zentrales Moment:
  $$\mu^{(k)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(x(t) - m^{(1)}\right)^k \,\mathrm{d}t$$
  - Autokorrelationsfunktion:[24]
  $$\varphi_{XX}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t-\tau)\,\mathrm{d}t$$

[23] Alle Berechnungsvorschriften setzen implizit voraus, dass die entsprechenden Größen existieren, z. B., die Prozesse stationär und gemeinsam stationär sind.

[24] An dieser Stelle ergibt sich im Vergleich zu [JW02] ebenfalls ein „$-$“.

Zeitmittelwerte

- **Bemerkung:** (ctd.)
  - Autokovarianzfunktion:

$$c_{XX}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[x(t) - m^{(1)}\right] \cdot \left[x(t-\tau) - m^{(1)}\right] \,\mathrm{d}t$$

  - Kreuzkorrelationsfunktion:

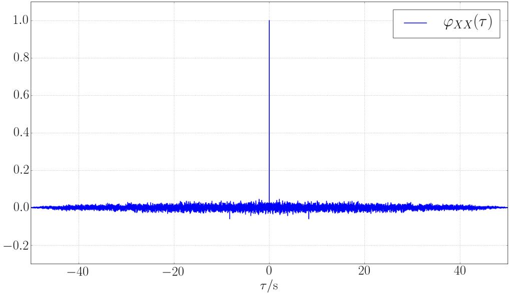
$$\varphi_{XY}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) y(t-\tau) \,\mathrm{d}t$$

  - Kreuzkovarianzfunktion:

$$c_{XY}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[x(t) - m_x^{(1)}\right] \cdot \left[y(t-\tau) - m_y^{(1)}\right] \,\mathrm{d}t$$

Zeitmittelwerte

- **Beispiel:**[25]
  - Für die auf Folie 7 gezeigte Realisierung eines Gaußprozesses mit $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ ist $\overline{x(t)} = 2.539 \cdot 10^{-3}$, $\overline{x^2(t)} = 9.982 \cdot 10^{-1}$.
  - Die Schätzung der AKF ist im Bild dargestellt.[26] [27]



[25] **Datei:** white_noise.ipynb

[26] Natürlich ist hier nicht $T \to \infty$, sondern T „groß“.

[27] Die Diskussion der Bedeutung des Resultats wird auf Kapitel 9 verschoben.

Übersicht

Komplexwertige stochastische Prozesse

- **Motivation:**
  - Komplexwertige Prozesse entstehen in der Nachrichtentechnik bei der *Modulation*, dem Aufbringen von Bits auf Signale
  - Komplexwertige Größen ergeben sich oft bei einer „bequemen“ Darstellung, z.B. bei der eben erwähnten Modulation oder der Zeigerdarstellung der Wechselstromrechnung

- **Vorgehensweise:** Letztlich kann man nahezu alles bisher Gelernte (mit leichten Adaptionen) übertragen...

Komplexwertige stochastische Prozesse

Karlsruher Institut für Technologie

Definition/Satz

Ein *komplexwertiger stochastischer Prozess* ist gegeben durch

$$Z(t) = X(t) + \mathrm{j}Y(t),$$

wenn $X(t)$ und $Y(t)$ reellwertige stochastische Prozesse sind.
Die Verteilung eines komplexwertigen Prozesses ist durch die Verbunddichten

$$f_{XY}(x_{t_1}, \dots, x_{t_N}, y_{t'_1}, \dots, y_{t'_M})$$

von Real- und Imaginärteil beschrieben.

Komplexwertige stochastische Prozesse

Definition

Die *Autokorrelationsfunktion, AKF,* eines komplexwertigen stochastischen Prozesses ist definiert durch:[28]

$$\varphi_{ZZ}(t_1, t_2) = E(Z(t_1)Z^*(t_2)).$$

[28] Zur Begründung für das * siehe Diskussion in Kapitel 7, Abschnitt „Komplexwertige Zufallsvariablen".

Komplexwertige stochastische Prozesse

Satz

Für die AKF eines komplexwertigen stochastischen Prozesses gilt

$$\varphi_{ZZ}(t_1, t_2) = \varphi_{XX}(t_1, t_2) + \varphi_{YY}(t_1, t_2) + \mathrm{j}\left[\varphi_{YX}(t_1, t_2) - \varphi_{XY}(t_1, t_2)\right].$$

Komplexwertige stochastische Prozesse

- **Nachweis:** Direktes Nachrechnen:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{ZZ}(t_1, t_2) &= E(Z(t_1)Z^*(t_2)) \\
&= E((X(t_1) + \mathrm{j}Y(t_1))(X(t_2) - \mathrm{j}Y(t_2))) \\
&= E((X(t_1)X(t_2)) + E(Y(t_1)Y(t_2)) \\
&\quad + \mathrm{j}\left[E(Y(t_1)X(t_2)) - E(X(t_1)Y(t_2))\right] \\
&= \varphi_{XX}(t_1, t_2) + \varphi_{YY}(t_1, t_2) \\
&\quad + \mathrm{j}\left[\varphi_{YX}(t_1, t_2) - \varphi_{XY}(t_1, t_2)\right]
\end{aligned}
$$

Komplexwertige stochastische Prozesse

Satz

Sind die Prozesse $X(t), Y(t)$ gemeinsam stationär, so ist $Z(t) = X(t) + \mathrm{j}Y(t)$ ebenfalls stationär und es gilt:

$$\begin{aligned}\varphi_{ZZ}(t_1, t_2) &= \varphi_{ZZ}(t_1 - t_2)\\ &= \varphi_{ZZ}(\tau)\\ &= E(Z(t)Z^*(t-\tau))\end{aligned}$$

sowie

$$\varphi^*_{ZZ}(\tau) = \varphi_{ZZ}(-\tau)$$

Die AKF eines komplexen Prozesses ist „konjugiert gerade".

Komplexwertige stochastische Prozesse

- **Nachweis:** Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{ZZ}^*(\tau) &= E(Z(t)Z^*(t-\tau))^* \\
&= E(Z^*(t)Z(t-\tau)) \\
&= E(Z(t')Z^*(t'+\tau)) \\
&= \varphi_{ZZ}(-\tau)
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Komplexwertige stochastische Prozesse

- **Kommentar:**
  - Bzgl. der Position des „$*$“ ist die Literatur nicht einheitlich. So ist ebenso die Definition

$$\widetilde{\varphi}_{ZZ}(\tau) = E(Z(t)Z^*(t+\tau))$$

üblich, wie sie etwa in [JW02] verwendet wird. Zudem verwenden manche Autoren bei komplexwertigen Prozessen einen Vorfaktor von $\frac{1}{2}$.
$\Longrightarrow$ Hier ist bei der Verwendung von Literatur Vorsicht geboten!

Komplexwertige stochastische Prozesse

Definition/Satz

Sind $Z(t) = X(t) + \mathrm{j}Y(t)$ und $W(t) = U(t) + \mathrm{j}V(t)$ zwei komplexwertige stochastische Prozesse, so lautet der *Kreuzkorrelationsfunktion*

$$\begin{aligned}\varphi_{ZW}(t_1, t_2) &= E(Z(t_1)W^*(t_2)) \\ &= \varphi_{XU}(t_1, t_2) + \varphi_{YV}(t_1, t_2) + \mathrm{j}\left[\varphi_{YU}(t_1, t_2) - \varphi_{XV}(t_1, t_2)\right]\end{aligned}$$

Sind $Z(t), W(t)$ gemeinsam stationär, so gilt:

$$\begin{aligned}\varphi_{ZW}(t_1, t_2) &= \varphi_{ZW}(t_1 - t_2) = \varphi_{ZW}(\tau) \\ \varphi^*_{ZW}(\tau) &= \varphi_{WZ}(-\tau)\end{aligned}$$

Komplexwertige stochastische Prozesse

- **Nachweis:** Die erste Identität ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}
\varphi_{ZW}(t_1, t_2) &= E(Z(t_1)W^*(t_2)) \\
&= E((X(t_1) + \mathrm{j}Y(t_1))(U(t_2) - \mathrm{j}V(t_2))) \\
&= E((X(t_1)U(t_2)) + E(Y(t_1)V(t_2)) \\
&\quad + \mathrm{j}\left[E(Y(t_1)U(t_2)) - E(X(t_1)V(t_2))\right] \\
&= \varphi_{XU}(t_1, t_2) + \varphi_{YV}(t_1, t_2) \\
&\quad + \mathrm{j}\left[\varphi_{YU}(t_1, t_2) - \varphi_{XV}(t_1, t_2)\right]
\end{aligned}$$

Komplexwertige stochastische Prozesse

- **Nachweis:** (ctd.) Die zweite Gleichheit folgt über:

$$\begin{aligned}\varphi^*_{ZW}(\tau) &= E(Z(t)W^*(t-\tau))^* \\ &= E(Z^*(t)W(t-\tau)) \\ &= E(W(t')Z^*(t'+\tau)) \\ &= \varphi_{WZ}(-\tau)\end{aligned}$$

Übersicht

8 Grundlagen stochastischer Prozesse

- Definition stochastischer Prozesse
- Scharmittelwerte
- Zeitmittelwerte
- Komplexwertige stochastische Prozesse
- Das Leistungsdichtespektrum
- Ergänzungen
- Lernziele
- Literatur

Das Leistungsdichtespektrum

- **Ansatz:** Aus „Signale und Systeme“ ist die Verteilung der Energie über die Frequenzen mittels Fouriertransformation als hilfreiche Betrachtung bekannt
- **Problem:** Fouriertransformation nur für Energiesignale anwendbar; *stationäre Prozesse* können aber keine Energiesignale als Realisierung besitzen[29]

- **Lösung:** Gesamtbetrachtung über alle Realisierungen

[29] **Frage/Übung:** Wieso (i.A.) nicht? Finden Sie ein (triviales) Beispiel, in dem das möglich ist.

Das Leistungsdichtespektrum

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Ist $X(t)$ ein stationärer Prozess mit AKF $\varphi_{XX}(\tau)$, so ist dessen *Leistungsdichtespektrum* definiert als die Fouriertransformierte der AKF:

$$\Phi_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XX}(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \tau} \, \mathrm{d}\tau$$

Das Leistungsdichtespektrum

- **Bemerkung:** (nach [Urk83])
  - Bildet man für eine Realisierung $x(t)$ des Prozesses das gefensterte Signal

    $$x_{2T}(t) := x(t) \cdot \mathrm{rect}_{2T}(t),$$

    so hat dies endliche Energie und besitzt eine Fourier-Transformierte[30] $X_{2T}(f)$.
  - Definiert man die *gemittelte spektrale Leistungsdichte* als

    $$\Phi_{xx}(f) := \lim_{T\to\infty} E\left(\frac{|X_{2T}(f)|^2}{2T}\right),$$

    so zeigt [Urk83], dass

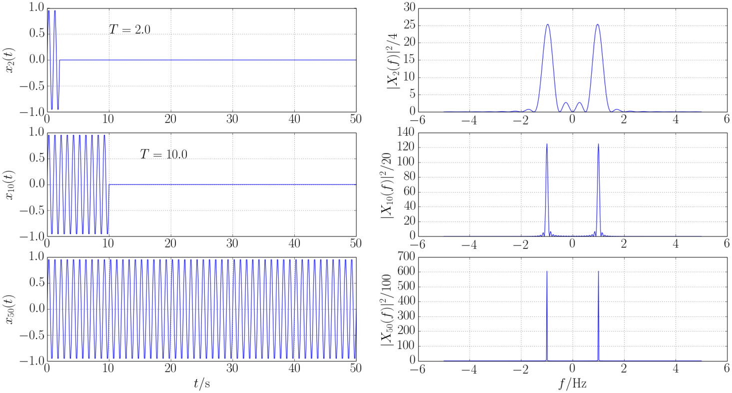
    $$\Phi_{xx}(f) = \mathcal{F}\left\{\varphi_{XX}(\tau)\right\}.$$

  - Diese „intuitive Vorgehensweise“ führt auf dasselbe Resultat wie die Definition und untermauert damit deren Sinnhaftigkeit.

[30] **Achtung:** Hier referenziert Großschreibung keine Zufallsvariable, sondern den Frequenzbereich!

Das Leistungsdichtespektrum

- **Beispiel:** Betrachte Sinusfunktion $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ für verschiedene T:



Das Leistungsdichtespektrum

Satz

Ist $X(t)$ ein stationärer Prozess mit AKF $\varphi_{XX}(\tau)$ und Leistungsdichtespektrum $\Phi_{XX}(f)$, so gilt:

$$\varphi_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{XX}(f) e^{j2\pi f\tau} \, df$$

$$\varphi_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{XX}(f) \, df$$

- **Nachweis:** Die erste Gleichung folgt aus der Fouriertransformation, die zweite folgt aus der ersten. ■

Das Leistungsdichtespektrum

Satz

Das Leistungsdichtespektrum $\Phi_{XX}(f)$ eines reellwertigen stationären Prozesses $X(t)$ erfüllt:

$$\Phi^*_{XX}(f) = \Phi_{XX}(f),$$
$$\Phi_{XX}(-f) = \Phi_{XX}(f)$$

d.h. es ist reellwertig und symmetrisch.

- **Nachweis:** $X(t)$ reell $\implies$ $\varphi_{XX}(\tau)$ reell, gerade $\implies$ $\Phi_{XX}(f)$ reell und gerade ∎

Das Leistungsdichtespektrum

Satz

Für einen komplexwertigen Prozess $Z(t)$ ergibt sich:

$$\Phi_{ZZ}^*(f) = \Phi_{ZZ}(f),$$

das Leistungsdichtespektrum ist reellwertig (aber nicht mehr symmetrisch).

- **Nachweis:** Für AKFs komplexwertiger Prozesse gilt $\varphi_{ZZ}^*(\tau) = \varphi_{ZZ}(-\tau)$. Einsetzen und Rechnung liefert:

$$\Phi_{ZZ}^*(f) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ZZ}(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \tau} \,\mathrm{d}\tau\right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ZZ}^*(\tau) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f \tau} \,\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ZZ}(-\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f (-\tau)} \,\mathrm{d}\tau = \Phi_{ZZ}(f)$$

Das Leistungsdichtespektrum

Satz

Ist $X(t)$ ein stationärer Prozess mit AKF $\varphi_{XX}(\tau)$ und Leistungsdichtespektrum $\Phi_{XX}(f)$, so gilt:

$$\Phi_{XX}(f) \geq 0$$

Das Leistungsdichtespektrum charakterisiert somit wegen

$$P_X = E\left(|X(t)|^2\right) = \varphi_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{XX}(f)\,\mathrm{d}f$$

die Verteilung der Leistung über den Frequenzen.

- **Nachweis:** Der Nachweis kann über Mittel der Systemtheorie erfolgen [Pap91, S. 276] und basiert letztlich auf den Betrachtungen von Folie 73. ■

Das Leistungsdichtespektrum

Definition

Sind $X(t), Y(t)$ gemeinsam stationäre Prozesse mit Kreuzkorrelationsfunktion $\varphi_{XY}(\tau)$, so ist das *Kreuz-Leistungsdichtespektrum* definiert als:

$$\Phi_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XY}(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \tau} \, \mathrm{d}\tau$$

Das Leistungsdichtespektrum

Satz

Sind $X(t), Y(t)$ gemeinsam stationäre Prozesse, dann folgt:

$$\Phi^*_{XY}(f) = \Phi_{YX}(f)$$

- **Nachweis:**

$$\Phi^*_{XY}(f) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XY}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f\tau}\,\mathrm{d}\tau\right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*_{XY}(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{YX}(-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f(-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = \Phi_{YX}(f)$$

Das Leistungsdichtespektrum

Satz

Sind die gemeinsam stationären Prozesse $X(t), Y(t)$ reellwertig, so gilt:

$$\Phi_{YX}(f) = \Phi_{XY}(-f)$$

- **Nachweis:** $\varphi_{XY}(\tau)$ reell, ungerade $\Longrightarrow$

$$\Phi^*_{XY}(f) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XY}(\tau) e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau\right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*_{XY}(\tau) e^{j2\pi f\tau}\,d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XY}(\tau) e^{-j2\pi(-f)\tau}\,d\tau = \Phi_{XY}(-f),$$

und somit:

$$\Phi_{XY}(-f) = \Phi^*_{XY}(f) = \Phi_{YX}(f)$$

Übersicht

Zeitdiskrete Zufallsprozesse

- **Frage:** Wie ist die Situation bei zeitdiskreten Prozessen?
- **Antwort:** Letztlich ist „alles fast genauso“; man muss nur die Zeit diskretisieren. Ein zeitdiskreter stochastischer Prozess ergibt sich aus der Definition durch $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$.

- **Bemerkung:** Man kann sich einen zeitdiskreten Prozess als durch Abtastung aus einem zeitkontinuierlichen Prozess entstanden denken.[31]

[31] Es existiert eine Version des Abtasttheorems für stochastische Prozesse. Dies geht jedoch über den Rahmen einer einführenden Vorlesung hinaus. Bei Interesse siehe [PS08, S. 75ff.].

Zeitdiskrete Zufallsprozesse

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Für zeitdiskrete, reellwertige stochastische Prozesse $X(n)$ lautet das k*-te Moment*, die *Autokorrelationsfunktion, AKF,* und die *Autokovarianzfunktion*

$$E\left(X^{(k)}(n)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x_n^{(k)} f(x_n)\,\mathrm{d}x_n$$

$$\varphi_{XX}(n,k) = E(X(n)X(k)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_n x_k f(x_n, x_k)\,\mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x_k$$

$$c_{XX}(n,k) = \varphi_{XX}(n,k) - E(X(n))E(X(k))$$

Zeitdiskrete Zufallsprozesse

- **Frage/Übung:** Wieso stehen in der Definition jetzt doch Integrale?
- **Antwort:** Weil die Amplitudenrichtung ($\rightarrow$ Verteilung) immer noch kontinuierlich ist!

Zeitdiskrete Zufallsprozesse

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Für zeitdiskrete, reellwertige, stationäre stochastische Prozesse $X(n)$ ergeben sich die Autokorrelationsfunktion, AKF, und die Autokovarianzfunktion

$$\varphi_{XX}(n,k) = \varphi_{XX}(n-k)$$

$$c_{XX}(n,k) = \varphi_{XX}(n-k) - (E(X(n)))^2$$

Zeitdiskrete Zufallsprozesse

Definition/Satz

Für zeitdiskrete, reellwertige, stationäre stochastische Prozesse $X(n)$ lautet das *Leistungsdichtespektrum*

$$\Phi_{XX}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_{XX}(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f m}$$

Das Leistungsdichtespektrum ist als Fouriertransformierte einer zeitdiskreten Funktion periodisch.

$$\Phi_{XX}(f + k f_\mathrm{p}) = \Phi_{XX}(f)$$

Die inverse Abbildung lautet:

$$\varphi_{XX}(m) = \frac{1}{f_\mathrm{p}} \int_{-\frac{f_\mathrm{p}}{2}}^{\frac{f_\mathrm{p}}{2}} \Phi_{XX}(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f \tau}\,\mathrm{d}f$$

Zeitdiskrete Zufallsprozesse

- **Bemerkungen:**
  - Im Gegensatz zu [JW02] wird die inverse Transformation hier mit Vorfaktor $1/f_\mathrm{p}$ definiert, um die Parallele zu der aus „Signale und Systeme“ ([PJ15]) bekannten Fourier-Reihe zu verdeutlichen.
  - Wurde der zeitdiskrete Prozess durch Abtastung eines zeitkontinuierlichen Prozesses mit der Abtastzeit Δt erzeugt, so ist $f_\mathrm{p} = 1/\Delta t$.
  - Für komplexwertige zeitdiskrete Prozesse „funktioniert alles nahezu analog“, wenn man das „*“ ergänzt.

Ergänzungen

- **Vorbemerkung:** Die folgende Folie fasst Definitionen und Eigenschaften von Kenngrößen (Autokorrelationsfunktion, Kreuzkorrelationsfunktion, Leistungsdichtespektrum, Kreuzleistungsdichtespektrum...) stochastischer Prozesse zusammen.

- **Hinweis 1:** Zur Vereinfachung wird im Folgenden angenommen, dass die Prozesse (gemeinsam) (schwach) stationär sind!
- **Hinweis 2:** Ggf. können Sie sich die Definitionen und Eigenschaften komplexwertiger Prozesse merken und daraus diejenigen der reellwertigen Prozesse ableiten.

Ergänzungen

Karlsruher Institut für Technologie

Szenario	Definition	Eigenschaften
$X(t)$ reell	$\varphi_{XX}(\tau) := E(X(t)X(t-\tau))$	$\varphi_{XX}(-\tau) = \varphi_{XX}(\tau)$
	$\varphi_{XY}(\tau) := E(X(t)Y(t-\tau))$	$\varphi_{XY}(-\tau) = \varphi_{YX}(\tau)$
	$\Phi_{XX}(f) := \mathcal{F}\{\varphi_{XX}(\tau)\}$	$\Phi^*_{XX}(f) = \Phi_{XX}(f)$
		$\Phi_{XX}(-f) = \Phi_{XX}(f)$
		$\Phi_{XX}(f) \geq 0$
	$\Phi_{XY}(f) := \mathcal{F}\{\varphi_{XY}(\tau)\}$	$\Phi^*_{XY}(f) = \Phi_{YX}(f)$
		$\Phi_{YX}(f) = \Phi_{XY}(-f)$

Ergänzungen

Szenario	Definition	Eigenschaften
$Z(t)$ komplex	$\varphi_{ZZ}(\tau) := E(Z(t)Z^*(t-\tau))$	$\varphi_{ZZ}(-\tau) = \varphi^*_{ZZ}(\tau)$
	$\varphi_{ZW}(\tau) := E(Z(t)W^*(t-\tau))$	$\varphi_{ZW}(-\tau) = \varphi^*_{WZ}(\tau)$
	$\Phi_{ZZ}(f) := \mathcal{F}\{\varphi_{ZZ}(\tau)\}$	$\Phi^*_{ZZ}(f) = \Phi_{ZZ}(f)$
		$\Phi_{ZZ}(f) \geq 0$
	$\Phi_{ZW}(f) := \mathcal{F}\{\varphi_{ZW}(\tau)\}$	$\Phi^*_{ZW}(f) = \Phi_{WZ}(f)$

Anwendung in der Systemtheorie *

- *Reellwertige Systeme*
  - Wir betrachten ein reelles LTI-System mit reellwertiger Impulsantwort $h(t)$.
  - Liegt am Eingang ein stationärer Prozess $X(t)$ an, so rechnet man für den Ausgangsprozess $Y(t) = X(t) * h(t)$:[32]

$$
\begin{aligned}
\varphi_{YX}(t_1, t_2) &= E\Big(Y(t_1)\ X(t_2) \Big) \\
&= E\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(t_1 - \nu) h(\nu)\ \mathrm{d}\nu \ \cdot\ X(t_2) \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} E\left(X(t_1 - \nu) \cdot X(t_2)\right) h(\nu)\, \mathrm{d}\nu \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XX}(t_1 - t_2 - \nu)\ h(\nu)\, \mathrm{d}\nu \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XX}(\tau - \nu) h(\nu)\, \mathrm{d}\nu
\end{aligned}
$$

[32] Es wird $t_1 = t, t_2 = t - \tau$ gesetzt und Stationarität von $X(t)$ ausgenutzt.

Anwendung in der Systemtheorie *

Karlsruher Institut für Technologie

- *Reellwertige Systeme*
  - **Erinnerung:**

$$\varphi_{YX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XX}(\tau - \nu) h(\nu) \,\mathrm{d}\nu$$

  - Gilt für den Eingangsprozess $\varphi_{XX}(\tau) = \delta(\tau)$, so ergibt sich aus der Ausblendeigenschaft der Dirac-Distribution:

$$\varphi_{YX}(\tau) = h(\tau)$$

  - **Frage:** Was bedeutet das anschaulich?

Anwendung in der Systemtheorie *

- *Reellwertige Systeme*
  - Für die AKF von $Y(t)$ rechnet man:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{YY}(t_1, t_2) &= E\Big(\, Y(t_1)\;\; Y(t_2)\,\Big) \\
&= \; E\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(t_1 - \nu)\; h(\nu)\,\mathrm{d}\nu \;\cdot\; \int_{-\infty}^{\infty} X(t_2 - \xi)\; h(\xi)\,\mathrm{d}\xi \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\left(X(t_1 - \nu)X(t_2 - \xi)\right)\; h(\nu)h(\xi)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XX}(t_1 - \nu - t_2 + \xi)\; h(\nu)h(\xi)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

Somit ist der Ausgangsprozess ebenfalls wieder stationär!

Anwendung in der Systemtheorie *

- *Reellwertige Systeme*
  - **Feststellung:** Wird ein stationärer Prozess $X(t)$ auf ein LTI-System mit Impulsantwort $h(t)$ gegeben, so ist der (gefilterte) Ausgangsprozess

$$Y(t) = X(t) * h(t)$$

    stationär. Zudem sind $X(t), Y(t)$ gemeinsam stationär.

  - **Hinweis:** Derartige Analysen sind in der Systemidentifikation, der Messtechnik und der Nachrichtentechnik wichtig.

Anwendung in der Systemtheorie *

- *Reellwertige Systeme*
  - **Erinnerung:** Wird ein reelles LTI-System mit Impulsantwort $h(t)$ durch einen reellwertigen stationären Prozess $X(t)$ angeregt, so ist der Ausgang $Y(t) = X(t) * h(t)$ stationär und beide sind gemeinsam stationär; es gilt:

$$\varphi_{YX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XX}(\tau - \nu) h(\nu) \, \mathrm{d}\nu$$

$$\varphi_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XX}(\tau - \nu + \xi) h(\nu) h(\xi) \, \mathrm{d}\nu \, \mathrm{d}\xi$$

  - Für das Kreuzleistungsdichtespektrum folgt:

$$\Phi_{YX}(f) = \Phi_{XX}(f) H(f)$$

Anwendung in der Systemtheorie *

- *Reellwertige Systeme*
  - Das Leistungsdichtespektrum des Ausgangsprozesses ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}\Phi_{YY}(f) &= \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{XX}(\tau-\nu+\xi)h(\nu)h(\xi)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\xi\right\}\\ &\stackrel{(a)}{=} \Phi_{XX}(f)\cdot|H(f)|^2\end{aligned}$$

    Schritt (a) wird in der Übung nachgerechnet.

  - **Bemerkung:** Obige Identitäten können zur Identifikation eines Systems dienen, indem das System am Eingang mit einem weißen Rauschen ($\rightarrow$ siehe Kapitel 9) angeregt wird.

Anwendung in der Systemtheorie *

- *Komplexwertige Systeme*
  - Für das Systemtheorie-Beispiel ergibt sich[33] bei komplexen LTI-Systemen und stationären komplexwertigen Prozessen

$$\begin{aligned}\varphi_{YX}(t_1,t_2) &= E(Y(t_1)X^*(t_2))\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XX}(t_1-t_2-\nu)h(\nu)\,\mathrm{d}\nu\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\varphi_{YY}(t_1,t_2) &= E\left(Y(t_1)Y^*(t_2)\right)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XX}(t_1-t_2-\nu+\xi)h(\nu)h^*(\xi)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

[33] **Übung:** Nachprüfen

Anwendung in der Systemtheorie *

Karlsruher Institut für Technologie

- *Komplexwertige Systeme*
  - **Erinnerung:** Wird ein komplexes LTI-System mit Impulsantwort $h(t)$ durch einen komplexwertigen stationären Prozess $X(t)$ angeregt, so ist der Ausgang $Y(t) = X(t) * h(t)$ stationär und beide sind gemeinsam stationär; es gilt:

$$\varphi_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XX}(\tau - \nu + \xi) h(\nu) h^*(\xi) \, \mathrm{d}\nu \, \mathrm{d}\xi$$

  - Für das Leistungsdichtespektrum folgt ebenfalls:[34]

$$\Phi_{YY}(f) = \Phi_{XX}(f) \cdot |H(f)|^2$$

[34] **Bemerkung:** Warum muss das dann überhaupt erwähnt werden? $\rightarrow$ siehe Ergänzung

Zur Definition der AKF *

Hinweis

Die folgenden Folien stellen eine Diskussion für Interessierte bereit und verknüpfen/erklären/motivieren Inhalte dieses Kapitels mit der Vorlesung „Signale und Systeme“.
Bei „Standard-Bearbeitung“ können diese übergangen werden.

Zur Definition der AKF *

- **Frage:** Worin unterscheiden sich die Definitionen der AKF stationärer Prozesse? Es ist:[35]

$$\varphi_{XX}(\tau) = E\left(X(t)\,X^*(t-\tau)\right)$$
$$\widetilde{\varphi}_{XX}(\tau) = E\left(X(t)\,X^*(t+\tau)\right) = \varphi_{XX}(-\tau)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\Phi_{XX}(f) = \mathcal{F}\left\{\varphi_{XX}(\tau)\right\}$$
$$\widetilde{\Phi}_{XX}(f) = \mathcal{F}\left\{\widetilde{\varphi}_{XX}(\tau)\right\} = \Phi_{XX}(-f)$$

- **Antwort:** Letztlich ändert sich nur das Argument zu „$-$“.

[35] **Hinweis:** Die letzte Gleichung lautet eigentlich $\widetilde{\Phi}_{XX}(f) = \Phi^*_{XX}(-f)$; die Konjugation erübrigt sich wegen der Aussage auf Folie 77.

Zur Definition der AKF *

Die bei Verwendung von $\widetilde{\varphi}_{XX}(\tau)$ entstehenden Resultate ändern Vorzeichen. Diese sind im Folgenden rot dargestellt.

Zur Definition der AKF *

- **Erinnerung:** Reellwertiger stationärer Prozess $X\left(t\right)$ gefiltert durch LTI-System mit reellwertiger Impulsantwort $h\left(t\right) \implies$

$$\widetilde{\varphi}_{YY}\left(\tau\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}_{XX}\left(\tau \overset{+}{-} \nu \overset{-}{+} \xi\right) h\left(\nu\right) h\left(\xi\right)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\xi$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}_{YY}\left(f\right) &= \int\int\int \varphi_{XX}\left(\tau \overset{+}{-} \nu \overset{-}{+} \xi\right) h\left(\nu\right) h\left(\xi\right)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\xi \;\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \widetilde{\Phi}_{XX}\left(f\right) \cdot H\left(\overset{-}{+} f\right) \cdot H\left(\overset{+}{-} f\right) \\
&\overset{(a)}{=} \widetilde{\Phi}_{XX}\left(f\right) \cdot \left|H\left(f\right)\right|^2,
\end{aligned}$$

wobei (a) gilt, da für reelle $h\left(t\right)$ folgt, dass $H\left(-f\right) = H^*\left(f\right)$.

Zur Definition der AKF *

- **Feststellung:** Sind der Eingangsprozess und die Impulsantwort reellwertig, so ist es egal, welche Definition der AKF verwendet wird.

Zur Definition der AKF *

- Komplexwertiger stationärer Prozess $X(t)$ gefiltert durch LTI-System mit komplexwertiger Impulsantwort $h(t)$ $\Longrightarrow$

$$\widetilde{\varphi}_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}_{XX}\left(\tau \overset{+}{-} \nu \overset{-}{+} \xi\right) h(\nu)\, h^*(\xi)\, \mathrm{d}\nu\, \mathrm{d}\xi$$

$$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_{YY}(f) &= \int\int\int \widetilde{\varphi}_{XX}\left(\tau \overset{+}{-} \nu \overset{-}{+} \xi\right) h(\nu)\, h^*(\xi)\, \mathrm{d}\nu\, \mathrm{d}\xi \;\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f\tau}\, \mathrm{d}\tau \\ &= \widetilde{\Phi}_{XX}(f) \cdot H\left(\overset{-}{+} f\right) \cdot H^*\left(\overset{-}{+} f\right) \\ &= \widetilde{\Phi}_{XX}(f) \cdot \left| H\left(\overset{-}{+} f\right)\right|^2\end{aligned}$$

Zur Definition der AKF *

Karlsruher Institut für Technologie

- **Wiederholung:**

$$\widetilde{\Phi}_{YY}(f) = \widetilde{\Phi}_{XX}(f) \cdot \left| H\left(\overset{-}{+} f \right) \right|^2$$

- **Beobachtung:** Die nicht-rote Definition ist intuitiver/schlüssiger, da kein zusätzliches Vorzeichen zu beachten ist!?!

- **Frage:** Bietet sie noch andere Vorteile?

Zur Definition der AKF *

- **Antwort:**
  - Für das Signal[36] $x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}$ ergibt sich:

$$\widetilde{\varphi}_{XX}(\tau) = E\left(X(t)\, X^*\left(t \overset{+}{-} \tau\right)\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_0\left(t \overset{+}{-} \tau\right)} = \mathrm{e}^{\overset{-}{+}j2\pi f_0 \tau}$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\widetilde{\Phi}_{XX}(f) = \delta\left(f \overset{+}{-} f_0\right)$$

  - Die Schwingung $x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}$ wird also entweder als Dirac by f_0 oder als Dirac bei $-f_0$ dargestellt.

---

[36] **Hinweis:** Da das Signal deterministisch ist, müsste unser Framework zur weiteren Betrachtung nicht bemüht werden. Dieses hilft aber bei der Konstruktion der folgenden Erklärungen.

Zur Definition der AKF *

- **Antwort:** (ctd.)
  - **Erinnerung 1:** Für ein LTI-System gilt:

$$x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t} \implies y(t) = x(t) \cdot H(f_0)\,;$$

    der Frequenzgang beschreibt, wie die Frequenz f_0 beim Durchgang durch das System verändert wird.
  - **Erinnerung 2:** Für das Signal $x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}$ ergibt sich:

$$\widetilde{\Phi}_{XX}(f) = \delta\left(f \pm f_0\right)$$

  - **Kombination:** Zusammenfassen der Erinnerungen liefert:

$$\widetilde{\Phi}_{YY}(f) = \widetilde{\Phi}_{XX}(f) \cdot \left| H\left(\mp f\right) \right|^2$$

Zur Definition der AKF *

- **Beobachtungen:**
  - In der gewählten Notation (ohne $\tilde{}$) wird eine Harmonische der Frequenz f_0 als Dirac bei $+f_0$ dargestellt. Damit wird die Leistungsdichte am Ausgang gerade um den Faktor $|H(f_0)|^2$ verändert.
  - In der alternativen Notation (mit $\tilde{}$) erfolgt die Darstellung (physikalisch) positiver Frequenzen bei negativem Frequenzargument. Da die Beeinflussung durch das System physikalischer Natur und somit von der gewählten Darstellung unabhängig ist, entsteht bei der Darstellung der Leistungsdichte der Ausdruck $|H(-f_0)|^2$.

Zur Definition der AKF *

- **Abschließender Kommentar:**
  - Die beiden Darstellungsoptionen sind mathematisch und physikalisch beide vollständig und gleichwertig.
  - Durch obige Diskussion wird (hoffentlich) deutlich, warum/dass die meisten Darstellungen, die zur Nachrichtentechnik oder Systemtheorie affin sind, die Definition $\varphi_{XX}(\tau)$ bevorzugen.

Übersicht

Lernziele

Karlsruher Institut für Technologie

- Die folgende Aufstellung fasst die zentralen Punkte zusammen.
- Es wird aufgezeigt, welche Punkte nach Bearbeitung des Kapitels klar sein sollten.
- **Hinweise:**
  - Die Auflistung ist nicht vollständig, sondern führt die wichtigsten Aussagen auf; nicht erwähnte Inhalte sind dennoch bedeutsam.
  - Oft enthalten die Nachweise wichtige Ideen; diese also nicht vernachlässigen.
  - Stets versuchen, Gleichungen in Verbindung mit Interpretationen und Anwendungen zu sehen
  - Des weiteren sollten alle kleinen nützlichen Ergänzungen verstanden sein.
  - Es ist immer eine gute Idee, etwas Gelerntes im Rechner umzusetzen. Dies hilft beim Verständnis und schärft das Bewusstsein für mögliche Probleme.

Lernziele

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Stochastische Prozesse als indizierte Familie von Zufallsvariablen; Charakterisierung ihrer Verteilung
- Stark stationäre und schwach stationäre Prozesse
- Scharmittelwerte; insbes. AKF und Eigenschaften, KKF und Eigenschaften,
- Normale Prozesse (Gaußprozesse); Äquivalenz von starker und schwacher Stationarität

Lernziele

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein: (ctd.)

- Stochastische Unabhängigkeit, Unkorreliertheit und Orthogonalität von Prozessen
- Komplexwertige stochastische Prozesse: Übertragung aller Definitionen und Eigenschaften; was bleibt gleich, was ändert sich?
- Zeitmittelwerte und Ergodizität; „Übertragung“ der Scharmittelwerte
- Leistungsdichtespektrum und Eigenschaften, Leistung eines Prozesses
- Übertragung auf zeitdiskrete Prozesse

Übersicht

8 Grundlagen stochastischer Prozesse
- Definition stochastischer Prozesse
- Scharmittelwerte
- Zeitmittelwerte
- Komplexwertige stochastische Prozesse
- Das Leistungsdichtespektrum
- Ergänzungen
- Lernziele
- Literatur

Literatur I

[JW02] F. Jondral, A. Wiesler, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse*, Teubner, 2002

[Nyq28] H. Nyquist, *Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors*, Phys. Rev. 32, 110, 1928; http://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.32.110

[Gal08] R. Gallager, *Principles of Digital Communications*, Cambridge University Press, 2008

[Pro95] J. Proakis, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 1995

[Pap91] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 3rd Ed., New York 1991: McGraw-Hill, Inc.

[PJ15] F. Puente Leon, H. Jäkel, *Signale und Systeme*, Oldenbourg, 2015

[PS08] J. Proakis, M. Salehi, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 2008

[Urk83] H. Urkowitz, *Signal Theory and Random Processes*, Artech House, 1983