

Wahrscheinlichkeitstheorie – Einleitung

Holger Jäkel

Communications Engineering Lab (CEL)



1 Einleitung

- Motivation
- Zur Vorgehensweise
- Lernziele
- Literatur

- 1 Einleitung
 - Motivation
 - Zur Vorgehensweise
 - Lernziele
 - Literatur

- Im Folgenden wollen wir einige Fragestellungen der Wahrscheinlichkeitstheorie diskutieren, die uns ausgehend von sehr einfachen Beispielen hin zu komplexen Fragen bringen und so die Notwendigkeit aufzeigen, sich mit Wahrscheinlichkeitstheorie zu beschäftigen

- **Szenario:** Münzwurf
 - Mögliche Ausgänge sind „Kopf“ und „Zahl“, je mit Wahrscheinlichkeit $1/2 \implies$ alles klar!
 - Oder doch nicht...?
 - Was ist mit „Kante“?
 - Woher wissen wir, dass Kopf und Zahl dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzen? $\implies$ Ist die Münze *fair*?

■ Szenario: Würfelwurf

- Prinzipiell äquivalent zu Münzwurf nur mit 6 statt mit 2 möglichen Ergebnissen
- Identische Diskussion bzgl. Kanten und Fairness
- Schon etwas anspruchsvoller: Wie lange dauert es bis zur ersten 6?

■ Szenario: Wahrscheinlichkeitsaussagen bei Lotto, Skat, Bundestagswahl, etc.

- Modelle werden komplexer
- Scheint aber „noch irgendwie durch Abzählen machbar“

- **Szenario:** Messung eines unbekannten Wertes unter Fehlereinflüssen („Rauschen“)¹
 - Wie Modellieren des Rauschens?
 - Wie Beseitigung der Rauscheinflüsse, um einen ungestörten Messwert zu erhalten?
 - Wie sollte ein Signal im Rauschen detektiert werden?

- **Szenario:** Modellierung des Quantisierungsfehlers²
 - Wie Modellieren und Bewerten des Fehlers?

- **Szenario:** Modellieren der Vorgänge bei Nachrichtenübertragung
 - Welchen Gesetzen gehorcht die Störung/das Rauschen?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird Information korrekt übertragen?

¹ Wird Ihnen in der Vorlesung „Messtechnik“ dargelegt; fußt auf Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie.

² Illustration siehe Tafel

Why Probability?³

ML must always deal with uncertain quantities. The sources of uncertainty are:

- **Inherent stochasticity** in the system being modeled due to, e.g., noisy measurements or noise processes (e.g., think of receiver noise in a communication system)
- We **cannot observe** all the variables that determine the state and behavior of a system. The effect of these make the system appear stochastic (think of a deterministic, yet unknown transmitter setup. Alternatively, think of a shell game, where the operator deterministically knows the state of the system, but the player may not necessarily)
- Sometimes, we need to model physical reality using simpler, but **incomplete models**. The discarded information results in uncertainty (think of idealized linear models of channels and components that we use in communications)

³Angelehnt an: Laurent Schmalen, *Machine Learning and Optimization in Communications*, Skript, KIT

■ Anwendungsgebiete der Wahrscheinlichkeitstheorie:⁴

- Analyse und Beschreibung nachrichtentechnischer Vorgänge
- Signalverarbeitung bei Vorhandensein von Störungen
- Beschreibung von Messvorgängen und deren Qualität
- Modellierung von Schätzungen/Schätzalgorithmen und deren Güte
- Beschreibung und Beseitigung von Störungen („Rauschen“, Abtastfehler, Quantisierungsfehler...; „Filterung“)
- Sämtliche Methoden des Machine Learning und künstlicher Intelligenz

⇒ **Nahezu alle Tätigkeiten und Methoden des Ingenieurs!!!**

⁴Teile der Begriffe werden erst in den folgenden Semestern behandelt.

- 1 Einleitung
 - Motivation
 - Zur Vorgehensweise
 - Lernziele
 - Literatur

■ Aus [Pap91]:

„[...] Scientific theories deal with concepts, not with reality. All theoretical results are derived from certain axioms by deductive logic. In physical science the theories are so formulated as to correspond in some useful sense to the real world , whatever that may mean. However, this correspondence is approximate, and the physical justification of all theoretical conclusions is based on some form of inductive reasoning. [...]"

■ Aus [Hen13]:

„[...] Natürlich kann ein Modell nicht jede Einzelheit des Originals aufweisen; ein **gutes Modell** sollte aber **alle wesentlichen Merkmale** des Originals besitzen. [...]“

„[...] liefert ein *stochastisches Modell* eine **Nachbildung** eines zufallsabhängigen Vorgangs **in der Sprache der Mathematik** .“

■ Ziel/Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie:

- Beschreibung und Analyse zufälliger Vorgänge
- Beschreibung der möglichen Ereignisse eines Experiments und Modellierung
- Berechnen von Wahrscheinlichkeiten unter verschiedensten Randbedingungen
- Evtl. Überführung/Formulierung mittels eines „Standardmodells“ zur einfacheren Berechnung
- Analyse zufälliger Ereignisse bei langer Beobachtung
- Beschreibung von zufälligen Verläufen (→ stochastische Prozesse)

■ Feststellungen/Bemerkungen:

- Stochastische Modelle sind stets Abbildungen eines (unbekannten) Zufalls
- Stochastische Modelle sind Approximationen, deren Qualität/Güte die Zuverlässigkeit der Aussagen und Komplexität der Rechnungen bestimmt
- Reine Betrachtungen von Häufigkeiten sind für eine sinnvolle stochastische Modellierung nicht ausreichend⁵

⁵Wird in Kapitel 2 gezeigt.

■ Feststellungen/Bemerkungen: (ctd.)

- Wahrscheinlichkeitstheorie ist inhärent in „mathematischer Sprache“ formuliert.
- Dementsprechend wird diese Vorlesung stärker als andere ETIT-Fächer an die Mathematik-Vorlesungen erinnern.

- *Unser/Ihr Ziel muss sein, die Mechanismen zu beherrschen und sie gleichzeitig in „Ingenieurssprache/-intuition“ zu übersetzen.*
- Die erlernten Modelle und Methoden sind im Wesentlichen Werkzeuge, deren Zweck und Anwendung sich erfahrungsgemäß erst mit den Fragestellungen weiterführender Vorlesungen⁶ vollständig ergeben.

⁶Z.B. Nachrichtentechnik I, Messtechnik und viele Vertiefungsmodule, ...

Hinweis

[JW02]: F. Jondral, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse*, Teubner, 2002

ist das der Vorlesung zugrunde liegende Lehrbuch. Ihm entstammt der Großteil der Inhalte.

An einigen Stellen werden die Betrachtungen anders angeordnet, abgeändert bzw. erweitert. In diesem Fall werden Literaturhinweise bereitgestellt.

■ Kapitel der Vorlesung⁷

- ① Organisatorisches (-)
- ① Einleitung (1)
- ② Der Wahrscheinlichkeitsraum (2)
- ③ Bedingte Wahrscheinlichkeiten (3)
- ④ Diskrete Verteilungen (4,5,6)
- ⑤ Stetige Verteilungen (4,5,6)
- ⑥ .
- ⑦ Mehrdimensionale Zufallsvariablen (7)
 - ① Definition
 - ② Abbildungen mehrdimensionaler Zufallsvariablen
 - ③ Grenzwertsätze
- ⑧ Grundlagen stochastischer Prozesse (8)
- ⑨ Spezielle stochastische Prozesse (9)

⁷... in Klammern die Kapitel des Buches

KIT
Karlsruher Institut für Technologie



- 1 Einleitung
 - Motivation
 - Zur Vorgehensweise
 - Lernziele
 - Literatur

- Die folgende Aufstellung fasst die zentralen Punkte zusammen.
- Es wird aufgezeigt, welche Punkte nach Bearbeitung des Kapitels klar sein sollten.
- **Hinweise:**
 - Die Auflistung ist nicht vollständig, sondern führt die wichtigsten Aussagen auf; nicht erwähnte Inhalte sind dennoch bedeutsam.
 - Oft enthalten die Nachweise wichtige Ideen; diese also nicht vernachlässigen.
 - Stets versuchen, Gleichungen in Verbindung mit Interpretationen und Anwendungen zu sehen
 - Des weiteren sollten alle kleinen nützlichen Ergänzungen verstanden sein.
 - Es ist immer eine gute Idee, etwas Gelerntes im Rechner umzusetzen. Dies hilft beim Verständnis und schärft das Bewusstsein für mögliche Probleme.

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Vielfältige Aufgaben und Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie
- Grundaufgabe der Modellbildung

- 1 Einleitung
 - Motivation
 - Zur Vorgehensweise
 - Lernziele
 - Literatur

- [JW02] F. Jondral, A. Wiesler, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse*, Teubner, 2002
- [Kre91] U. Krengel, *Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, Vieweg, 1991
- [Ren62] A. Rényi, *Wahrscheinlichkeitsrechnung – mit einem Anhang über Informationstheorie*, VEB Verlag der Wissenschaften, 1962
- [Hen13] N. Henze. *Stochastik für Einsteiger – Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls*, Springer, 2013
- [Pap91] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 3rd Ed., New York 1991: McGraw-Hill, Inc.