

Wahrscheinlichkeitstheorie – Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Holger Jäkel

Communications Engineering Lab (CEL)



- 3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten
 - Definition und Eigenschaften
 - Unabhängige Ereignisse
 - Mehrstufige Experimente
 - Lernziele
 - Literatur

- Folgende Diskussionen erfolgen gemäß¹

[JW02]: F. Jondral, A. Wiesler, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse*, Teubner, 2002

¹ Von dort entstammen die Struktur der Folien, die Formeln und die meisten Bilder.

- 3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten
 - Definition und Eigenschaften
 - Unabhängige Ereignisse
 - Mehrstufige Experimente
 - Lernziele
 - Literatur

- **Ansatz/Idee:** Ereignisse können sich gegenseitig beeinflussen; sie sind nicht immer *unabhängig*²

- **Beispiel:**

- Betrachte zweifachen Würfelwurf mit dem Laplace-Experiment³:

$$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$$

Folgende Ereignisse sind nicht unabhängig:

$$A := \{(i, j) \in \Omega : i + j \leq 6\} = \text{„Die Summe der Würfe ist max. 6“}$$

$$B := \{(i, j) \in \Omega : i + j \geq 6\} = \text{„Die Summe der Würfe ist min. 6“}$$

$$C := \{(i, j) \in \Omega : i = 6\} = \text{„Die Summe der Würfe ist genau 6“}$$

- Die beiden Ereignisse $A = \{\text{„Person spricht Deutsch“}\}$ und $B = \{\text{„Person besitzt deutsche Staatsbürgerschaft“}\}$ sind nicht unabhängig.

²In umgangssprachlicher Bedeutung. Was dies „in WT bedeutet“, wissen wir noch nicht.

³**Frage/Übung:** Was war ein Laplace-Experiment? Wo sind $\mathcal{B}$ und P ?

- **Fragen:** Wie messen wir Unabhängigkeit zweier Ereignisse $A, B \in \mathcal{B}$?
Welche Arten der Abhängigkeit kann es geben?

- **Antwort:** (Beispiele)

- B kann A unmöglich machen: B eingetreten $\implies A$ tritt nicht ein:

$$B \subset \overline{A}$$

- B kann A sicher machen: B eingetreten $\implies A$ tritt ein:

$$B \subset A$$

- **Ziel:** Auf Abhängigkeitsbegriff der Wahrscheinlichkeit übertragen

Definition



Für einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ und Ereignisse $A, B \in \mathcal{B}$ mit $P(B) > 0$ ist die *bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter B* definiert durch:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Satz

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(\cdot|B)$ definiert für festes B ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{B})$.

■ **Nachweis:** Untersuche die drei Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeit:

1. $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \geq 0$, da Zähler und Nenner nicht-negativ
2. $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

Satz

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(\cdot|B)$ ist für festes B ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{B})$.

■ Nachweis: (ctd.)

$$\begin{aligned} 3. \ P \left(\sum_n A_n \middle| B \right) &\stackrel{(a)}{=} \frac{P((\sum_n A_n) B)}{P(B)} \stackrel{(b)}{=} \frac{P(\sum_n A_n B)}{P(B)} \\ &\stackrel{(c)}{=} \frac{\sum_n P(A_n B)}{P(B)} \stackrel{(d)}{=} \sum_n P(A_n|B) \end{aligned}$$

wobei (a) die Def. der bed. Wahrscheinlichkeit, (b) das Distributivgesetz für Mengen, (c) die Eigenschaft einer Wahrscheinlichkeit und (d) die Def. der bed. Wahrscheinlichkeit ist. ■

■ **Test:** Wurden die angestrebten Ziele erreicht?

■ **Antwort:** (Beispiele)

■ B kann A unmöglich machen:

$$B \subset \overline{A} \implies AB = \emptyset \implies P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 0$$

■ B kann A sicher machen:

$$B \subset A \implies AB = B \implies P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

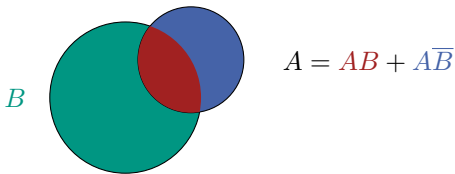
■ **Beobachtung:** Ziele für die Beispiele erfüllt

■ Illustration:

- Aus der Definition folgt:⁴

$$P(A|B) = \begin{cases} \frac{P(A)}{P(B)}, & A \subset B \\ 0, & A \subset \overline{B} \end{cases}$$

Somit „lebt“ $P(A|B)$ auf B , da $A = AB + A\overline{B}$ und der Anteil von A , der in $\overline{B}$ liegt, keine Rolle spielt.



⁴Siehe [Hen13, S. 102]

■ Bemerkungen:

- Umstellen liefert (**Interpretation?**)

$$P(AB) = P(B)P(A|B)$$

- Wiederholte Anwendung⁵ ergibt:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{n=1}^N A_n\right) &= P(A_1)P\left(\bigcap_{n=2}^N A_n \middle| A_1\right) \\ &= \dots \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P\left(A_N \middle| \bigcap_{n=1}^{N-1} A_n\right) \end{aligned}$$

⁵..., falls alle Bedingungen positive Wahrscheinlichkeit haben,...

■ Beispiel:⁶ (Würfelwurf)

- **Frage:** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei zwei unterscheidbaren⁷ Würfeln mind. die Augensumme 9 zu erzielen, wenn der eine Würfel (un-)gerade ist?
- **Lösung:** Laplace-Experiment mit $\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$; Ereignisse

$$A = \{(i, j) : i \text{ gerade } \},$$

$$B = \{(i, j) : i \text{ ungerade } \},$$

$$C = \{(i, j) : i + j \geq 9\}$$

Es folgt:

$$P(C|A) = \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{|AC|/|\Omega|}{|A|/|\Omega|} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \approx 0.33$$

$$P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{|BC|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9} \approx 0.22$$

⁶ **Datei:** dice_even_odd.ipynb

⁷ ... etwa farbig unterschiedlichen...

■ **Beispiel:**⁸ (Geburtstagsdopplung) ([JW02])

- **Frage:** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von N Personen mind. 2 an dem gleichen Kalendertag Geburtstag haben?⁹
- **Lösung:** Wir nehmen $N \leq 365$ an, sonst ist es klar. Definiere bei gedachter Nummerierung der Personen:

$B_i :=$ „Geb. der i -ten Person an einem anderen Tag als alle bisherigen Pers.“

dann ist

$$P(B_2|B_1) = \frac{364}{365}$$

$$P(B_3|B_1 B_2) = \frac{363}{365}$$

...

$$P(B_N|B_1 \cdots B_{N-1}) = \frac{365 - (N - 1)}{365}$$

⁸**Datei:** birthday.ipynb

⁹Wir ignorieren das Geburtsjahr und Schaltjahre.

■ **Beispiel:**¹⁰ (Geburtstagsdopplung) (ctd.)

■ **Lösung:** Insgesamt ergibt sich:

$$P(\text{mind. 2 am gleichen Tag}) = 1 - P(\text{alle an versch. Tagen})$$

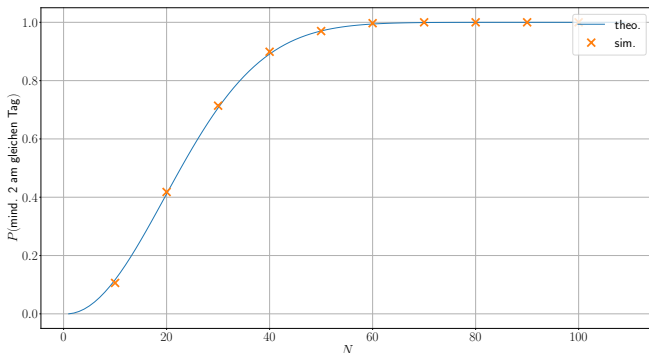
$$= 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^N B_n\right)$$

$$= 1 - P(B_1) P(B_2|B_1) \cdots P\left(B_N \left| \bigcap_{n=1}^{N-1} B_n \right.\right)$$

$$= 1 - 1 \cdot \frac{364}{365} \frac{363}{365} \cdots \frac{365 - (N - 1)}{365}$$

¹⁰ **Datei:** birthday.ipynb

- **Beispiel:** ¹¹ (Geburtstagsdopplung) (ctd.) Theoretische Kurve und Simulation von jeweils 1 000 Gruppen der Größe N



¹¹ **Datei:** birthday.ipynb

- **Anmerkung 1:** Eigentlich können/sollten Wahrscheinlichkeiten nicht als durchgezogene Linien dargestellt werden, weil dies suggeriert, dass Zwischenwerte ($P(1.5)$) ebenfalls auftreten können. Da im vorigen Beispiel die x -Achse aber im Verhältnis zum Abstand der N -Werte relativ lang ist, kann man das an dieser Stelle als anschaulichere Variante zähneknirschend akzeptieren.

- **Anmerkung 2:** Es sei ausdrücklich erneut darauf hingewiesen, dass Simulationen mit N Realisierungen grundsätzlich nur relative Häufigkeiten der Form k/N , $0 \leq k \leq N$ berechnen können und somit Wahrscheinlichkeiten höchstens schätzen können. Dies können sie allerdings offenbar recht gut.¹²

¹²Warum das so ist, werden wir in einem späteren Kapitel begründen.

■ Anmerkung 3:

- Das Geburtstagsbeispiel zeigt erneut, dass man bei Modellierung und Annahmen sehr vorsichtig sein muss: Wer garantiert, dass Geburtstage wirklich über das Jahr gleichverteilt sind? (Kaiserschnitte eher an Werktagen als an Wochenenden; saisonale Schwankungen, etc.)¹³
- Bei Ballung der Geburtstage könnte die Wahrscheinlichkeit sogar eher noch ansteigen.

¹³Unter <http://www.math.hope.edu/swanson/data/birthdays.txt> findet man eine Statistik für die Anzahl der Geburten pro Tag in den USA im Jahre 1978.

■ Häufige Fragestellung:

- Wahrscheinlichkeit eines kompliziert zu modellierenden Ereignisses gesucht
- Wahrscheinlichkeit ziemlich schwierig/umständlich zu berechnen

- **Idee:** Betrachte das Ereignis unter gewissen Nebenbedingungen bzw. Zusatzinformation $\implies$ Wahrscheinlichkeit „leichter“ zu berechnen

Satz (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)



Für einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ sei $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{B}$ eine Ereignisdisjunktion mit $P(A_n) > 0$ und $A_1 + \dots + A_N = \Omega$. Dann gilt für jedes $B \in \mathcal{B}$ die *Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit*,

$$P(B) = \sum_{n=1}^N P(B|A_n)P(A_n).$$

■ **Nachweis:**¹⁴ Wegen $\sum_n A_n = \Omega$ folgt die Aussage aus

$$P(B) = P(B\Omega) = P\left(B \cap \sum_n A_n\right) = P\left(\sum_n B \cap A_n\right) = \sum_n P(BA_n)$$

und der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit. ■

¹⁴Details siehe Tafel

■ Beispiel: ¹⁵ (Würfelwurf)

- Bei Wurf zweier unterscheidbarer Würfel folgt die Wahrscheinlichkeit mind. die Augensumme 9 zu erzielen mit

$$A = \{(i, j) : i \text{ gerade}\},$$

$$B = \{(i, j) : i \text{ ungerade}\},$$

$$C = \{(i, j) : i + j \geq 9\}$$

zu:

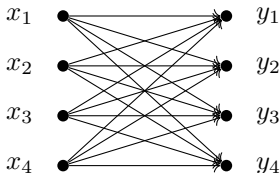
$$\begin{aligned} P(C) &= P(C|A) \cdot P(A) + P(C|B)P(B) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18} \approx 0.2778 \end{aligned}$$

- **Test:** Durch Abzählen im Laplace-Experiment (**Übung**)

¹⁵**Datei:** dice_even_odd.ipynb

■ Beispiel: (Nachrichtenübertragung¹⁶)

- **Situation:** Sie senden eines von vier möglichen Symbolen x_1, x_2, x_3, x_4 und beobachten am Empfänger aufgrund Kanalstörungen verfälschte Symbole y_1, y_2, y_3, y_4 ; vgl. unteres Bild
- **Frage:** Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird am Empfänger das Symbol y_1 beobachtet?



$$P(y_1) = P(y_1|x_1)P(x_1) + \dots + P(y_1|x_4)P(x_4)$$

¹⁶**Bem.:** Im Rahmen der Nachrichtenübertragung werden die bedingten Wahrscheinlichkeiten als *Übergangswahrscheinlichkeiten* bezeichnet.

Satz (*Formel von Bayes*)

Für einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ und $A, B \in \mathcal{B}$ mit $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ gilt die *Formel von Bayes*:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

- **Nachweis:**¹⁷ Folgt direkt aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit. 

¹⁷Details siehe Tafel

■ **Beispiel:** (aus [Kre91])

- Eine Krankheit liege bei jeder Person mit Wahrscheinlichkeit 0.5% vor:

$$K = \text{„Krankheit liegt vor“} \implies P(K) = 0.005$$

- Für ein Testverfahren gilt mit T = „Test positiv“:

$$P(T|K) = 0.99, \quad P(T|\bar{K}) = 0.02$$

- **Frage:** Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist man krank, wenn der Test positiv ist?
- **Antwort:** Formel von Bayes und Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(K|T) &= \frac{P(T|K)P(K)}{P(T)} \\ &= \frac{P(T|K)P(K)}{P(T|K)P(K) + P(T|\bar{K})P(\bar{K})} \\ &= \frac{0.99 \cdot 0.005}{0.99 \cdot 0.005 + 0.02 \cdot 0.995} \approx 0.1992 \end{aligned}$$

3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- Definition und Eigenschaften
- Unabhängige Ereignisse
- Mehrstufige Experimente
- Lernziele
- Literatur

Definition



Zwei Ereignisse $A \in \mathcal{B}$, $B \in \mathcal{B}$ heißen *unabhängig*, falls

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Ist $P(B) > 0$, so folgt¹⁸

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A);$$

das Auftreten von B hat keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit von A .

¹⁸Analog folgt für $P(A) > 0$ der Zusammenhang $P(B|A) = P(B)$.

■ Bemerkungen:

- Obige Definition der Unabhängigkeit ist nach Konstruktion symmetrisch, während die Formulierung über die bed. Wahrscheinlichkeit wie in [JW02] $P(B) > 0$ (bzw. $P(A) > 0$) benötigt.
- Die Formulierung über bed. Wahrscheinlichkeit gibt eher die Anschauung wieder, dass Ereignisse keinen Einfluss aufeinander haben.
- Unabhängigkeit ist nicht mit Disjunktheit zu verwechseln. Disjunkte Ereignisse sind sehr wohl abhängig.¹⁹
- Sind $A, B \in \mathcal{B}$ unabhängig, so sind $A, \overline{B} \in \mathcal{B}$ ebenfalls unabhängig.

¹⁹„Immer das Gegenteil ist vorhersagbar.“

■ Beispiel:

- Beim Würfelwurf mit $\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$ gilt für die Ereignisse

$$A = \{(i, j) : i \text{ gerade} \},$$

$$C = \{(i, j) : i + j \geq 9\}$$

der Zusammenhang:

$$P(C|A) = \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{|AC|/|\Omega|}{|A|/|\Omega|} = \frac{6}{18} \neq \frac{10}{36} = P(C).$$

Die Ereignisse sind nicht stochastisch unabhängig. „Ist der erste Wurf gerade, so ist C etwas wahrscheinlicher.“

Definition

Die Ereignisse $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{B}$ heißen *vollständig unabhängig*, falls

$$P\left(\bigcap_{k=1}^K A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^K P(A_{i_k})$$

für jedes $1 \leq K \leq N$ und jede Auswahl $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_K \leq N$.

■ Bemerkungen:

- Der Fall zweier Ereignisse ist als Spezialfall enthalten.
- Vollständige Unabhängigkeit wird kurz als Unabhängigkeit bezeichnet. Die vorherige Definition wird als *paarweise Unabhängigkeit* titulierte.
- Sind Ereignisse $A_1, \dots, A_N$ vollständig unabhängig, so ist jede Teilfamilie ebenfalls vollständig unabhängig. Insbesondere folgt aus der vollständigen Unabhängigkeit die paarweise Unabhängigkeit.

3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- Definition und Eigenschaften
- Unabhängige Ereignisse
- **Mehrstufige Experimente**
- Lernziele
- Literatur

■ Feststellung:

- Oft bestehen Zufallsexperimente aus mehreren Komponenten
- Ggf. hängen Ergebnisse eines Teilexperiments von vorhergehenden Teilexperimenten ab

■ Ziel:

- Beschreibung solch *gekoppelter Experimente*
- Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in gekoppelten/mehrstufigen Experimenten

²⁰ **Hinweis:** Die folgenden Betrachtungen entstammen [Hen13] und sind in [JW02] nur implizit enthalten.

■ Beispiele:

■ Zufällige Urnen

- **Gegeben:** Zwei Urnen $U_1 = \{w, w, s, s, s\}$, $U_2 = \{w, g, g, r, r\}$ mit Kugeln in weiß/grün/rot/schwarz
- Eine Urne wird zufällig gewählt, wobei $p_1 = P(\{\text{Urne } U_1 \text{ gewählt}\}) = 0.7$
- Anschließend wird eine Kugel aus der gewählten Urne gezogen
- **Frage:** Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die gezogene Kugel weiß/grün/rot/schwarz?

■ Zufälliger Würfel

- **Gegeben:** Ein Würfel mit 10 gleichwahrscheinlichen Seiten
- Der Würfel wird geworfen und erzeugt eine Zahl $Z \in \{1, \dots, 10\}$
- Anschließend wird ein Würfel mit Z gleichwahrscheinlichen Seiten $\{1, \dots, Z\}$ geworfen
- **Frage:** Welche Wahrscheinlichkeiten besitzt das Ergebnis des zweiten Wurfes?



■ Modellierung:

- Der Ergebnisraum entsteht als Produkt der Teilexperimente:

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$$

- Auf Ω_1 wird eine *Startverteilung* festgelegt:²¹

$$P_1(a_1), \quad a_1 \in \Omega_1$$

- Abhängig vom Ergebnis des ersten Teilexperiments ergibt sich die bedingte Wahrscheinlichkeit bzw. *Übergangswahrscheinlichkeit*:

$$P_{12}(a_2|a_1), \quad a_2 \in \Omega_2$$

mit („irgendwo muss man hingehen“)

$$\sum_{a_2 \in \Omega_2} P_{12}(a_2|a_1) = 1$$

²¹ **Bemerkung:** Die Elemente werden als a bezeichnet, um nicht mit einer Abzählung $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ verwechselt zu werden; vgl. Kap. 2.

■ Modellierung:

- Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses $\omega = (a_1, a_2) \in \Omega$ lautet:

$$P(\omega) = P_1(a_1) \cdot P_{12}(a_2|a_1)$$

- Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $A \subset \Omega$ erfolgt über:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{\omega \in A} P(\omega) \\ &= \sum_{(a_1, a_2) \in A} P_1(a_1) P_{12}(a_2|a_1) \\ &= \sum_{a_1 \in \Omega_1: (a_1, a_2) \in A} P_1(a_1) \cdot \sum_{a_2 \in \Omega_2: (a_1, a_2) \in A} P_{12}(a_2|a_1) \end{aligned}$$

■ Beispiel: (Zufällige Urnen)

- Für die zufälligen Urnen ergibt sich²² $\Omega = \{1, 2\} \times \{w, s, g, r\}$ und

$$P_{12}(a_2|a_1 = 1) = \begin{cases} \frac{2}{5}, & a_2 = w \\ \frac{3}{5}, & a_2 = s \\ 0, & a_2 \in \{g, r\} \end{cases}, \quad P_{12}(a_2|a_1 = 2) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & a_2 = w \\ 0, & a_2 = s \\ \frac{2}{5}, & a_2 \in \{g, r\} \end{cases}$$

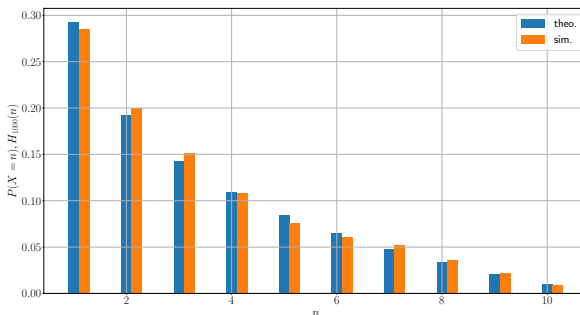
- Die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel zu ziehen lautet damit:

$$\begin{aligned} P(\text{w ziehen}) &= \sum_{(a_1, a_2) \in \Omega: a_2=w} P(a_1) \cdot P(a_2|a_1) \\ &= P_1(1)P_{12}(w|a_1 = 1) + P_1(2)P_{12}(w|a_1 = 2) \\ &= 0.7 \cdot 2/5 + 0.3 \cdot 1/5 \\ &= 0.34 \end{aligned}$$

²² Ω_1 modelliert die Wahl der Urne, Ω_2 das Ziehen der Kugel aus der gewählten Urne.

■ Beispiel: ²³ (Zufälliger Würfel)

- Wahrscheinlichkeit²⁴ und relative Häufigkeiten der Verteilung eines zufälligen Würfels bei 1 000 Realisierungen



²³ Datei: conditional_dice.ipynb

²⁴ Übung: Berechnen Sie die theoretischen Wahrscheinlichkeiten.

■ Ergänzung: (Mehrstufige Experimente)

- Bei mehr als zwei Teilexperimenten setzt sich das Prinzip entsprechend fort.
- Der Ergebnisraum wird:

$$\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$$

- Die Wahrscheinlichkeit von $\omega = (a_1, \dots, a_N)$ folgt zu:

$$P(\omega) = P_1(a_1) \cdot P_{12}(a_2|a_1) \cdot P_{123}(a_3|a_1, a_2) \cdots P_{1\dots N}(a_N|a_1, \dots, a_{N-1})$$

■ *Baumdarstellung mehrstufiger Experimente*



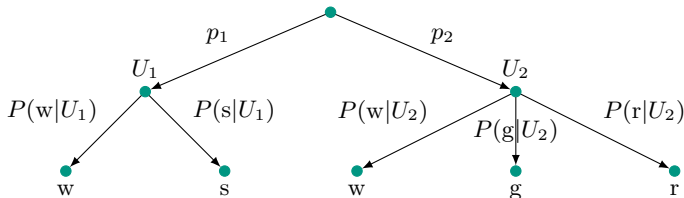
- **Idee:** Graphische Darstellung des Experiments durch Beschreibung der Telexperimente und ihrer Abhängigkeiten

■ **Vorgehensweise:**

- Starte mit Wurzel
- Ebene 1: Verzweige von der Wurzel $|\Omega_1|$ -fach entsprechend der möglichen Ergebnisse des ersten Telexperiments
- Ebene 1: Gewichten der Pfade mit den Startwahrscheinlichkeiten
- Ebene 2: Verzweige in jedem Knoten der zweiten Ebene $|\Omega_2|$ -fach entsprechend der jeweils möglichen Ergebnisse des zweiten Telexperiments
- Ebene 2: Gewichten der Pfade mit den Übergangswahrscheinlichkeiten
- Ebene 3: ...

■ Beispiel: (Baumdarstellung)

■ Zufällige Urnen²⁵



■ Übung: Bestimmen Sie die Darstellung für den zufälligen Würfel

²⁵ **Hinweis:** Der Übersichtlichkeit wegen werden meist Pfade mit Wahrscheinlichkeit 0 weggelassen.

■ Beobachtungen:



- Der Baum besitzt so viele Ebenen wie das Experiment Stufen
- Spätere Übergänge (ungleich dem ersten) sind gewichtet mit bedingten Wahrscheinlichkeiten, abhängig vom bisherigen Weg
- Die Wahrscheinlichkeit eines mehrstufigen *Ergebnisses* entsteht als Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des entsprechenden Pfads ([Hen13]: *Erste Pfadregel*)
- Die Wahrscheinlichkeit eines mehrstufigen *Ereignisses* entsteht als Summe der Wahrscheinlichkeiten²⁶ aller entsprechenden Pfade ([Hen13]: *Zweite Pfadregel*)

²⁶**Bemerkung:** Letztlich entspricht das dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit, wobei die Pfade der Ereignisdisjunktion entsprechen.

■ Ergänzung: (Produktexperimente)

- Ein besonderer Fall ergibt sich, wenn die Teilexperimente voneinander unabhängig sind.
- Bei Unabhängigkeit der Teilexperimente folgt für $\omega = (a_1, \dots, a_N)$:

$$\begin{aligned} P(\omega) &= P_1(a_1) \cdot P_{12}(a_2|a_1) \cdot P_{123}(a_3|a_1, a_2) \cdots P_{1\dots N}(a_N|a_1, \dots, a_{N-1}) \\ &= P_1(a_1) \cdot P_2(a_2) \cdots P_N(a_N) \end{aligned}$$

Hinweis

Sind in einem Produktexperiment zudem alle Experimente identisch,

$$\Omega_1 = \dots = \Omega_N$$

und

$$P_1(\cdot) = \dots = P_N(\cdot),$$

so entsteht das Modell einer N -fachen wiederholten Beobachtung, das in Kapitel 2 bei absoluten und relativen Häufigkeiten verwendet wurde.

3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- Definition und Eigenschaften
- Unabhängige Ereignisse
- Mehrstufige Experimente
- **Lernziele**
- Literatur

- Die folgende Aufstellung fasst die zentralen Punkte zusammen.
- Es wird aufgezeigt, welche Punkte nach Bearbeitung des Kapitels klar sein sollten.
- **Hinweise:**
 - Die Auflistung ist nicht vollständig, sondern führt die wichtigsten Aussagen auf; nicht erwähnte Inhalte sind dennoch bedeutsam.
 - Oft enthalten die Nachweise wichtige Ideen; diese also nicht vernachlässigen.
 - Stets versuchen, Gleichungen in Verbindung mit Interpretationen und Anwendungen zu sehen
 - Des weiteren sollten alle kleinen nützlichen Ergänzungen verstanden sein.
 - Es ist immer eine gute Idee, etwas Gelerntes im Rechner umzusetzen. Dies hilft beim Verständnis und schärft das Bewusstsein für mögliche Probleme.

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Abhängigkeit von Ereignissen
- Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit, Bedeutung und Eigenschaften
- Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit
- Formel von Bayes
- Unabhängigkeit von Ereignissen
- Mehrstufige/gekoppelte Experimente, Baumdarstellung, Produktexperimente

- 3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten
 - Definition und Eigenschaften
 - Unabhängige Ereignisse
 - Mehrstufige Experimente
 - Lernziele
 - Literatur

- [JW02] F. Jondral, A. Wiesler, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse*, Teubner, 2002
- [Kre91] U. Krengel, *Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, Vieweg, 1991
- [Ren62] A. Rényi, *Wahrscheinlichkeitsrechnung – mit einem Anhang über Informationstheorie*, VEB Verlag der Wissenschaften, 1962
- [Hen13] N. Henze. *Stochastik für Einsteiger – Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls*, Springer, 2013
- [Pap91] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 3rd Ed., New York 1991: McGraw-Hill, Inc.