

STOCHASTISCHE PROZESSE (Analyse zeitabhängiger Phänomene)

Grundlegende Konzepte

Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

- Ergebnisraum (Ω) : Menge aller möglichen Ergebnisse
- Sigma-Algebra $(\mathcal{F})$: Menge von Ereignissen (Teilmenge von Ω)
- Wahrscheinlichkeitsmaß (P) : Funktion, die Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zuordnet
 $P: \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$, mit $P(\Omega)=1$

Zufallsvariable $(X, Y, \dots)$: Funktion, die Ergebnissen reelle Zahlen zuordnet.

- Für diskrete Variablen: $p(x) = P(X=x)$
- Für stetige Variablen: $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$, wobei $F(x) = P(X \leq x)$ die Verteilungsfunktion ist.

Potenzmenge $P(\Omega)$: alle Teilmengen & leere Menge $(\emptyset)$ von Ω

Kolmogoroff-Axiome:

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Für disjunkte Ereignisse: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$: Ergebnisraum (N mögliche Ausgänge)

$\omega_i \in \Omega$: Ergebnisse

$A \subseteq \Omega$: Ereignisse (Teilmengen des Ergebnisraums)

$\{\omega_i\}$: Elementarergebnisse (Teilmenge mit einem Element)

Ω : sicheres Ergebnis

$\emptyset$: unmögliches Ergebnis

Wahrscheinlichkeitsberechnungen

Einfache Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl günstiger Ergebnisse}}{\text{Anzahl möglicher Ergebnisse}}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Satz von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Leistungsdichtespektrum

Markov-Ketten: Zustandswechsel basieren nur auf dem aktuellen Zustand
Übergangsmatrix P mit p_{ij} als Übergangswahrscheinlichkeit von i zu j

Unabhängigkeit: Zwei Ereignisse A und B sind unabhängig,
wenn $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Kombinatorik (Zahl möglicher Kombinationen)

	Ohne Wiederholung	Mit Wiederholung
Permutation Mit Reihenfolge	$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$	$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_s!}$
Variation Stichprobe Mit Reihenfolge	$V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V(n, k) = n^k$
Kombination Stichprobe Ohne Reihenfolge	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$	$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{n-k}$

STATISTIK (sammeln & auswerten von Daten)

Maßzahlen und Kenngrößen

Erwartungswert ($E(X)$): Maß für den zentralen Wert der Verteilung

- diskret: $E(X) = \sum x_i p(x_i)$

- stetig: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

Varianz ($Var(X)$): Maß für die Streuung der Werte um den Erwartungswert

- $Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$

Standardabweichung (σ_X): $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

Kovarianz ($Cov(X, Y)$): Maß für den linearen Zusammenhang zweier Variablen

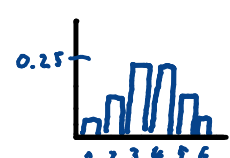
- $Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Korrelation ($\rho_{X, Y}$): Normalisierte Form der Kovarianz

- $\rho_{X, Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

Spezielle Verteilungen

Binomialverteilung ($B(n, p)$)



Anzahl der Erfolge in einer festen Anzahl von unabhängigen Bernoulli-Versuchen

Bsp: Erfolgswahrscheinlichkeit bei 10 Münzwürfen für genau 5 mal Kopf

- Wahrscheinlichkeitsfunktion: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

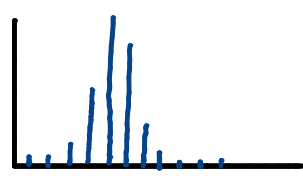
- Erwartungswert: $\mu = E(X) = np$

- Varianz: $\sigma^2 = Var(X) = np(1-p)$

- Verteilungsfunktion: Summation der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$\left(\begin{array}{l} n: \text{Anzahl der Versuche} \\ k: \text{Anzahl der Erfolge} \\ p: \text{Erfolgswahrscheinlichkeit pro Versuch} \end{array} \right)$

Hypergeometrische Verteilung



Erfolge ohne Zurücklegen aus einer Population

Bsp: Chance, bei 12 Zügen aus 20 Kugeln (3 rot, 13 blau) genau 3 rote Kugeln ohne Zurücklegen zu ziehen.

- Wahrscheinlichkeitsfunktion: $P(X=k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

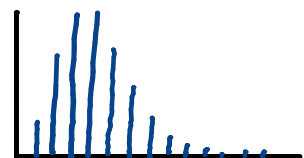
- Erwartungswert: $E(X) = n \frac{K}{N}$

- Varianz: $Var(X) = n \frac{K}{N} \frac{N-K}{N} \frac{N-n}{N-1}$

- Verteilungsfunktion: Summation der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$\left(\begin{array}{l} N: \text{Gesamtzahl der Elemente} \\ K: \text{Anzahl günstiger Elemente} \\ n: \text{Größe Stichprobe} \\ k: \text{Anzahl günstiger Elemente in der Stichprobe} \end{array} \right)$

Poissonverteilung ($Pois(\lambda)$)



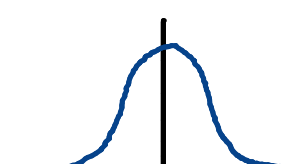
Anzahl Ereignisse in Zeit- oder Raumintervallen

Bsp: Kundenzahl, die pro Stunde in ein Café kommen.

- Wahrscheinlichkeitsfunktion: $P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

- Erwartungswert und Varianz: $E(X) = Var(X) = \lambda$

Normalverteilung ($N(\mu, \sigma^2)$)



Verteilt Daten um einen Mittelwert

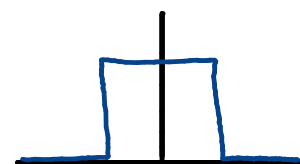
Bsp: Verteilung der Körpergrößen in einer Bevölkerung.

- Dichtefunktion: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

- Erwartungswert: μ

- Varianz: σ^2

Gleichverteilung



Alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich

Bsp: Ergebnismöglichkeiten eines fairen sechsseitigen Würfels

Kontinuierlich:

- Dichtefunktion: $f(x) = \frac{1}{b-a}$ für $x \in [a, b]$

- Erwartungswert: $E(X) = \frac{a+b}{2}$

- Varianz: $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

- Verteilungsfunktion: $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ für $x \in [a, b]$

Diskret:

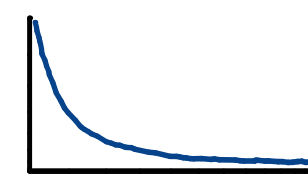
- Wahrscheinlichkeitsfunktion: $f(x) = \frac{1}{n}$ für $x \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

- Erwartungswert: $E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

- Varianz: $Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2$

- Verteilungsfunktion: $F(x) = \frac{\text{Anzahl der Werte } \leq x}{n}$

Exponentialverteilung



Zeit zwischen zwei unabhängigen Ereignissen (Lebensdauer, Wartezeit,...)

Bsp: Zeit bis zum nächsten unabhängigen Anruf in Callcenter

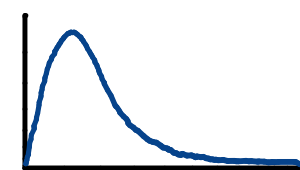
- Dichtefunktion: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$

- Erwartungswert: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

- Varianz: $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

- Verteilungsfunktion: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

Weibullverteilung



Flexibles Modell für Lebensdauer

Bsp: Analyse der variierenden Ausfallrate von Bauteilen über die Zeit

- Dichtefunktion: $f(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}$ für $x \geq 0$

- Erwartungswert: $E(X) = \lambda \Gamma(1 + \frac{1}{k})$

- Varianz: $Var(X) = \lambda^2 [\Gamma(1 + \frac{2}{k}) - (\Gamma(1 + \frac{1}{k}))^2]$

- Verteilungsfunktion: $F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}$

Wichtige Regeln und Theoreme

Additionssatz

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Multiplikationssatz

$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ (für abhängige Ereignisse)

Tschebyscheff-Ungleichung

Zentraler Grenzwertsatz

Summen vieler unabhängiger Zufallsvariablen nähern sich einer Normalverteilung an

Gesetz der großen Zahlen

$\bar{X}_n \rightarrow E(X)$ wenn $n \rightarrow \infty$