

Bildgebende Verfahren in der Medizin - Systemtheorie -

1D-Fouriertransformation (Ort)

Fouriertransformation von ortsabhängigen Signalen:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-j \cdot 2\pi \cdot ux) dx$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \cdot \exp(+j \cdot 2\pi \cdot ux) du$$

$$f(x) \text{ --- } F(u)$$

$$F(u) = |F(u)| \cdot \exp(j \cdot \phi(u))$$

$|F(u)|$ = Amplitudenspektrum
 $\phi(u)$ = Phase

2D-Fouriertransformation

Ortsraum: Frequenzraum:

$$f(x,y) \text{ --- } F(u,v)$$

$$F(u,v) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \exp(-j \cdot 2\pi \cdot (ux + vy)) dx dy$$

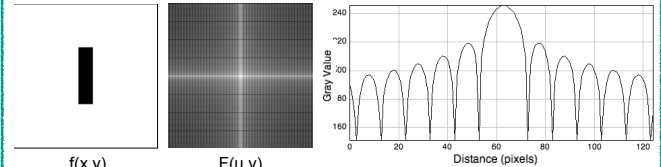
$$f(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(u,v) \exp(+j \cdot 2\pi \cdot (ux + vy)) du dv$$

$$F(u,v) = |F(u,v)| \cdot \exp(j \cdot \phi(u,v))$$

$|F(u,v)|$ = Amplitudenspektrum
 $\phi(u,v)$ = Phase

Grauwerte

$$D(u,v) = c \cdot \log[1 + |F(u,v)|]$$



Für quadratische Bilder mit einer Zeilen- bzw. Spaltenzahl, die eine Zweierpotenz ist:

Fast Fourier-Transformation FFT

Digitale 1D-Fouriertransformation

$$F(u) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cdot \exp(-j \cdot 2\pi \cdot ux / N)$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \cdot \exp(+j \cdot 2\pi \cdot ux / N)$$

$$\{F(0), F(1), \dots, F(N-1)\} = F(u)$$

$$\{\tilde{F}(0), \tilde{F}(\Delta u), \dots, \tilde{F}((N-1) \cdot \Delta u)\}$$

$$\Delta u = \frac{1}{N \cdot \Delta x}$$

Die Fouriertransformation ist eine lineare Abbildung.

$F(0,0)$ ist der Mittelwert aller Grauwerte im Bild.

Digitale 2D-Fouriertransformation

$$F(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{xy} f(x,y) \cdot \exp(-j \cdot 2\pi (ux + vy) / N)$$

$$f(x,y) = \frac{1}{N} \sum_{u,v} F(u,v) \cdot \exp(+j \cdot 2\pi (ux + vy) / N)$$

Wenn $f(x,y)$ reell ist gilt:

$$F(u,v) = F(-u,-v)^*$$

$$F(u+N,v) = F(u,v)$$

$$F(u,v+N) = F(u,v)$$

2D-Faltungsintegral

$$f(x,y) * g(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x',y') g(x-x',y-y') dx' dy'$$

$$f(x,y) * g(x,y) \text{ --- } F(u,v) \cdot G(u,v)$$

2D-Korrelationsintegral

$$f(x,y) \otimes g(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x',y') \cdot g(x+x',y+y') dx' dy'$$

Korrelationstheorem:

$$f(x,y) \otimes g(x,y) \text{ --- } F^*(u,v) \cdot G(u,v)$$

Autokorrelation:

$$f(x,y) \otimes g(x,y) \text{ --- } |F(u,v)|^2$$

LTI Systeme

Linearität:

$$\Sigma c_i f_i(x,y) \text{ --- System --- } \Sigma c_i g_i(x,y)$$

Verschiebungsinvarianz:

$$f(x-x_0, y-y_0) \text{ --- System --- } g(x-x_0, y-y_0)$$

Hauptsatz der Systemtheorie:

$$g(x,y) = f(x,y) * h(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x',y') h(x-x',y-y') dx' dy'$$

$$g(x,y) \text{ --- } G(u,v) = F(u,v) \cdot H(u,v)$$

$h(x,y)$ heißt „Impulsantwort“.

$H(u,v)$ heißt: „komplexe Übertragungsfunktion“.

Rauschen

$$\frac{\text{Signal}_{\text{Ausgang}}^2(u,v)}{\text{Rauschen}_{\text{Ausgang}}^2(u,v)} = \text{DQE}(u,v) = \frac{\text{Signal}_{\text{Eingang}}^2(u,v)}{\text{Rauschen}_{\text{Eingang}}^2(u,v)}$$

$$\text{NPS}_{\text{Ausgang}}(u,v) = G^2 \cdot \frac{\text{MTF}^2(u,v)}{\text{DQE}(u,v)} \cdot \text{NPS}_{\text{Eingang}}(u,v)$$

Bei Röntgenquanten:

$$\text{NPS}_{\text{Eingang}}(u,v) = \bar{n}_{\text{Eingang}}$$

$$\text{NPS}_{\text{Ausgang}}(u,v) = G^2 \cdot \frac{\text{MTF}^2(u,v)}{\text{DQE}(u,v)} \cdot \bar{n}_{\text{Eingang}}$$

Modulationsübertragungsfunktion

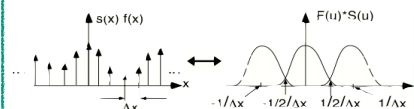
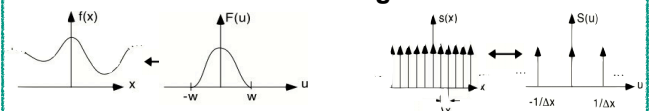
MTF = Modulation Transfer Function:

$$\text{MTF}(u,v) = |H(u,v)|$$

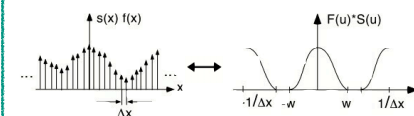
$$\text{MTF}(u,v) = \frac{|H(u,v)|}{|H(0,0)|}$$

Messung der MTF über verschiedene Methoden.

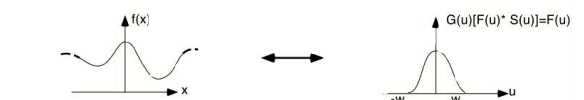
Abtastung



Abtasttheorem wird verletzt



Abtasttheorem wird eingehalten



Shannon- Nyquist Abtasttheorem:

mit: Δx = Abtastabstand,
 w = größte vorkommende Raumfrequenz

$$\Delta x \leq \frac{1}{2w}$$

Verständnisfragen

- Nennen Sie vier Messverfahren um die MTF eines abbildenden Systems zu bestimmen?
- Was bedeutet die DQE (u,v) für die Qualität eines abbildenden System? Wie kann die Rauscheigenschaft des abbildenden Systems weiter optimiert werden?
- Welche Information kann man aus der Korrelation von zwei Bildern erzeugen?
- Skizzieren Sie einen typischen Verlauf der MTF eines guten, eines mittleren und eines schlechten abbildenden Systems?
- Unter welchen Bedingungen lässt sich in Theorie und Praxis, aus einem durch ein abbildendes System verändertes Bild das Original wieder herstellen?
- Was sind Aliasing Artefakte, wie entstehen sie und was kann man gegen sie unternehmen?