

5. Übungsblatt zu Algorithmen I im SoSe 2016

<https://crypto.itl.kit.edu/index.php?id=algo-bose16>
{lisa.kohl,lukas.barth}@kit.edu

Aufgabe 1 (Sortieren, 1 + 1 + 2 Punkte)

Sortieren Sie die Ziffern Ihrer Matrikelnummer mittels den in den Teilaufgaben angegebenen Algorithmen aus der Vorlesung. (Falls Sie zu zweit abgeben, genügt eine von beiden.)

- Bestimmen Sie die Anzahl von Inversionen in Ihrer Matrikelnummer.
- Benutzen Sie Insertionsort. Geben Sie den Zustand des Feldes nach jedem Einfüge-Schritt an.
- Benutzen Sie Mergesort. Verwenden Sie das Schema aus der Vorlesung (siehe Vorlesungsfolien vom 18.05., Beispiel Folie 10).

Aufgabe 2 (Algorithmenentwurf, 4 Punkte)

Sie sind der Manager eines Autoverleihs. Ihre Firma besitzt $k \in \mathbb{N}$ unterschiedliche Fahrzeugtypen, die alle verliehen werden können. Von jedem Fahrzeugtyp $t \in \{1 \dots k\}$ besitzt Ihre Firma $c_t \in \mathbb{N}$ Fahrzeuge. Ihnen liegen nun die n nächsten Buchungen vor, wobei jede Buchung aus einem Abholzeitpunkt, einem Rückgabezeitpunkt und einem gewünschten Fahrzeugtypen besteht. Ihre Aufgabe ist es, zu überprüfen, ob mit den vorhandenen Fahrzeugen alle Buchungen erfüllt werden können. Zum aktuellen Zeitpunkt sind keine Fahrzeuge verliehen. Gehen Sie davon aus, dass ein Fahrzeug, ab dem Moment, in dem es zurückgegeben wird, sofort wieder verliehen werden kann.

- Entwerfen Sie einen Algorithmus, der dieses Problem in höchstens $\mathcal{O}(n \log n + k)$ Zeit löst.
- Begründen Sie kurz, warum Ihr Algorithmus das gewünschte Laufzeitverhalten aufweist.

Aufgabe 3 (Sortieren, 5 Punkte)

Betrachten Sie folgenden Sortieralgorithmus.

Procedure $sort(A : \text{Array of } \mathbb{N}, i : \mathbb{N}, j : \mathbb{N})$

assert $j - i + 1$ ist eine Zweierpotenz

if $A[i] > A[j]$ **then** vertausche $A[i]$ und $A[j]$

if $i + 1 < j$ **then**

$k := (j - i + 1) / 4$

$sort(A, i, j - 2k)$

$sort(A, j - 2k + 1, j)$

$sort(A, i + k, j - k)$

$sort(A, i, j - 2k)$

$sort(A, j - 2k + 1, j)$

$sort(A, i + k, j - k)$

- Beweisen Sie, dass $sort(A, 1, \text{length}(A))$ das Array $A[1 \dots \text{length}(A)]$ korrekt sortiert, wenn $\text{length}(A)$ eine Zweierpotenz ist. Sie dürfen dabei vereinfachend annehmen, dass Zahlen nicht doppelt vorkommen.
- Geben Sie eine scharfe asymptotische Schranke für die Laufzeit des Algorithmus. Beweisen Sie, dass die gegebene asymptotische Schranke tatsächlich eine obere Schranke der Laufzeit ist.

Aufgabe 4 (Kombinatorik, 2 + 1 + 3 Punkte)

Aus der Vorlesung Grundbegriffe der Informatik wissen Sie, dass ein Wort w über einem Alphabet Σ eine Folge von Zeichen aus Σ ist.

- a) Sei $\Sigma = \{\mathbf{a, e, t, m}\}$ gegeben. Betrachten Sie das Wort $w_1 = \mathbf{meta} \in \Sigma^4$. Wie viele verschiedene Wörter können durch Umstellen der Zeichen von w_1 konstruiert werden? Wie sieht es aus, wenn Sie stattdessen $w_2 = \mathbf{emma}$ als Ausgangswort verwenden? Wählen Sie einen Buchstaben aus Σ und geben Sie alle (von w_1 und w_2 verschiedenen) Wörter mit diesem Anfangsbuchstaben an, die auf die beschriebene Art aus w_1 und w_2 konstruiert werden können.
- b) Sortieren Sie die Buchstaben in Σ nach Aufwand der vorherigen Aufgabe. Beginnen Sie mit dem Buchstaben, für den Sie bei der Teilaufgabe a) am wenigsten Wörter erhalten. Geben Sie jeweils die Anzahl der erhaltenen Wörter an.
- c) Sei nun das komplette Alphabet $\tilde{\Sigma} = \{\mathbf{a, \dots, z}\}$ gegeben. Betrachten Sie das Wort $w \in \tilde{\Sigma}^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wie viele verschiedene Wörter können durch Umstellen der Zeichen von w konstruiert werden? Wieviele davon beginnen jeweils mit einem bestimmten Anfangsbuchstaben? Begründen Sie Ihre Antworten und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus a) und b). Verwenden Sie für $\sigma \in \tilde{\Sigma}$ die Bezeichnung n_σ für die Anzahl von σ 's in w . **Hinweis:** $0! = 1$.

Ausgabe: Mittwoch, 18.5.2016

Abgabe: Freitag, 27.05.2016, 12:45 im Briefkasten im Untergeschoss von Gebäude 50.34

Deckblatt Übungsblatt 5

Algorithmen I

A1	A2	A3	A4	Σ
-----------	-----------	-----------	-----------	----------

Tutoriumsnummer:

Name

Matrikelnummer

Unterschrift

_____	_____	_____
_____	_____	_____

Mit unseren Unterschriften bestätigen wir, dass die Aufgaben von den Unterzeichnern eigenständig gelöst worden sind.

Hinweis: Das Übungsblatt darf in Gruppen von bis zu zwei Personen bearbeitet werden. Beide Personen müssen demselben Tutorium zugeteilt sein. Möchte jemand seine Abgaben-Gruppe innerhalb des Semesters wechseln, so ist dies im Voraus mit dem Tutor abzusprechen. **Bitte tragen Sie in das obere Quadrat groß die Nummer Ihres Tutoriums ein.** Die Lösung des Übungsblattes ist in jedem Fall mit diesem Deckblatt abzugeben.