Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

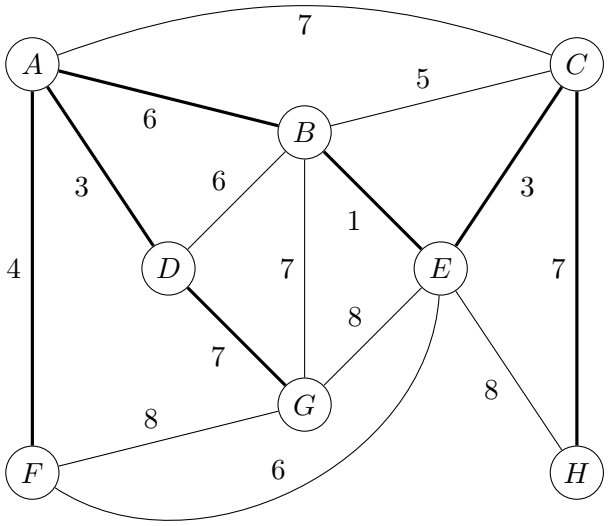
Prof. Dr. Dennis Hofheinz
Lukas Barth, Lisa Kohl

10. Übungsblatt zu Algorithmen I im SoSe 2016

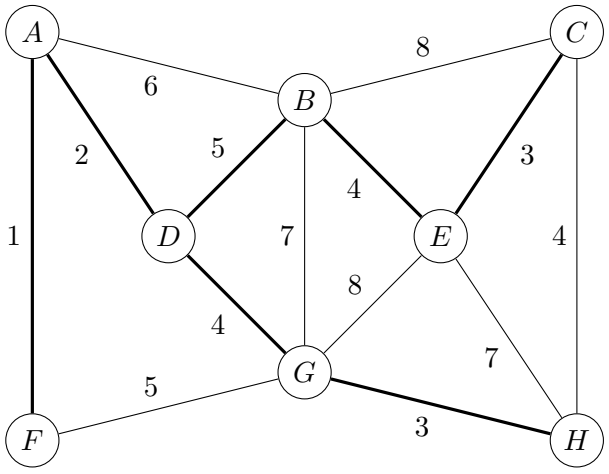
https://crypto.iti.kit.edu/index.php?id=algo-sose16
{lisa.kohl,lukas.barth}@kit.edu

Aufgabe 1 (*Minimale Spannbäume, 7 Punkte*)

a) Markieren Sie in dem folgenden Graphen einen Schnitt, mit dem das Gewicht des eingezeichneten Spannbaums reduziert werden kann oder zeigen Sie, dass ein solcher Schnitt nicht existiert. (*Hinweis:* Geben Sie in letzterem Fall nicht alle möglichen Schnitte an, sondern überlegen Sie eine geeignete Vorgehensweise.)



b) Markieren Sie im folgenden Graphen einen Kreis, der die Kreiseigenschaft minimaler Spannbäume verletzt oder zeigen Sie, dass so ein Kreis nicht existiert. (*Hinweis:* Geben Sie in letzterem Fall nicht alle möglichen Kreise an, sondern überlegen Sie eine geeignete Vorgehensweise.)

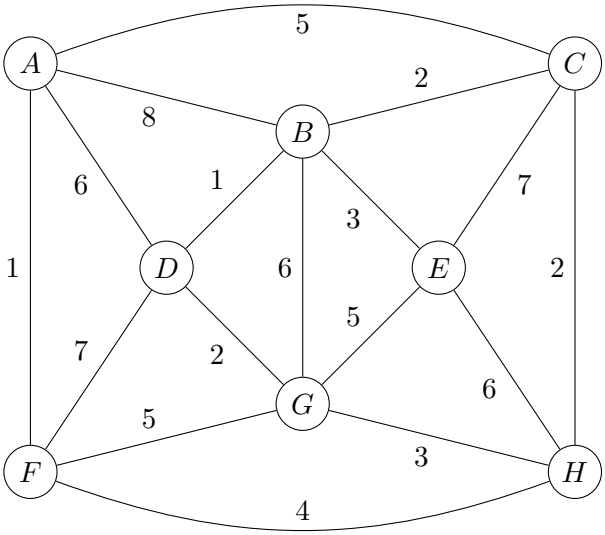


c) Sei G ein ungerichteter zusammenhängender Graph mit positiven Kantengewichten. Beweisen oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass der minimale Spannbaum von G eindeutig ist, wenn alle Kantengewichte in G paarweise verschieden sind.

d) Sei G wieder ein ungerichteter zusammenhängender Graph mit positiven Kantengewichten. Beweisen oder widerlegen Sie die Umkehrung von c). In anderen Worten, beweisen oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass alle Kantengewichte in G paarweise verschieden sind, wenn der minimale Spannbaum eindeutig ist.

Aufgabe 2 (*Jarník-Prims und Kruskals Algorithmus,* 4 *Punkte*)

Berechnen Sie je einen Minimum Spanning Tree (MST) des angegebenen Graphen mit dem Algorithmus von Jarník-Prim und dem Algorithmus von Kruskal. Geben Sie jeweils die Kanten des MST in der Reihenfolge an, in der sie der Algorithmus auswählt. Verwenden Sie Knoten A als Startknoten von Jarník-Prim und wählen Sie in beiden Algorithmen bei gleichen Kantengewichten diejenige Kanten mit alphabetisch kleinstem Endknoten aus.



Aufgabe 3 (*Zweitminimalste Spannbäume,* 8 *Punkte*)

Sei $G = (V, E)$ mit $|E| \geq |V|$ ein ungerichteter zusammenhängender Graph mit positiven Kantengewichten $c(e) \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir betrachten nun zweitminimalste Spannbäume. Sei T ein minimaler Spannbaum. Dann ist ein *zweitminimalster Spannbaum* definiert als ein aufspannender Baum $T^\star \neq T$ für den $\sum_{e \in T^\star} c(e)$ minimal wird. (Falls es mehrere minimale Spannbäume gibt, ist also ein zweitminimalster Spannbaum auch ein minimaler Spannbaum.)

a) Beweisen oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass der zweitminimalste Spannbaum von G eindeutig ist, wenn alle Kantengewichte in G paarweise verschieden sind.

b) Sei T ein **minimaler** Spannbaum von G. Beweisen Sie, dass es Kanten $(u, v) \in T$ und $(x, y) \notin T$ gibt, sodass $T - \{(u, v)\} \cup \{(x, y)\}$ ein zweitminimalster Spannbaum von G ist.

c) Sei T ein **beliebiger** Spannbaum von G und und für zwei Knoten $u, v \in V$ sei $\max[u, v] \in E$ die Kante mit maximalem Gewicht auf dem eindeutigen Pfad zwischen u und v in T. Beschreiben Sie einen $\mathcal{O}(|V|^2)$-Algorithmus, der gegeben T für alle u, v den Wert $\max[u, v]$ berechnet und beweisen Sie die Laufzeit.

d) Geben Sie einen effizienten Algorithmus, der den zweitminimalsten Spannbaum von G berechnet. Begründen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus.

Ausgabe: Mittwoch, 29.06.2016
Abgabe: Freitag, 08.07.2016, 12:45 im Briefkasten im Untergeschoss von Gebäude 50.34

Deckblatt Übungsblatt 10
Algorithmen I

A1	**A2**	**A3**	$\sum$

Tutoriumsnummer:

Name	**Matrikelnummer**	**Unterschrift**

Mit unseren Unterschriften bestätigen wir, dass die Aufgaben von den Unterzeichnern eigenständig gelöst worden sind.

Hinweis: Das Übungsblatt darf in Gruppen von bis zu zwei Personen bearbeitet werden. Beide Personen müssen demselben Tutorium zugeteilt sein. Möchte jemand seine Abgaben-Gruppe innerhalb des Semesters wechseln, so ist dies im Voraus mit dem Tutor abzusprechen. **Bitte tragen Sie in das obere Quadrat *groß* die Nummer Ihres Tutoriums ein.** Die Lösung des Übungsblattes ist in jedem Fall mit diesem Deckblatt abzugeben.