Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen 1 – Sommersemester 2018
Zuverlässige Softwaresysteme im Kontext der Automobilindustrie
`http://verialg.iti.kit.edu`

Prof. Dr. Carsten Sinz – Markus Iser

Übungsblatt 1

Ausgabe: 25.04.2018 – 15:30
Abgabe: 02.05.2018 – 13:00

A O-Kalkül

A.1 Funktionen zuordnen (3 Punkte)

Ordnen Sie die 18 Funktionen aus Tabelle A.1 so nach ihrem Wachstumsgrad, dass für die resultierende Liste $L = (g_0, \ldots, g_n)$ von Funktionen folgendes gilt: $g_i \in \Omega(g_{i+1})$ (für $i \in [0, 17]$).

$\log\log n$	n	$n \cdot \log n$	n^3	n^2	$\log n$
$(\log n)^{\log n}$	$(\log n)!$	$2^{2^{n+1}}$	$\log^2 n$	$2^{\sqrt{n}}$	$n!$
2^{2^n}	1.001^n	2^n	e^n	$n \cdot 2^n$	$2^{\log n}$

Table 1: Ordnen Sie die Funktionen nach ihrem Wachstumsgrad

A.2 Zusammenhang beweisen (1 Punkt)

Gegeben zwei nicht-negative Funktionen $f(n)$ und $g(n)$. Beweisen Sie die Gültigkeit folgender Aussage:

$$\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$$

B Master-Theorem (1 Punkt)

Die Rekursionsgleichung $T(n) = 7 \cdot T(\frac{n}{2}) + n$ beschreibt die Laufzeit eines Algorithmus A. Ein konkurrierender Algorithmus A' besitzt eine Laufzeit von $T'(n) = a \cdot T'(\frac{n}{4}) + n$. Welcher ist der größte ganzzahlige Wert von a, sodass A' asymptotisch schneller als A ist?

Wir nehmen an, dass die Rekursionsgleichungen die Laufzeit für $n > 1$ angeben und $T(1) = 1$ ist.

C Schleifeninvariante (4 Punkte)

Der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{N}_+$ ist eine Zahl $m \in \mathbb{N}_+$, für die gilt:

- m ist Teiler von a und b (in Zeichen: $m|a, m|b$)
- für alle $m' \in \mathbb{N}_+$ gilt: $m'|a \wedge m'|b \implies m'|m$

Algorithm 1: Euklid (original)

Data: $a, b \in \mathbb{N}_+$
Result: $\mathsf{gcd}(a, b)$

```
1 while a ≠ b do
2     if a > b then
3         (a, b) ← (b, a)
4     b ← b − a
5 return a
```

Algorithm 2: Euklid (modulo)

Data: $a, b \in \mathbb{N}_+$
Result: $\mathsf{gcd}(a, b)$

```
1 if a < b then
2     (a, b) ← (b, a)
3 while b ≠ 0 do
4     (a, b) ← (b, a mod b)
5 return a
```

Der *Algorithmus von Euklid* berechnet zu zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}_+$ deren größten gemeinsamen Teiler $m = \mathsf{gcd}(a, b)$. Algorithmus 1 beschreibt den Algorithmus in seiner Urform, wie er alten Schriften von Euklid entnommen werden kann. Eine Variante, in der die wiederholte Subtraktion durch eine Division mit Rest ersetzt wurde, finden Sie in Algorithmus 2.

Zeigen Sie für beide Varianten deren Korrektheit, indem Sie an den benötigten Stellen Assertions und Invarianten einfügen und diese beweisen. Falls notwendig, fügen Sie Hilfsvariablen ein oder annotieren Sie Variablen mit Indizes, um den entsprechenden Schleifendurchlauf zu bezeichnen.

D Karatsuba-Ofman-Algorithmus (1 Punkt)

Führen Sie den Algorithmus von *Karatsuba und Ofman* aus der Vorlesung mit den beiden Dezimalzahlen 1242 und 3163 aus. Erstellen Sie einen Berechnungsbaum, aus dem sämtliche rekursiven Aufrufe des Algorithmus ersichtlich sind.

Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen 1 – Sommersemester 2018
Zuverlässige Softwaresysteme im Kontext der Automobilindustrie
`http://verialg.iti.kit.edu`

Prof. Dr. Carsten Sinz – Markus Iser

Deckblatt Übungsblatt 1

Tutoriumsnummer:

Name	Matrikelnummer	Unterschrift

Mit unseren Unterschriften bestätigen wir, dass wir die Aufgaben eigenständig gelöst haben.

Hinweis: Das Übungsblatt darf in Gruppen von bis zu zwei Personen bearbeitet werden. Beide Personen müssen demselben Tutorium zugeteilt sein. Möchte jemand seine Abgaben-Gruppe innerhalb des Semesters wechseln, so ist dies im Voraus mit dem Tutor abzusprechen. **Bitte tragen Sie oben *groß* die Nummer Ihres Tutoriums ein.** Die Lösung des Übungsblattes ist in jedem Fall mit diesem Deckblatt abzugeben.

Bewertung (durch Tutor):