

Übungsblatt 11

Ausgabe: 04.07.2018 – 15:30
 Abgabe: 13.07.2018 – 15:00

A Tailleweite bestimmen

Die *Tailleweite* eines gerichteten Graphen ist die Länge eines kürzesten Kreises im Graphen oder unendlich bei einem Wald.

A.1 Knotentaille (2 Punkte)

Implementieren Sie einen Algorithmus, der für einen bestimmten Knoten v die Länge eines kürzesten Kreises durch v findet, und analysieren Sie dessen Laufzeit.

A.2 Graphentaille (2 Punkte, 1 Bonuspunkt)

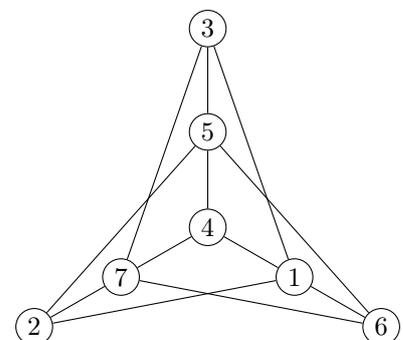
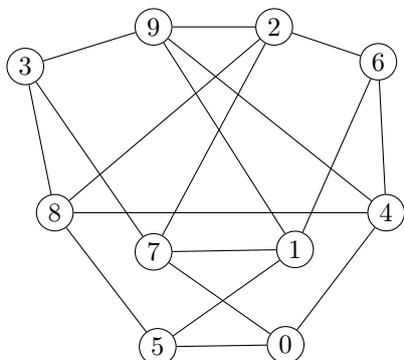
Implementieren Sie einen Algorithmus, der die Tailleweite eines Graphen bestimmt, und analysieren Sie dessen Laufzeit. Lösungen in $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$ geben einen Bonuspunkt.

B Bipartite Graphen

Ein ungerichteter zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 1$ heißt *bipartit*, wenn die Knotenmenge V so in zwei Mengen V_1 und V_2 aufgeteilt werden kann, dass für jede Kante $(u, v) \in E$ gilt $u \in V_1$ und $v \in V_2$ oder $v \in V_1$ und $u \in V_2$. Mit anderen Worten existiert eine Zerlegung von V , so dass Kanten nur zwischen Knoten aus V_1 und V_2 bestehen, nicht aber zwischen Knoten der V_i selbst.

B.1 Spielen (2 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie jeweils die Bipartitheit der folgenden beiden Graphen!



B.2 Entwurf (2 Punkte)

Implementieren Sie einen Algorithmus, der in $\mathcal{O}(n + m)$ entscheiden, ob ein ungerichteter zusammenhängender Graph bipartit ist. Im Fall der Bipartitheit soll der Algorithmus eine mögliche Unterteilung V_1, V_2 ausgeben, sonst *nicht bipartit*.

C Kürzeste Pfade

C.1 Spielen (2 Punkte)

Geben Sie einen gewichteten gerichteten Graph mit positiven Kantengewichten an, der einen Knoten v^* enthält, dessen vorläufige Distanz von Dijkstras Algorithmus mindestens dreimal mittles *decreaseKey* verringert wird. Geben Sie zusätzlich zum Graph auch den Knoten v^* und den Startknoten einer entsprechenden Dijkstra-Suche an.

C.2 Beweisen (2 Punkte)

Zeigen Sie: In gewichteten gerichteten Graphen sind Teilpfade von kürzesten Pfaden wiederum kürzeste Pfade.

C.3 Baum (4 Punkte)

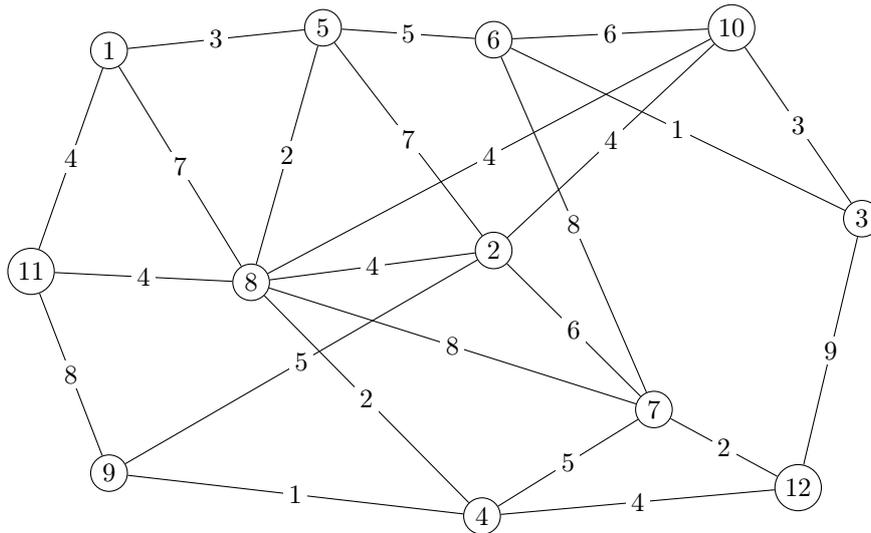
Ein gerichteter Graph heiße ein *gerichteter Baum* mit *Wurzel* r , wenn alle seine Knoten vom Knoten r aus erreichbar sind und der Eingangsgrad aller seiner Knoten ≤ 1 ist.

Behauptung: Sei $G = (V, E)$ ein gewichteter gerichteter Graph ohne negative Kreise, in dem von einem Knoten s aus alle anderen Knoten erreichbar sind. Dann gibt es einen Teilgraph T von G , der $|V|$ Knoten hat, ein gerichteter Baum mit Wurzel s ist und dessen Pfade alle kürzeste Pfade in G sind.

Beweisen Sie die Behauptung. Nehmen Sie zunächst an, dass alle kürzesten Pfade eindeutig sind und betrachten Sie den Teilgraph T der aus allen kürzesten Pfaden besteht, die an s beginnen. Erweitern Sie dieses Ergebnis auf den Fall, dass kürzeste Pfade nicht immer eindeutig sind.

D Minimum Spanning Tree

Berechnen Sie einen Minimum Spanning Tree (MST) des angegebenen Graphen. Geben Sie jeweils die Kanten des MST in der Reihenfolge an, in der sie der Algorithmus auswählt. Um Eindeutigkeit herzustellen, verwenden Sie Knoten 1 als Startknoten von Jarnik-Prim und sortieren Sie die Kanten bei *beiden* Algorithmen bei Unentschieden lexikographisch nach den Nummern des sortierten Endknotentupels (Beispiel: $(5, 3) < (4, 10)$ weil $3 < 4$).



D.1 Jarník-Prim (2 Punkte)

Berechnen Sie einen Minimum Spanning Tree (MST) des angegebenen Graphen mit dem Algorithmus von Jarník-Prim.

D.2 Kruskal (2 Punkte)

Berechnen Sie einen Minimum Spanning Tree (MST) des angegebenen Graphen mit dem Algorithmus von Kruskal.

Deckblatt Übungsblatt 11

Tutoriumsnummer:

Name	Matrikelnummer	Unterschrift

Mit unseren Unterschriften bestätigen wir, dass wir die Aufgaben eigenständig gelöst haben.

Hinweis: Das Übungsblatt darf in Gruppen von bis zu zwei Personen bearbeitet werden. Beide Personen müssen demselben Tutorium zugeteilt sein. Möchte jemand seine Abgaben-Gruppe innerhalb des Semesters wechseln, so ist dies im Voraus mit dem Tutor abzusprechen. **Bitte tragen Sie oben groß die Nummer Ihres Tutoriums ein.** Die Lösung des Übungsblattes ist in jedem Fall mit diesem Deckblatt abzugeben.

Bewertung (durch Tutor):