Karlsruher Institut für Technologie

Übung 2 – Algorithmen II

Yaroslav Akhremtsev, Demian Hespe – *yaroslav.akhremtsev@kit.edu, hespe@kit.edu*

Mit Folien von Michael Axtmann (teilweise)

`http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS17.php`

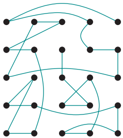
Institut für Theoretische Informatik - Algorithmik II

Approximationsalgorithmen

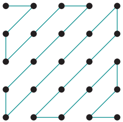
Grundlagen

Warum Lösungen abschätzen?

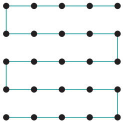
- es gibt “schwierige” Probleme (z.B. TSP mit exponentieller Laufzeit)
  - → exakte Berechnung nicht möglich zu unseren Lebzeiten
- vernünftige Näherungen effizient berechnen
  - → exakte/optimale Ergebnisse nicht immer wichtig
  - → “gute” Lösungen genügen oft
  - → aber Abstand zur korrekten Lösung wissenswert



Weglänge “lang”



Weglänge $8 + 16\sqrt{2}$



Weglänge 24

Approximationsalgorithmen
Gütemaß

- Ein Algorithmus *ALG* hat einen Approximationsfaktor ρ, wenn gilt
$$\frac{w\left(ALG(I)\right)}{w\left(OPT(I)\right)} \leq \rho$$
f.a. Probleminstanzen I, *OPT* optimale Lösung, w Bewertungsfunktion
(hier für Minimierungsprobleme, $\rho > 0$ ist obere Schranke)

Beispiel:

- *ALG* schätzt Distanz von Strecke x auf nächste Zweierpotenz $2^{\lceil \log |x| \rceil}$
- *OPT* bestimmt korrekte Distanz $|x|$

$$\Rightarrow \quad \frac{w(ALG)}{w(OPT)} = \frac{2^{\lceil \log |x| \rceil}}{|x|} \leq \frac{2^{\log |x|+1}}{|x|} = \frac{2|x|}{|x|} = 2 = \rho$$

(Zahlenbeispiel: $|x| = 2^{10} + 1 \quad \rightarrow \quad \frac{2^{11}}{2^{10}+1} = 2 - \frac{2}{2^{10}+1} \approx 2$)

Approximationsalgorithmen

Klassen

Approximationsprobleme klassifzierbar durch

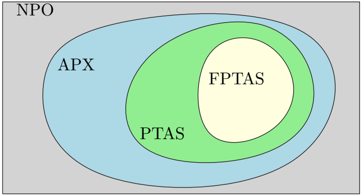
- Laufzeit $T(n, \varepsilon)$
- Approximationsfaktor $\rho(n, \varepsilon)$

Klassen an Approximationsproblemen

APX (*approximable*)
$\rho = const.$, T polynomiell in n

PTAS (*polynomial time approximation scheme*)
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n

FPTAS (*fully polynomial time approximation scheme*)
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n, $\frac{1}{\varepsilon}$



Beispiele:

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 2$

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 - \varepsilon$

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} n$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 + 2\varepsilon$

Approximationsalgorithmen

Klassen

Approximationsprobleme klassifzierbar durch

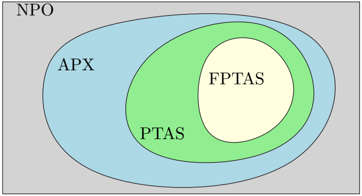
- Laufzeit $T(n, \varepsilon)$
- Approximationsfaktor $\rho(n, \varepsilon)$

Klassen an Approximationsproblemen

APX (*approximable*)
$\rho = \mathit{const.}$, T polynomiell in n

PTAS (*polynomial time approximation scheme*)
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n

FPTAS (*fully polynomial time approximation scheme*)
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n, $\frac{1}{\varepsilon}$



Beispiele:

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 2$ (APX)

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 - \varepsilon$

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} n$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 + 2\varepsilon$

Approximationsprobleme klassifzierbar durch

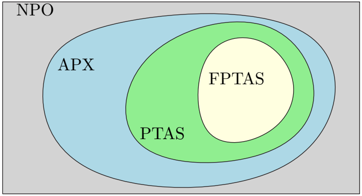
- Laufzeit $T(n, \varepsilon)$
- Approximationsfaktor $\rho(n, \varepsilon)$

Klassen an Approximationsproblemen

APX (*approximable*)
$\rho = \mathit{const.}$, T polynomiell in n

PTAS (*polynomial time approximation scheme*)
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n

FPTAS (*fully polynomial time approximation scheme*)
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n, $\frac{1}{\varepsilon}$



Beispiele:

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 2$ (APX)

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 - \varepsilon$ (PTAS)

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} n$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 + 2\varepsilon$

Approximationsalgorithmen
Klassen

Approximationsprobleme klassifzierbar durch

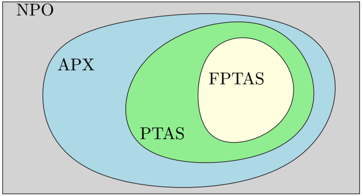
- Laufzeit $T(n, \varepsilon)$
- Approximationsfaktor $\rho(n, \varepsilon)$

Klassen an Approximationsproblemen

APX (*approximable*)
$\rho = const.$, T polynomiell in n

PTAS (*polynomial time approximation scheme*)
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n

FPTAS (*fully polynomial time approximation scheme*)
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n, $\frac{1}{\varepsilon}$



Beispiele:

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 2$ (APX)

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 - \varepsilon$ (PTAS)

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} n$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 + 2\varepsilon$ (FPTAS)

Scheduling unabhängiger gewichteter Jobs auf parallelen Machinen

n Jobs, m Maschinen

t_j: Laufzeit von Job j

$\mathbf{x}[j]$: Maschine auf der Job j ausgeführt wird

$L[i]$: $\sum_{\mathbf{x}[j]=i} t_j$, *Last* von Maschine i

Zielfunktion: Minimiere *Makespan* $L_{max} = \max_i L[i]$

Details: Identische Machinen, unabhängige Jobs, bekannte Ausführungszeiten, offline

2-Approximation für Job Scheduling

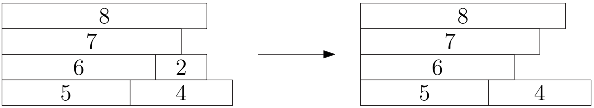
function ListScheduling(n, m, $\mathbf{t}$)
  $J \leftarrow \{1, \ldots, n\}$
  $L[1..m] \leftarrow [0, \ldots, 0]$
  while $J \neq \emptyset$ **do**
    pick *any* $j \in J$
    $J \leftarrow J \setminus \{j\}$
    pick i such that $L[i]$ is minimized
    $\mathbf{X}[j] \leftarrow i$
    $L[i] \leftarrow L[i] + t_j$
  return X

$\frac{4}{3}$-Approximation für Job Scheduling

function LARGESTPROCESSINGTIME(n, m, $\mathbf{t}$)
    $J \leftarrow \{1, \ldots, n\}$
    $L[1..m] \leftarrow [0, \ldots, 0]$
    while $J \neq \emptyset$ **do**
        pick $j \in J$ such that t_j is maximized
        $J \leftarrow J \setminus \{j\}$
        pick i such that $L[i]$ is minimized
        $\mathbf{X}[j] \leftarrow i$
        $L[i] \leftarrow L[i] + t_j$
    return X

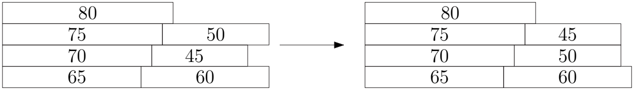
Fall 1: kleiner Job

- Sortiere Jobs so, dass $t_1 \geq t_2 \ldots \geq t_n$
- o.B.d.A gilt: Job n wird als letztes fertig, sonst lass t_n einfach weg
  - LPT gleich, OPT evtl. besser
  - Wir zeigen $w(LPT) \leq \frac{4}{3} w(OPT)$, wenn Job n als letztes fertig wird
  - Wenn Job n nicht als letztes fertig wird, bleibt LPT lösung gleich, OPT wird schlechter $\Rightarrow$ Schranke gilt immer noch
- $w(LPT) = \text{Startzeit}_n + t_n \leq \frac{1}{m} \sum_{i \neq n} t_i + t_n \leq w(OPT) + t_n$
- Für $t_n \leq w(OPT)/3 : w(LPT) \leq \frac{4}{3} w(OPT)$



Nur große Jobs

- Sortiere Jobs so, dass $t_1 \geq t_2 \ldots \geq t_n$
- Jetzt: $t_n > w(OPT)/3 \Rightarrow t_i > w(OPT)/3$ für alle i
- Wir zeigen: *LPT* ist optimal
- Betrachte *OPT*:
  - Jede Maschine i bearbeitet max. 2 Jobs i_1 und i_2
  - Sortiere Maschinen so, dass $t_{i_1} \geq t_{j_1}$ für $i < j$
  - o.B.d.A. gilt: $t_{i_2} \leq t_{j_2}$ für $i < j$, sonst vertausche i_2 und j_2
- LPT berechnet den gleichen Schedule (betrachte nur $n > m$)
  - Wenn *LPT* jeder Maschine max. 2 Jobs zuweist, dann genau diesen
  - Angenommen *LPT* weist einer Maschine 3 Jobs zu:
    - $n \leq 2m \Rightarrow$ es gibt Maschine mit nur einem Job k, die in *OPT* 2 hat
    - $\Rightarrow$ Job k dauert länger als 2 andere Jobs $\Rightarrow t_k > 2 \cdot OPT/3$
    - $\Rightarrow$ Maschine, die k bearbeitet, kann keinen anderen Job mehr bearbeiten ↯



Minimum Metric TSP (NP-hart)

Problemstellung

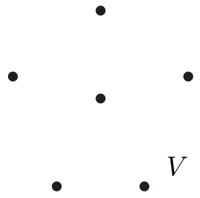
- Gegeben eine Menge an Punkten V in der Ebene
- Vollständiger Graph
- Kantengewichte erfüllen Dreiecks-Ungleichung
- Finde Kreis minimaler Länge der alle Punkte abläuft

Minimum Metric TSP

Karlsruher Institut für Technologie

$3/2$-Approximation (Algorithmus) (Christofides-Heuristik)

- Graph $G = (V, E)$ (vollständig, ungerichtet)
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  (alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal)
- füge Kanten M zu $T \to T'$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  (alle Knoten haben geraden Grad)
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK

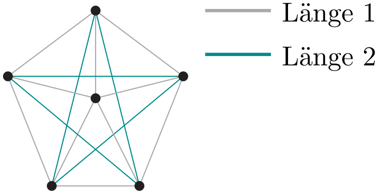


(Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$)

Minimum Metric TSP

$3/2$**-Approximation (Algorithmus)** (Christofides-Heuristik)

- Graph $G = (V, E)$ (vollständig, ungerichtet)
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  (alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal)
- füge Kanten M zu $T \rightarrow T'$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  (alle Knoten haben geraden Grad)
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK

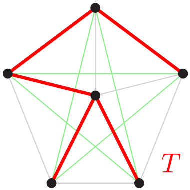


(Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$)

Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Algorithmus) (Christofides-Heuristik)

- Graph $G = (V, E)$ (vollständig, ungerichtet)
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  (alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal)
- füge Kanten M zu $T \rightarrow T'$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  (alle Knoten haben geraden Grad)
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK

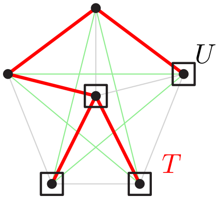


(Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$)

Minimum Metric TSP

$3/2$**-Approximation (Algorithmus)** (Christofides-Heuristik)

- Graph $G = (V, E)$ (vollständig, ungerichtet)
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  (alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal)
- füge Kanten M zu $T \rightarrow T'$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  (alle Knoten haben geraden Grad)
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK

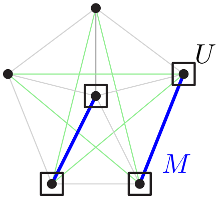


(Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$)

Minimum Metric TSP

$3/2$-**Approximation (Algorithmus)** (Christofides-Heuristik)

- Graph $G = (V, E)$ (vollständig, ungerichtet)
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  (alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal)
- füge Kanten M zu $T \to T'$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  (alle Knoten haben geraden Grad)
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK

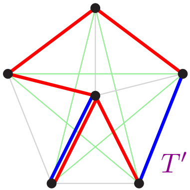


(Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$)

Minimum Metric TSP

3/2**-Approximation (Algorithmus)** (Christofides-Heuristik)

- Graph $G = (V, E)$ (vollständig, ungerichtet)
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  (alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal)
- füge Kanten M zu $T \rightarrow T'$
- bestimme Eulerkreis *EK* auf T'
  (alle Knoten haben geraden Grad)
- wandle *EK* zu Hamiltonkreis *HK*

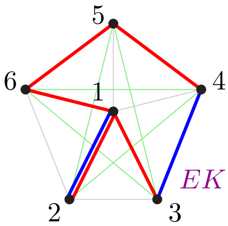


(Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$)

Minimum Metric TSP

$3/2$**-Approximation (Algorithmus)** (Christofides-Heuristik)

- Graph $G = (V, E)$ (vollständig, ungerichtet)
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  (alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal)
- füge Kanten M zu $T \to T'$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  (alle Knoten haben geraden Grad)
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK

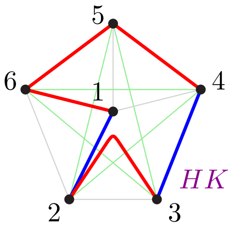


(Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$)

Minimum Metric TSP

$3/2$**-Approximation (Algorithmus)** (Christofides-Heuristik)

- Graph $G = (V, E)$ (vollständig, ungerichtet)
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  (alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal)
- füge Kanten M zu $T \to T'$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  (alle Knoten haben geraden Grad)
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK

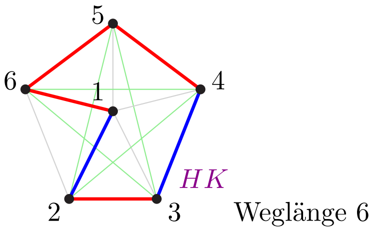


(Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$)

Minimum Metric TSP

$3/2$**-Approximation (Algorithmus)** (Christofides-Heuristik)

- Graph $G = (V, E)$ (vollständig, ungerichtet)
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  (alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal)
- füge Kanten M zu $T \to T'$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  (alle Knoten haben geraden Grad)
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK



(Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$)

Minimum Metric TSP

$3/2$-**Approximation (Beweis)** (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)

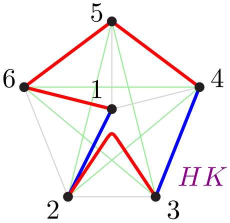
  $\Rightarrow$ $w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow$ $w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)

  $\Rightarrow$ $2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow$ $w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Minimum Metric TSP

$3/2$-**Approximation (Beweis)** (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)

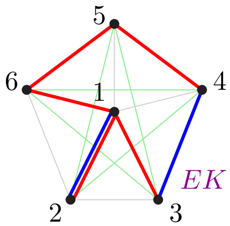
  $\Rightarrow$ $w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T) (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK' (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow$ $w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)

  $\Rightarrow$ $2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$ (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow$ $w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Minimum Metric TSP

$3/2$-**Approximation (Beweis)** (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)

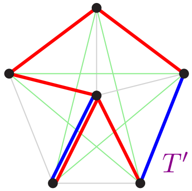
  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T) (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK' (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)

  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$ (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Minimum Metric TSP

3/2-Approximation (Beweis) (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)

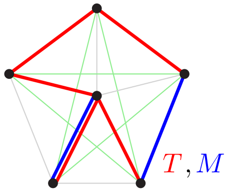
  $\Rightarrow \ w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow \ w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)

  $\Rightarrow \ 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow \ w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Beweis) (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)

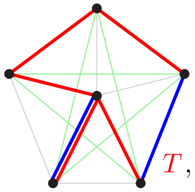
  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)

  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Minimum Metric TSP

$3/2$**-Approximation (Beweis)** (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)

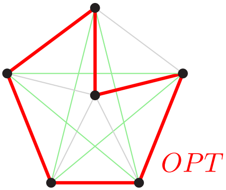
  $\Rightarrow \ w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow \ w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)

  $\Rightarrow \ 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$$\Rightarrow \ w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$$



Minimum Metric TSP

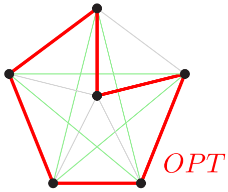
$3/2$-**Approximation (Beweis)** (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)
  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$
- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)

  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Minimum Metric TSP

3/2-**Approximation (Beweis)** (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)

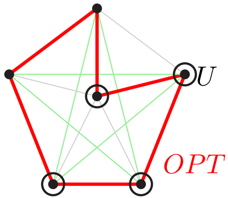
  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)

  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Minimum Metric TSP

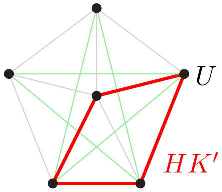
$3/2$-**Approximation (Beweis)** (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)
  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)
  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Minimum Metric TSP

3/2-**Approximation (Beweis)** (Christofides-Heuristik)

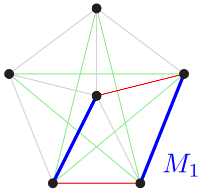
- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)
  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)

  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Minimum Metric TSP

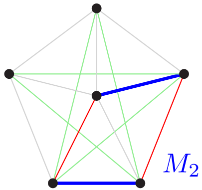
3/2-**Approximation (Beweis)** (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)
  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)
  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Minimum Metric TSP

$3/2$-**Approximation (Beweis)** (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)

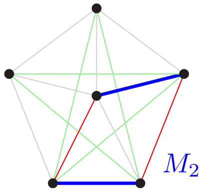
  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)

  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Minimum Metric TSP

$3/2$**-Approximation (Beweis)** (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)

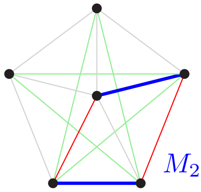
  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)

  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Minimum Metric TSP

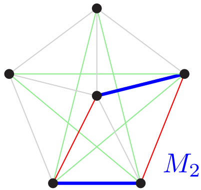
3/2-Approximation (Beweis) (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)
  $\Rightarrow\; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow\; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)
  $\Rightarrow\; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow\; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Minimum Metric TSP

3/2-**Approximation (Beweis)** (Christofides-Heuristik)

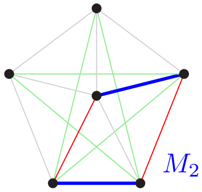
- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)
  $\Rightarrow\ w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow\ w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)

  $\Rightarrow\ 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow\ w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



- Existiert immer perfektes Matching M?
  (Zeige, dass $|U|$ immer gerade ist!)

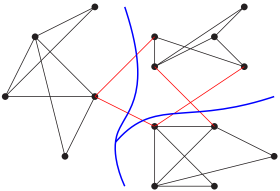
Kleine Änderung in der Definition

- Ein Algorithmus ALG hat einen Approximationsfaktor ρ, wenn gilt

$$w\left(ALG(I)\right) \leq \rho \cdot w\left(OPT(I)\right)$$

Perfekt balancierte Graphpartitionierung

- Teile Knoten eines Graphen $G = (V, E)$ in k *disjunkte* Mengen $V_1, \ldots, V_k$ mit $V_1 \cap \ldots \cap V_k = V$ auf
- $|V_1| = \ldots = |V_k| = \frac{|V|}{k}$
- Minimiere Anzahl Kanten, die zwischen verschiedenen Knotenmengen verlaufen (wird Schnitt genannt)
- NP-hart
- Ist nicht in Polynomialzeit mit konstantem Faktor approximierbar
- Reduktion von 3-Partition



3-Partition

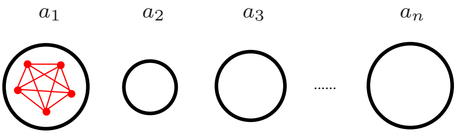
- Gegeben $n = 3k$ ganze Zahlen $a_1, a_2 \ldots, a_n$ und ein Wert S, so dass $\frac{S}{4} < a_i < \frac{S}{2}$ und
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = kS$$
- Entscheide, ob die Zahlen in Dreiergruppen aufgeteilt werden können, die jeweils zu S aufaddieren
- *Streng* NP-vollständig
  - Selbst noch NP-vollständig, wenn die Zahlen polynomiell in n beschränkt sind

3-Partition

- Gegeben $n = 3k$ ganze Zahlen $a_1, a_2 \ldots, a_n$ und ein Wert S, so dass $\frac{S}{4} < a_i < \frac{S}{2}$ und
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = kS$$
- Entscheide, ob die Zahlen in Dreiergruppen aufgeteilt werden können, die jeweils zu S aufaddieren
- *Streng* NP-vollständig
  - Selbst noch NP-vollständig, wenn die Zahlen polynomiell in n beschränkt sind

Reduktion

Gegeben eine Instanz von 3-Partition (polynomiell beschränkten Zahlen)
Konstruiere Graphen G: Für jedes a_i füge eine Clique der Größe a_i ein.



- Reduktion in Polynomialzeit, da Zahlen polynomiell beschränkt
- Wenn 3-Partition lösbar, gibt es eine perfekt balancierte Partition in k Blöcke mit Schnitt 0
  - Sonst wird mindestens eine Kante geschnitten
- $\Rightarrow$ Approximationsalgorithmus müsste auch Schnitt der Größe 0 finden $\lightning$