Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Technische Informatik (ITEC)

Digitaltechnik und Entwurfsverfahren im SS 2024

Musterlösungen zum 2. Übungsblatt

Prof. Dr.-Ing. Uwe D. Hanebeck
Geb. 50.20, Rm. 140

Roman Lehmann, M. Sc.
Geb. 07.21, Rm. B2-314.1

Email: roman.lehmann@kit.edu

Lösung 1 (10 Punkte)

1. Minimal 503, Maximal 1013 $\boxed{\text{1 P.}}$
2. Wird kodiert zu: $\boxed{\text{3 P.}}$

   0101010 0101010 0101101 0101010

3. Wird kodiert zu: $\boxed{\text{2 P.}}$

   010010101001 010100101000

4. Vorteil: Prüfbits stellen geringeren Overhead dar $\boxed{\text{2 P.}}$
   Nachteil: Es können weniger Fehler erkannt/korrigiert werden
5. Prüfbits 1 und 5 weisen darauf hin, das ein 1 bit Fehler an Stelle 17 im Codewort vorliegt. Korrigiert man diesen wird das Codewort dekodiert zu: $\boxed{\text{2 P.}}$

   00 0000 0000 0100 1100 0101 0100

Lösung 2 (4 Punkte)

1. Vollständiges Operatorensystem:
   - $x \wedge y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$ (DeMorgansches Gesetz)
   - $x \vee y = x \vee y$
   - $\overline{x} = \overline{x}$
2. Kein vollständiges Operatorensystem, da z.B. $x \wedge y$ nicht darstellbar ist
3. Vollständiges Operatorensystem:
   - $x \wedge y = (x \overline{\wedge} y) \overline{\wedge} (x \overline{\wedge} y)$
   - $x \vee y = (x \overline{\wedge} x) \overline{\wedge} (y \overline{\wedge} y)$
   - $\overline{x} = x \overline{\wedge} x$
4. Vollständiges Operatorensystem:
   - $\overline{x} = x \rightarrow 0$
   - $x \vee y = (x \rightarrow 0) \rightarrow y$
   - $x \wedge y = (((x \rightarrow 0) \rightarrow 0) \rightarrow (y \rightarrow 0)) \rightarrow 0$ (DeMorgansches Gesetz)

NB: Da es sich schon bei $(\wedge, \bar{\ })$ bzw. $(\vee, \bar{\ })$ um vollständige Operatorensysteme handelt, hätte man für einen gültigen Beweis auch wahlweise die Darstellung der Konjunktion oder Disjunktion auslassen können. Die Aufgabenstellung hat dies aber explizit gefordert.

Lösung 3 (6 Punkte)

1. Es gilt zu beweisen, dass $(\overline{a} \wedge \overline{b})$ das Komplementelement von $(a \vee b)$ ist. Dazu müssen die Bedingungen der Komplementgesetze $(x \vee \overline{x} = 1)$ und $(x \wedge \overline{x} = 0)$ erfüllt sein. $\boxed{\text{2 P.}}$

   Mit $x = a \vee b$ gilt:
   - $(a \vee b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) = (a \vee b \vee \overline{a}) \wedge (a \vee b \vee \overline{b}) = (1 \vee b) \wedge (1 \vee a) = 1 \wedge 1 = 1$
   - $(a \vee b) \wedge (\overline{a} \wedge \overline{b}) = (a \wedge \overline{a} \wedge \overline{b}) \vee (b \wedge \overline{a} \wedge \overline{b}) = (0 \wedge \overline{b}) \vee (0 \wedge \overline{a}) = 0 \vee 0 = 0$

   Also $(\overline{a} \wedge \overline{b})$ ist das Komplementelement von $(a \vee b)$ und damit ist das DeMorgan-Gesetz: $\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$ bewiesen.

2. Aus den Voraussetzungen folgt $\boxed{\text{2 P.}}$

$$\begin{aligned} (a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge b) &= (a \wedge c) \vee (\overline{a} \wedge c) \\ (a \vee \overline{a}) \wedge b &= (a \vee \overline{a}) \wedge c \\ 1 \wedge b &= 1 \wedge c \qquad \Rightarrow \quad b = c \qquad q.e.d. \end{aligned}$$

3. Setzt man $\boxed{\text{2 P.}}$

$$m = a \vee (b \vee c) \qquad \text{und} \qquad n = (a \vee b) \vee c$$

so hat man zu beweisen, dass $m = n$ ist.

$$\begin{aligned} a \wedge m &= a \wedge (a \vee (b \vee c)) = a \\ a \wedge n &= a \wedge ((a \vee b) \vee c) = (a \wedge (a \vee b)) \vee (a \wedge c) = a \vee (a \wedge c) = a \end{aligned}$$

Es gilt somit

$$a \wedge m = a \wedge n \tag{1}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \overline{a} \wedge m &= \overline{a} \wedge (a \vee (b \vee c)) = (a \wedge \overline{a}) \vee (\overline{a} \wedge (b \vee c)) = 0 \vee (\overline{a} \wedge (b \vee c)) \\ &= (\overline{a} \wedge (b \vee c)) = (\overline{a} \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge c) \\ \overline{a} \wedge n &= \overline{a} \wedge ((a \vee b) \vee c) = (\overline{a} \wedge (a \vee b)) \vee (\overline{a} \wedge c) = ((\overline{a} \wedge a) \vee (\overline{a} \wedge b)) \vee (\overline{a} \wedge c) \\ &= (0 \vee (\overline{a} \wedge b)) \vee (\overline{a} \wedge c) = (\overline{a} \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge c) \end{aligned}$$

und somit gilt

$$\overline{a} \wedge m = \overline{a} \wedge n \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$m = n \qquad q.e.d.$$

Lösung 4 (6 Punkte)

1. Funktionstabelle: $\boxed{\text{2 P.}}$

b	a	$f(b,a)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2. Es handelt sich um die Äquivalenz (auch Exklusiv-Nicht-ODER oder XNOR genannt). $\boxed{\text{1 P.}}$
   Operator: $x \leftrightarrow y$

3. Funktionstabelle: $\boxed{\text{2 P.}}$

y	x	$x \vee y$	$x \wedge y$	$f(x \vee y, x \wedge y)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

4. Siehe 2. (Funktionstabelle aus Aufgabenteil 3. ist identisch zu Aufgabenteil 1.) $\boxed{\text{1 P.}}$