Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Technische Informatik (ITEC)

Digitaltechnik und Entwurfsverfahren im SS 2024

# Musterlösungen zum 3. Übungsblatt

Prof. Dr.-Ing. Uwe D. Hanebeck
Geb. 50.20, Rm. 140

Roman Lehmann, M. Sc.
Geb. 07.21, Rm. B2-314.1

Email: roman.lehmann@kit.edu

## Lösung 1 (10 Punkte)

1. Funktionstabelle: **1 P.**

| $y$ | $x$ | $f(x,y)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

2. $f(x, y \vee z) = \overline{x} \wedge (y \vee z) = \overline{x} \wedge y \vee \overline{x} \wedge z = f(x,y) \vee f(x,z)$. Im zweiten Schritt wird das Distributivgesetz verwendet. **1 P.**

3. $f$ ist nicht assoziativ. Gegenbeispiel: Für Belegung $x = y = z = 1$ ist **1 P.**
   - $f(f(x,y),z) = f(f(1,1),1) = f(0,1) = 1$
   - $f(x, f(y,z)) = f(1, f(1,1)) = f(1,0) = 0$

4. Die Aussage ist eine Tautologie, da jede mögliche Variablenbelegung zu Wert 1 führt. Funktionstabelle: **2 P.**

| $x$ | $f(x,1)$ | $f(f(x,1), f(x,1))$ | $f(f(f(x,1), f(x,1)),1)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |

5. Mögliche Lösung: $\overline{x} = \overline{x} \wedge 1 = f(x,1)$. (auch aus vorheriger Teilaufgabe ersichtlich) **1 P.**

6. Mögliche Lösung: $x \wedge y = \overline{\overline{x}} \wedge y = \overline{f(x,1)} \wedge y = f(f(x,1),y)$. **2 P.**

7. Mögliche Lösung: $x \vee y = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} = f(\overline{x} \wedge \overline{y}, 1) = f(\overline{x} \wedge f(y,1), 1) = f(f(x, f(y,1)),1)$. Hier wurde das DeMorgansche Gesetz verwendet. **2 P.**

Lösung 2 (10 Punkte)

1. Antworten: 3 P.

| Funktion $f(c,b,a)$ | DNF? | Begründung (falls nein) |
|---|---|---|
| $a$ | nein | $a$ ist kein Minterm |
| $abc$ | ja | |
| $c \vee b \vee \overline{a}$ | nein | das ist KNF (oder: $c$, $b$, $\overline{a}$ sind keine Minterme) |
| $cb\overline{a} \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c}$ | ja | |
| $c\overline{b}\overline{a} \vee \overline{cba}$ | nein | $\overline{cba}$ ist kein Minterm ($\not\leftrightarrow \overline{c}\overline{b}\overline{a}$) |
| $\overline{b}a\overline{c} \vee cb\overline{a} \vee a\overline{b}\overline{c}$ | nein | Doppel-Term |

2. Funktionstabelle: 2 P.

| $c$ | $b$ | $a$ | ... | $f(c,b,a)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | | 1 |
| 0 | 0 | 1 | | 1 |
| 0 | 1 | 0 | | 0 |
| 0 | 1 | 1 | | 1 |
| 1 | 0 | 0 | | 0 |
| 1 | 0 | 1 | | 0 |
| 1 | 1 | 0 | | 0 |
| 1 | 1 | 1 | | 1 |

3. Entwicklung nach $c$: 3 P.

$$\begin{aligned}
f(c,b,a) &= (c \wedge (((b \vee 1) \rightarrow a) \wedge (0 \vee b \vee \overline{a}))) \vee (\overline{c} \wedge (((b \vee 0) \rightarrow a) \wedge (1 \vee b \vee \overline{a}))) \\
&= (c \wedge ((1 \rightarrow a) \wedge (b \vee \overline{a}))) \vee (\overline{c} \wedge ((b \rightarrow a) \wedge 1)) \\
&= (c \wedge (a \wedge (b \vee \overline{a}))) \vee (\overline{c} \wedge (b \rightarrow a)) \\
&= (c \wedge (a \wedge b)) \vee (\overline{c} \wedge (b \rightarrow a))
\end{aligned}$$

Entwicklung nach $b$:

$$\begin{aligned}
f(c,b,a) &= (b \wedge ((c \wedge (a \wedge 1)) \vee (\overline{c} \wedge (1 \rightarrow a)))) \vee (\overline{b} \wedge ((c \wedge (a \wedge 0)) \vee (\overline{c} \wedge (0 \rightarrow a)))) \\
&= (b \wedge ((c \wedge a) \vee (\overline{c} \wedge a))) \vee (\overline{b} \wedge ((c \wedge 0) \vee (\overline{c} \wedge 1))) \\
&= (b \wedge a) \vee (\overline{b} \wedge (0 \vee \overline{c})) \\
&= (b \wedge a) \vee (\overline{b} \wedge \overline{c})
\end{aligned}$$

Entwicklung nach $a$:

$$\begin{aligned}
f(c,b,a) &= (a \wedge ((b \wedge 1) \vee (\overline{b} \wedge \overline{c}))) \vee (\overline{a} \wedge ((b \wedge 0) \vee (\overline{b} \wedge \overline{c}))) \\
&= (a \wedge (b \vee (\overline{b} \wedge \overline{c}))) \vee (\overline{a} \wedge (0 \vee (\overline{b} \wedge \overline{c}))) \\
&= (a \wedge (b \vee (\overline{b} \wedge \overline{c}))) \vee (\overline{a} \wedge (\overline{b} \wedge \overline{c}))
\end{aligned}$$

4. disjunktive Normalform: $f(c,b,a) = \overline{c}\overline{b}\overline{a} \vee \overline{c}\overline{b}a \vee \overline{c}ba \vee cba$ $\boxed{\text{1 P.}}$

5. disjunktive Minimalform: $f(c,b,a) = \overline{c}\overline{b} \vee ba$ $\boxed{\text{1 P.}}$
   (Aus vorheriger DNF ersichtlich. $\overline{a}$ und $a$ aus den ersten beiden Termen „kürzen“ sich. So auch $\overline{c}$ und $c$.)

Lösung 3 (4 Punkte)

1. Disjunktive Form: $\boxed{\text{1 P.}}$

$$\overline{c}\,b\overline{a} \vee c\overline{b}\,\overline{a} \vee \overline{b}\,\overline{a} \vee \overline{a} \vee cb \vee \overline{c}\,a$$

2. Beispiele (andere Lösungen können auch richtig sein): $\boxed{\text{3 P.}}$

   i.) $(1,0,0) \subset (-,0,0)$

   ii.) $(-,-,0) \cap (1,1,-) = (1,1,0)$

   iii.) $(0,1,0) \cap (1,0,0)$ existiert nicht