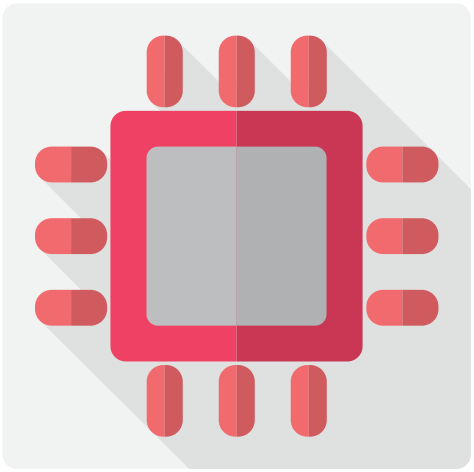
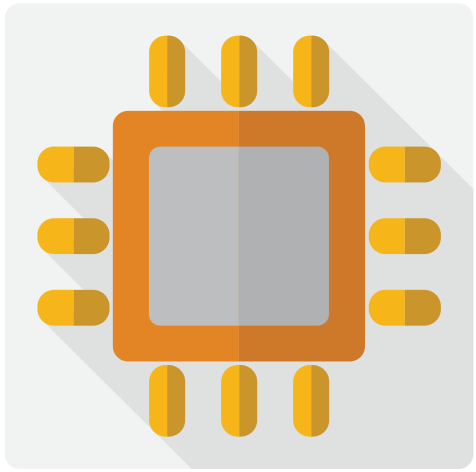
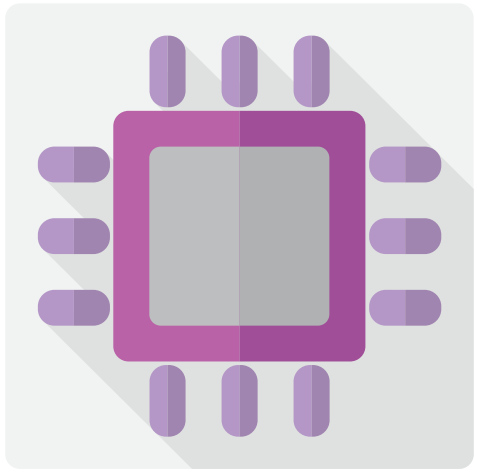
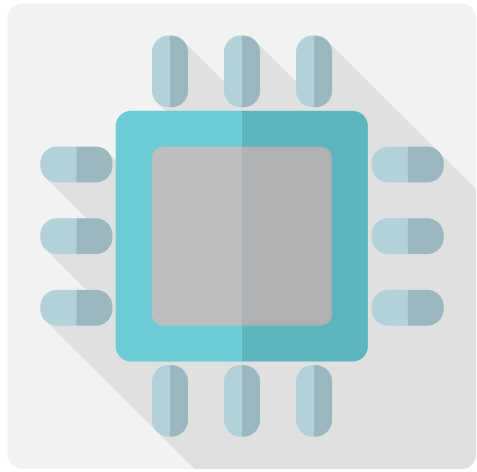
Karlsruher Institut für Technologie

# Technische Informatik – SS 2024 – Digitaltechnik und Entwurfsverfahren (TI 1)


## Uwe D. Hanebeck, Roman Lehmann

KIT-Fakultät für Informatik, Institut für Technische Informatik (ITEC), Forschungsgruppe für Rechnerarchitektur und Parallelverarbeitung (CAPP)

# Übung 2

# 2. Übung

- Organisation
- Boolesche Algebra
- Boolesche Funktionen
  - Darstellungsformen
- Bestimmung der Normalformen
  - Algebraisch
  - Aus Funktionstabelle
  - Mit Shannonschen Entwicklungssatz
- Aufgaben

# Fahrplan der nächsten Wochen

- 16.05.2024 – Vorlesung
- 21.05.2024 – vorlesungsfrei wegen Pfingstwoche
- 23.05.2024 – vorlesungsfrei wegen Pfingstwoche

} keine Tutorien

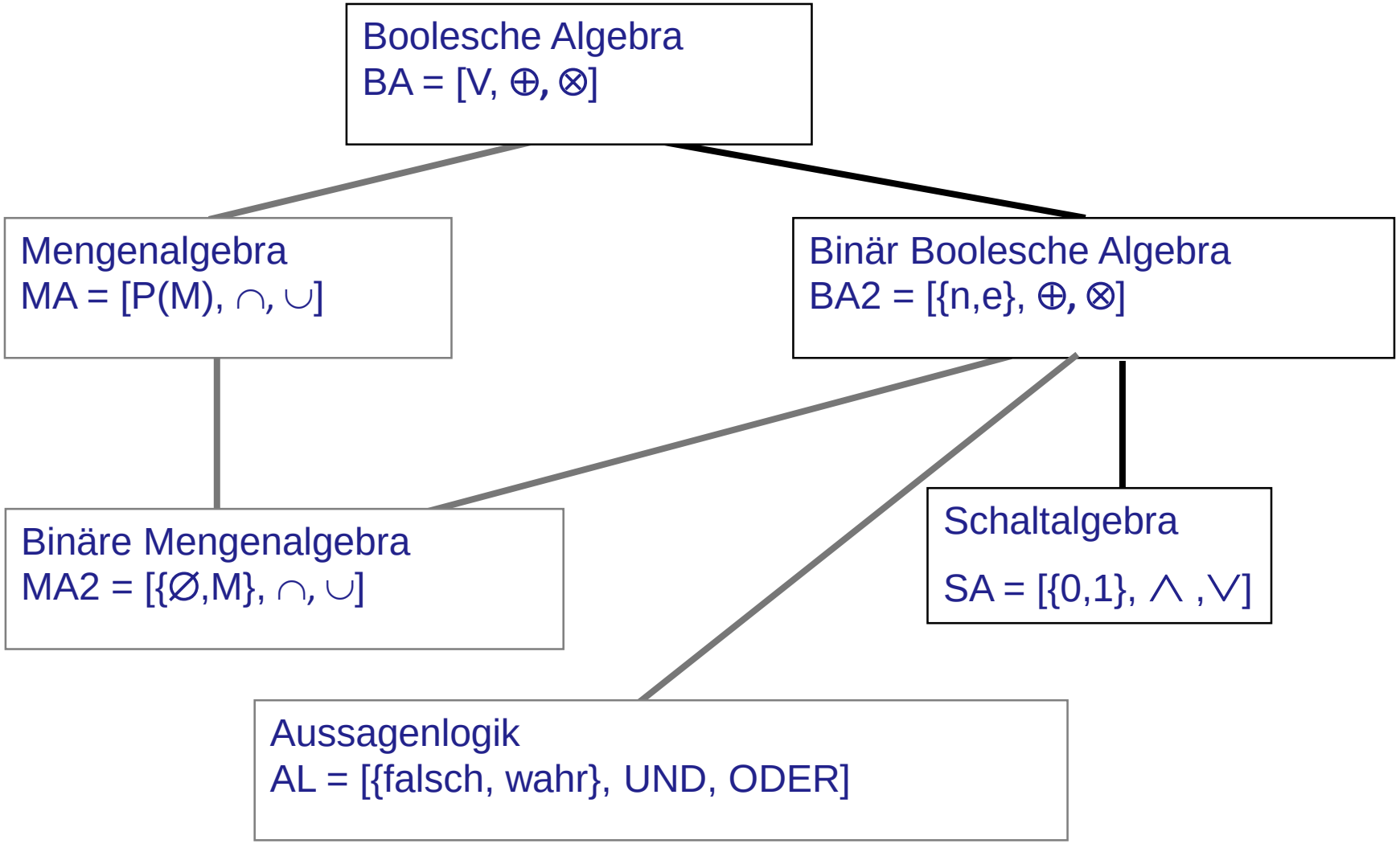
- 27.05.2024 – Abgabe 3. Übungsblatt
- 28.05.2024 – Vorlesung
- 30.05.2024 – vorlesungsfrei, keine Tutorien wegen Fronleichnam

- Alles im Ilias vermerkt

# Sonderblatt Gleitkomma zum Selbststudium

- Sonderblatt + Lösung im Ilias zum Thema Gleitkommazahlen
  - Thematik Gleitkommazahlen
  - Unterschied zwischen allgemeiner Definition und IEEE
  - Wird nicht weiter besprochen

# Zusammenfassung: Boolesche Algebra



# Huntingtonsche Axiome in der Schaltalgebra

**H0:** $a \vee b \in \{0, 1\}$
$a \wedge b \in \{0, 1\}$
Abgeschlossenheit

**H1:** $a \vee b = b \vee a$
$a \wedge b = b \wedge a$
Kommutativgesetz

**H2:** $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
Distributivgesetz

**H3:** $a \wedge 1 = a$
$a \vee 0 = a$
Existenz neutraler Elemente

**H4:** $a \wedge \overline{a} = 0$
$a \vee \overline{a} = 1$
Existenz komplementärer Elemente

# Abgeleitete Gesetze der Schaltalgebra

Aus den vier Huntingtonschen Axiomen lassen sich weitere Sätze ableiten:

**Assoziativgesetze:**

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$
$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$

**Idempotenzgesetze:**

$$a \wedge a = a$$
$$a \vee a = a$$

**Absorptionsgesetze:**

$$a \wedge (a \vee b) = a$$
$$a \vee (a \wedge b) = a$$

**DeMorgan-Gesetze:**

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$$
$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$$

# Dualitätsprinzip

**Dualitätsprinzip:**

| | | |
|---|---|---|
| Man ersetze: | $\vee \leftrightarrow \wedge$ | **0 ↔ 1** |
| Man belasse: | **a ↔ a** | **ā ↔ ā** |

**H1:**

$$a \vee b = b \vee a$$
$$a \wedge b = b \wedge a$$

**H2:**

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

**H3:**

$$a \vee 0 = a$$
$$a \wedge 1 = a$$

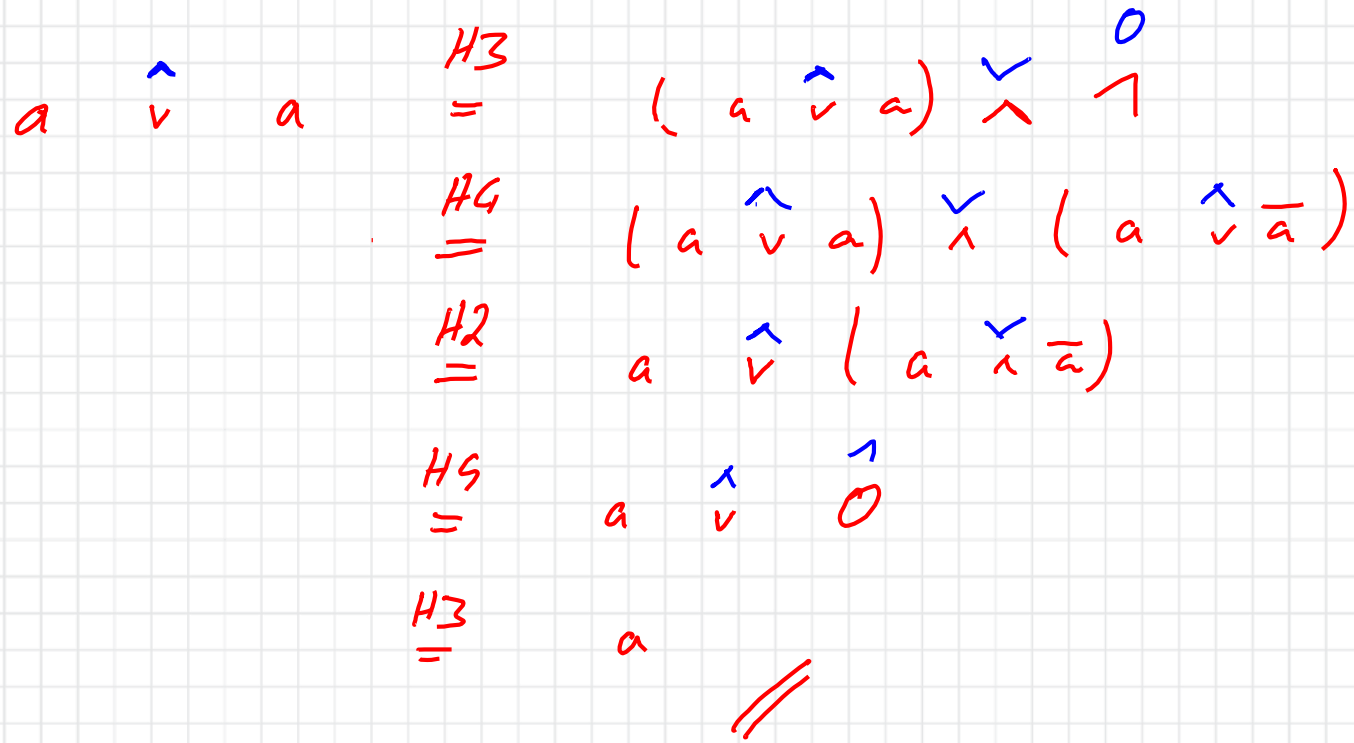
**H4:**

$$a \wedge \overline{a} = 0$$
$$a \vee \overline{a} = 1$$

# Aufgabe 1

Beweisen Sie die beiden Idempotenzgesetze:

- $a \wedge a = a$
- $a \vee a = a$



# Aufgabe 1

**Dualitätsprinzip:**

Man ersetze $\wedge \leftrightarrow \vee$ $\quad$ $\mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{1}$

Man belasse $\boldsymbol{a} \leftrightarrow \boldsymbol{a}$ $\quad$ $\overline{\boldsymbol{a}} \leftrightarrow \overline{\boldsymbol{a}}$

$$
\begin{aligned}
a \wedge a &\overset{H3}{=} (a \wedge a) \vee 0 \\
&\overset{H4}{=} (a \wedge a) \vee (a \wedge \overline{a}) \\
&\overset{H2}{=} a \wedge (a \vee \overline{a}) \\
&\overset{H4}{=} a \wedge 1 \\
&\overset{H3}{=} a \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a \vee a &\overset{H3}{=} (a \vee a) \wedge 1 \\
&\overset{H4}{=} (a \vee a) \wedge (a \vee \overline{a}) \\
&\overset{H2}{=} a \vee (a \wedge \overline{a}) \\
&\overset{H4}{=} a \vee 0 \\
&\overset{H3}{=} a \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}
$$

# Aufgabe 2

Beweisen Sie die beiden Absorptionsgesetze:

$$a \wedge (a \vee b) = a$$
$$a \vee (a \wedge b) = a$$

$a \vee (a \wedge b)$

$\overset{H3}{=} (a \wedge 1) \vee (a \wedge b)$

$\overset{H2}{=} a \wedge (1 \vee b)$

$\overset{*}{=} a \wedge 1$

$\overset{H3}{=} a$ //

* NR:

$1 \vee b =$

$\overset{H5}{=} (b \vee \bar{b}) \vee b$

$\overset{H1}{=} (\bar{b} \vee b) \vee b$

$= \bar{b} \vee (b \vee b)$

$= \bar{b} \vee b$

$= 1$

# Aufgabe 3

Beweisen Sie die die folgende Behauptung:

$$\left.\begin{aligned} a \vee b &= a \vee c \\ a \wedge b &= a \wedge c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad b = c$$

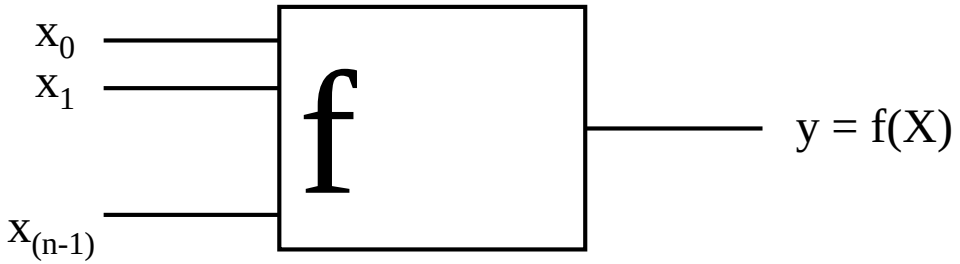
$$\begin{aligned} b &\overset{*}{=} b \wedge (b \vee a) \overset{HA}{=} b \wedge (a \vee b) \overset{**}{=} b \wedge (a \vee c) \\ &= (b \wedge a) \vee (b \wedge c) \overset{HA}{=} (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \\ &= (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \overset{HA}{=} (a \vee b) \wedge c \\ &\overset{**}{=} (a \vee c) \wedge c \overset{*}{=} c \end{aligned}$$

//

# Boolesche Funktionen

**Binäre** Funktionen **binärer** Variablen

$$f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$$




$n$ unabhängige Eingangsvariablen: $x_i \in \{0,1\}$ $i = 0, \ldots, n-1$

$2^n$ spezielle Eingangsbelegungen: $B_i \in \{0,1\}^n$ $i = 0, \ldots, 2^n - 1$

$1$ abhängige Ausgangsvariable: $y \in \{0,1\}$

$n$ Eingangsvariablen: $\Rightarrow 2^{2^n}$ Funktionen

# Zweistellige Boolesche Funktionen

$$f : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

## Darstellung Boolescher Funktionen

- durch eine Funktionstabelle
- durch einen algebraischen Ausdruck (symbolische Form)

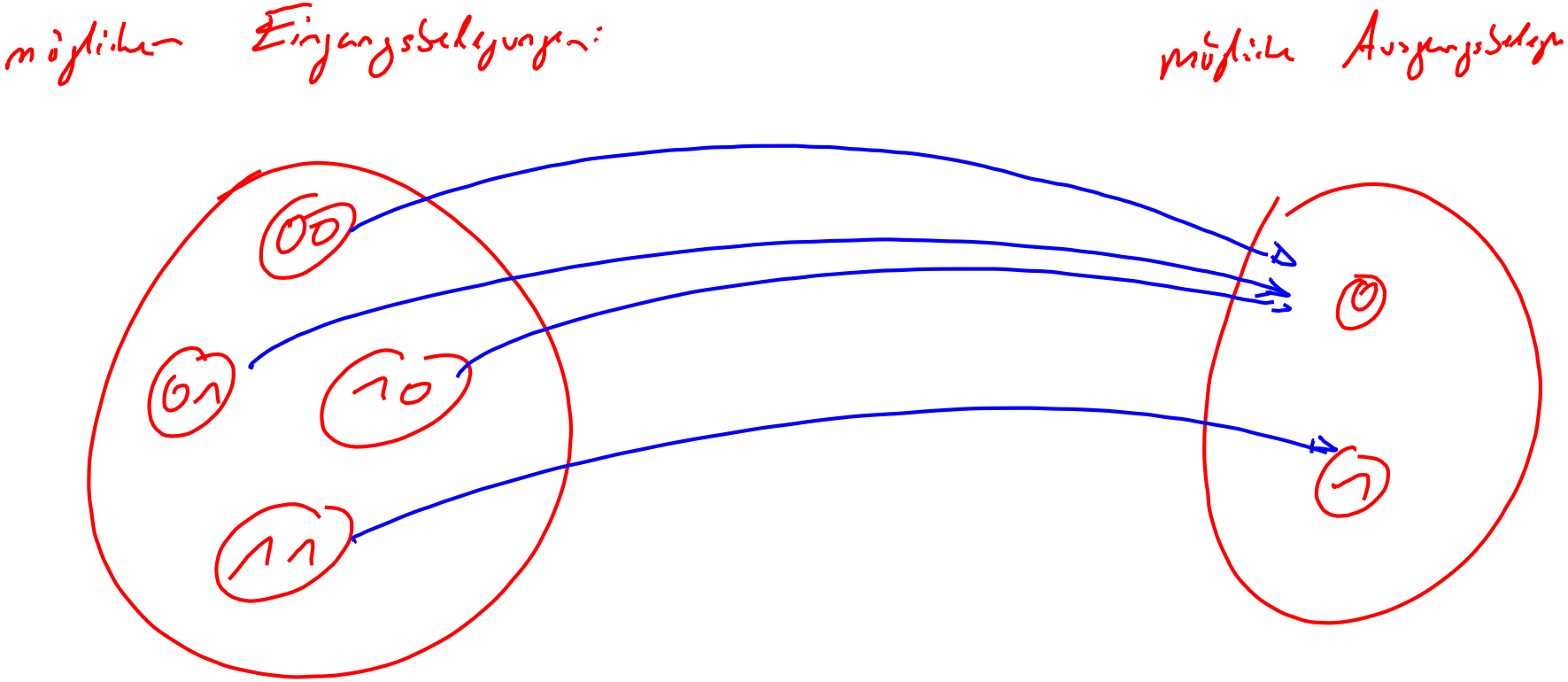
**Beispiel:** Funktionstabelle

| $a$ | $b$ | $f$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

symbolische Form

$$f = a \wedge b$$

# Darstellung als Abbildung



# 16 mögliche zweistellige boolesche Funktionen

| $x_1$ / $x_0$ | 0 0 1 1 / 0 1 0 1 | verbale Form | symbolische Darstellung | Bezeichnung |
|---|---|---|---|---|
| $f_0$ | 0 0 0 0 | konstant 0 | $0$ | Nullfunktion/Kontradiktion |
| $f_1$ | 0 0 0 1 | $x_1$ und $x_0$ | $x_1 \wedge x_0$ | Konjunktion |
| $f_2$ | 0 0 1 0 | nicht $x_0$, aber $x_1$ | $x_1 \wedge \overline{x_0}$ | Inhibition |
| $f_3$ | 0 0 1 1 | identisch $x_1$ | $x_1$ | Identität |
| $f_4$ | 0 1 0 0 | nicht $x_1$, aber $x_0$ | $\overline{x_1} \wedge x_0$ | Inhibition |
| $f_5$ | 0 1 0 1 | identisch $x_0$ | $x_0$ | Identität |
| $f_6$ | 0 1 1 0 | $x_1$ ungleich $x_0$ | $x_1 \not\leftrightarrow x_0$ | Antivalenz |
| $f_7$ | 0 1 1 1 | $x_1$ oder $x_0$ | $x_1 \vee x_0$ | Disjunktion |
| $f_8$ | 1 0 0 0 | nicht ($x_1$ oder $x_0$) | $x_1 \overline{\vee} x_0$ | NOR-Funktion |
| $f_9$ | 1 0 0 1 | $x_1$ gleich $x_0$ | $x_1 \leftrightarrow x_0$ | Äquivalenz |
| $f_{10}$ | 1 0 1 0 | nicht $x_0$ | $\overline{x_0}$ | Negation |
| $f_{11}$ | 1 0 1 1 | wenn $x_0$, dann $x_1$ | $x_0 \rightarrow x_1$ | Implikation |
| $f_{12}$ | 1 1 0 0 | nicht $x_1$ | $\overline{x_1}$ | Negation |
| $f_{13}$ | 1 1 0 1 | wenn $x_1$, dann $x_0$ | $x_1 \rightarrow x_0$ | Implikation |
| $f_{14}$ | 1 1 1 0 | nicht ($x_1$ und $x_0$) | $x_1 \overline{\wedge} x_0$ | NAND-Funktion |
| $f_{15}$ | 1 1 1 1 | konstant 1 | $1$ | Tautologie |

„Negation vor Konjunktion, Konjunktion vor Disjunktion“

$$a \wedge b = ab$$

$$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b) = ab \vee \bar{a}b$$

$\bar{a}\,\bar{b} \neq \overline{ab}$ · $\overline{(a \wedge b)} = \bar{a} \vee \bar{b}$

# Dreistellige Funktionen

$$OR_3(x_2, x_1, x_0) = x_2 \vee x_1 \vee x_0$$

$$= (x_2 \vee x_1) \vee x_0$$

$$= x_2 \vee (x_1 \vee x_0)$$

Also

$$NAND_3(x_2, x_1, x_0) = \overline{x_2 \wedge x_1 \wedge x_0}$$

$$= \overline{(x_2 \wedge x_1)} \wedge x_0$$

$$\neq x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$$

# Normalformen

- Eine Boolesche Funktion kann durch verschiedene boolesche Ausdrücke beschrieben werden.
- Eine Standarddarstellung Boolescher Funktionen im vollständigen Operatorensystem $(\wedge, \vee, \overline{\ })$ ist die konjunktive Normalform (KNF) und die disjunktive Normalform (DNF)
- DNF: Disjunktion aller Minterme

$$\boldsymbol{y = K_0 \vee K_1 \vee \cdots \vee K_{k-1}}$$

- KNF: Konjunktion aller Maxterme

$$\boldsymbol{y = D_0 \wedge D_1 \wedge \cdots \wedge D_{k-1}}$$

# DNF und KNF (1)

Disjunktive und konjunktive Normalformen sind **eindeutige** Darstellungen!

**Beispiel:**

$$y = a\,\bar{b}\vee c$$

durch Erweitung

$= a\,\bar{b}\,(c \vee \bar{c}) \vee c\,(a \vee \bar{a})(b \vee \bar{b})$

$= a\,\bar{b}\,c \vee a\,\bar{b}\,\bar{c} \vee c\,a\,b \vee c\,a\,\bar{b} \vee c\,\bar{a}\,b \vee c\,\bar{a}\,\bar{b}$

$= c\,\bar{b}\,a \vee \bar{c}\,\bar{b}\,a \vee c\,b\,a \vee c\,\bar{b}\,a \vee c\,b\,\bar{a} \vee c\,\bar{b}\,\bar{a}$

$1\,0\,1 \quad 0\,0\,1 \quad 1\,1\,1 \quad 1\,0\,1 \quad 1\,1\,0 \quad 1\,0\,0$

$5 \quad 1 \quad 7 \quad 5 \quad 6 \quad 4$

$= MIN_E(1, 4, 5, 6, 7) = f(c, b, a) = y$

# DNF und KNF (2)

KNF analog

DNF: $y = \bar{c}\bar{b}a \vee c\bar{b}\bar{a} \vee c\bar{b}a \vee cb\bar{a} \vee cba$

KNF: $y = (c \vee b \vee a) \wedge (c \vee \bar{b} \vee a) \wedge (c \vee \bar{b} \vee \bar{a})$

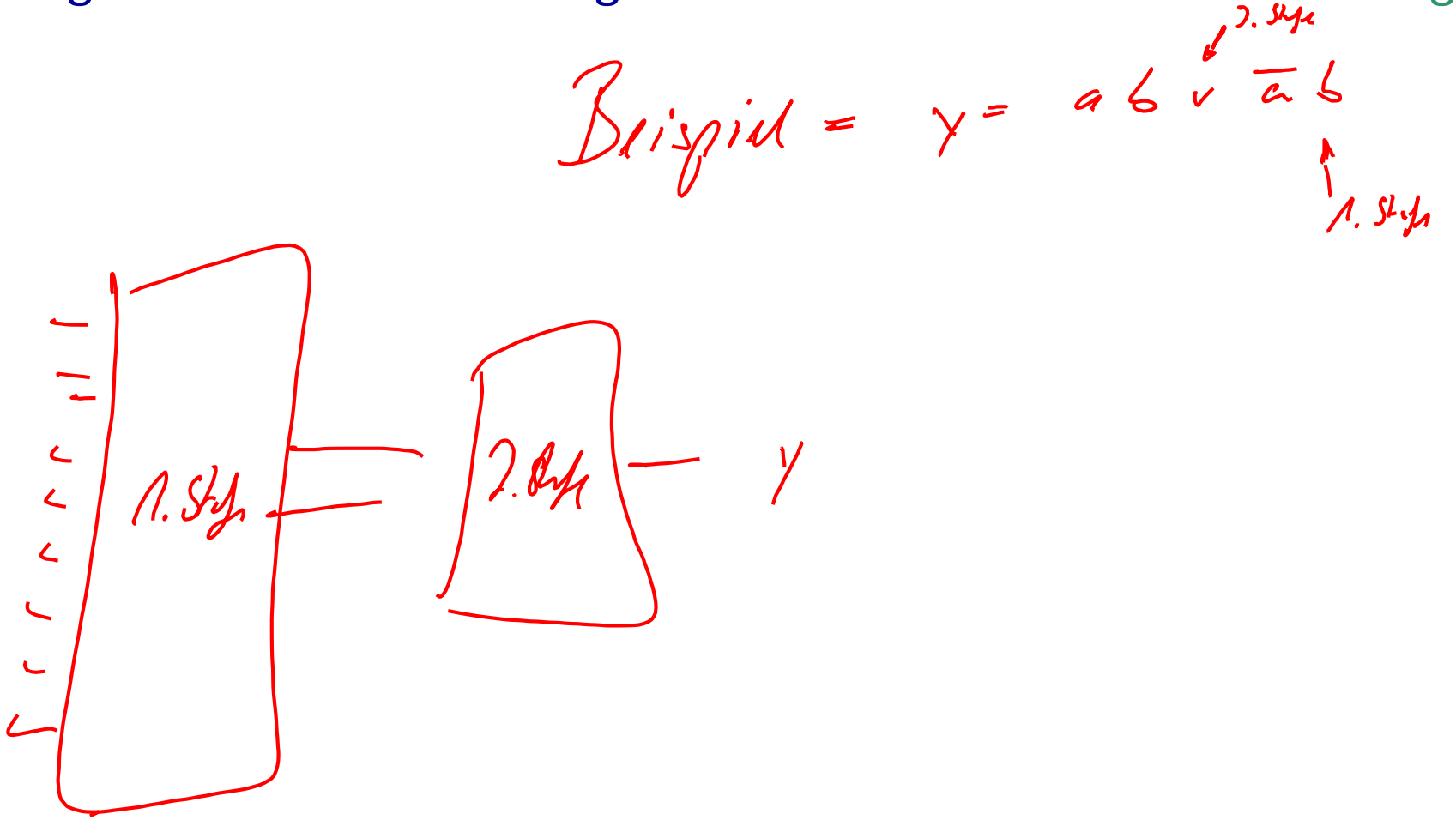
0 0 0 0 1 0 0 1 1

0 2 3

$= MAX_{\in}(0, 2, 3)$

# Normalformen

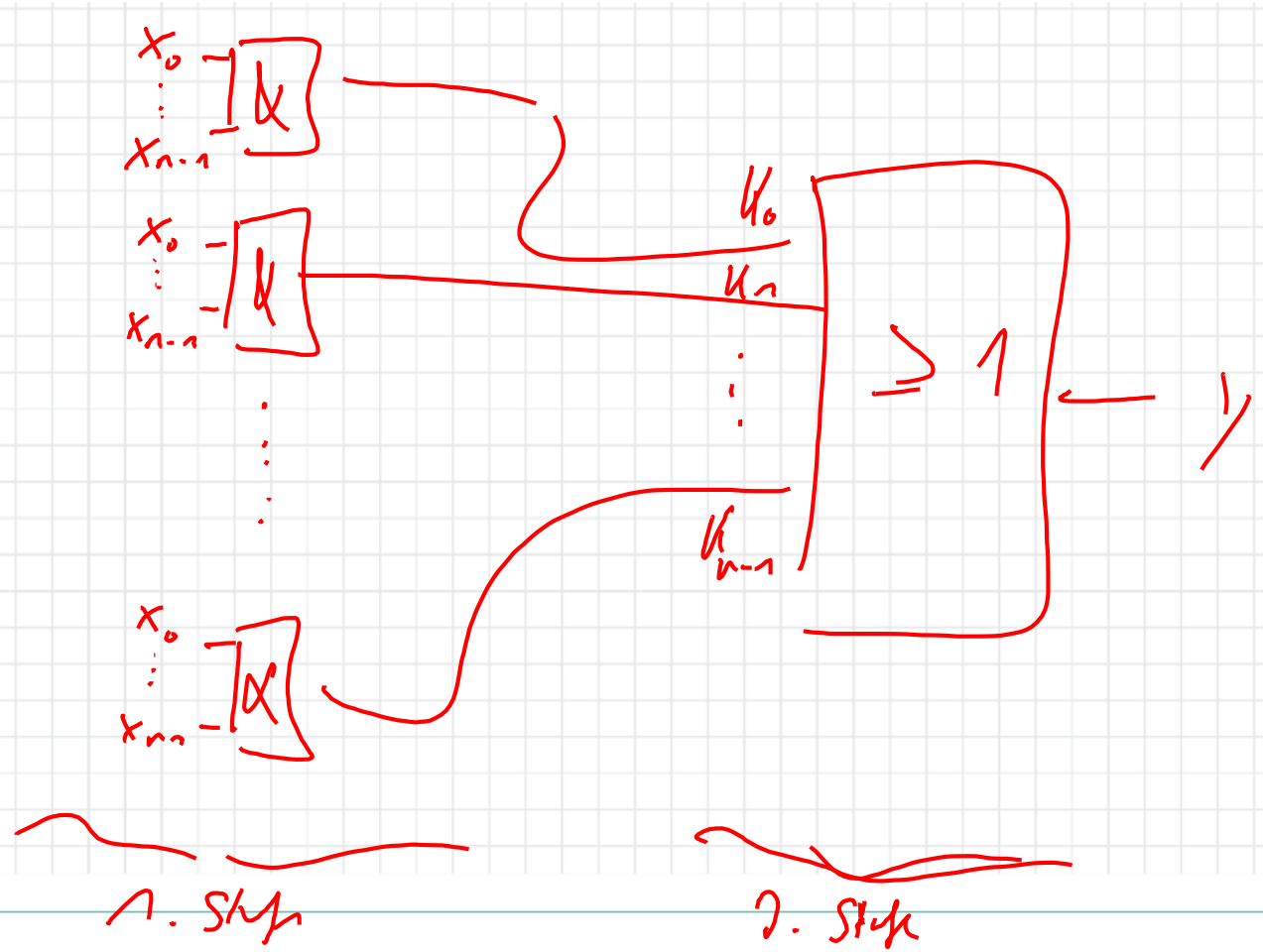
- Normalformen ermöglichen eine Realisierung Boolescher Funktionen als zweistufige Schaltungen



# Zweistufige Disjunktive Schaltungen

Ausgangspunkt: DNF

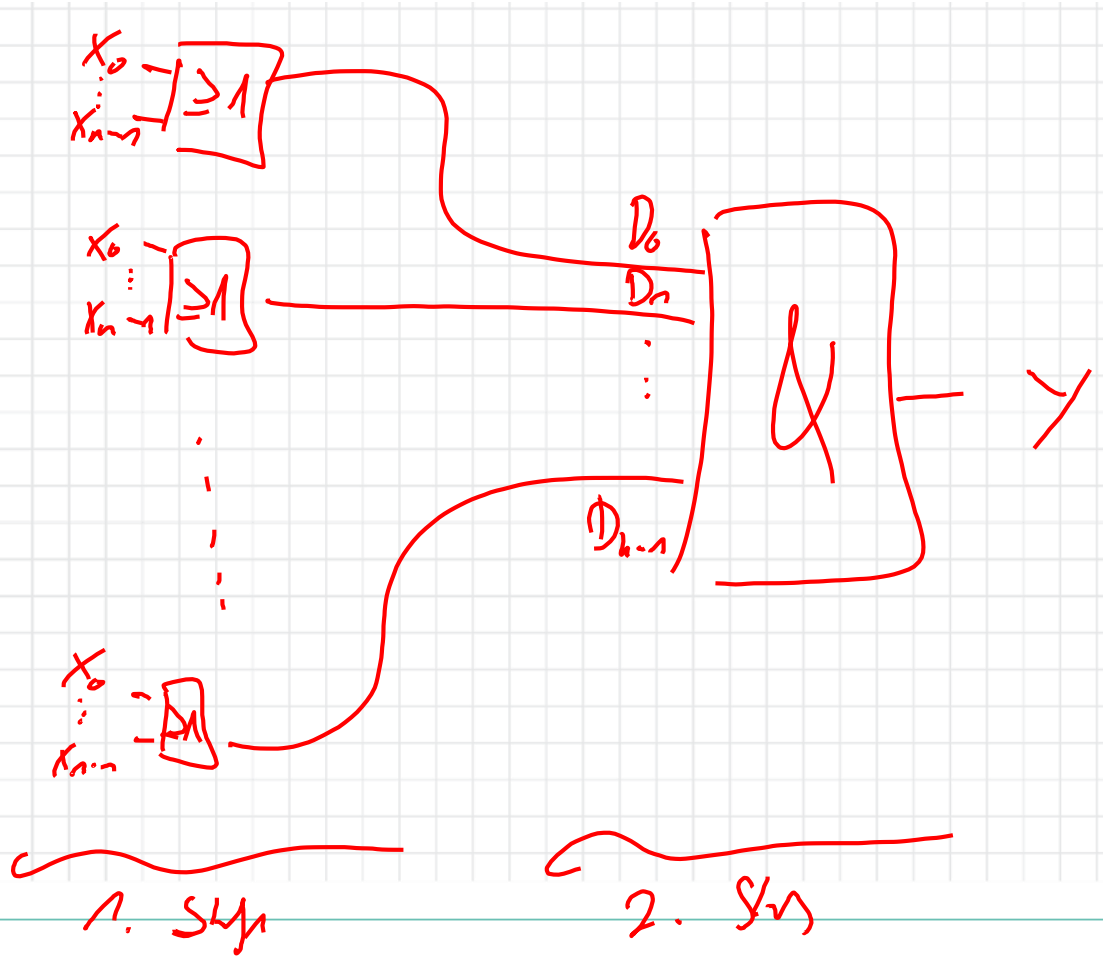
$$y = K_0 \vee K_1 \vee \ldots \vee K_{k\text{-}1}$$



# Zweistufige Konjunktive Schaltungen

Ausgangspunkt: KNF

$$y = D_0 \wedge D_1 \wedge \ldots \wedge D_{k\text{-}1}$$



# DNF oder KNF aus beliebiger Form

- Um Funktionen aus der DF bzw. KF in die DNF bzw. KNF zu überführen, ist der **Shannonsche Entwicklungssatz** behilflich.

- Entwicklung nach der Variablen $x_i$:
  - die Variable wird in der Funktion auf den Wert **1** gesetzt,
  - der entstehende Term konjunktiv mit $x_i$ verknüpft,
- $\vee$-verknüpft mit:
  - die Variable wird in der Funktion auf den Wert **0** gesetzt und
  - der entstehende Term konjunktiv mit $\overline{x_i}$ verknüpft

$$
\begin{aligned}
y &= f(x_1, \ldots, x_n) \\
&= [x_i \wedge f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)] \vee [\overline{x_i} \wedge f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)]
\end{aligned}
$$

# Aufgabe 4

Die folgende boolesche Funktion soll in eine disjunktive Form nach den Variablen **a, b, c** und **d** in dieser Reihenfolge entwickelt werden, jedoch höchstens solange, bis die Restfunktionen nur noch aus einer Variablen bestehen.

$$f(d,c,b,a) = (a \vee b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\overline{c}\,\overline{d} \vee a\,b) \wedge (\overline{c} \vee \overline{d})$$

Entwickeln Sie f(d,c,b,a) schrittweise. Vereinfachen Sie die jeweils gefundenen Restfunktionen nur mit folgenden Regeln:

# Aufgabe 4

- Idempotenzgesetz: $a \vee a = a$ $\quad$ $a \wedge a = a$

- Rechenregeln für logische Ausdrücke mit Konstanten:

$$1 \vee a = 1 \qquad 0 \vee a = a \qquad a \vee \bar{a} = 1$$
$$0 \wedge a = 0 \qquad 1 \wedge a = a \qquad a \wedge \bar{a} = 0$$

$$f(d, c, b, a) = (a \vee b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\bar{c}\,\bar{d} \vee a\,b) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d})$$

Shannonscher Entwicklungssatz:

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= [\, x_i \wedge f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \mathbf{1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \,] \vee \\ &= [\, \overline{x_i} \wedge f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \mathbf{0}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \,] \end{aligned}$$

# Aufgabe 4

$$f(d,c,b,a) = (a \vee b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\bar{c}\,\bar{d} \vee a\,b) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d})$$

Entwicklung nach a:

$$\begin{aligned} f(d,c,b,a) = \quad & (a \vee b) \wedge \overline{(c \vee d)} \vee \left(\bar{c}\bar{d} \vee ab\right) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d}) \\ = \quad & a\left[(1 \vee b) \wedge \overline{(c \vee d)} \vee \left(\bar{c}\bar{d} \vee 1b\right) \wedge \left(\bar{c} \vee \bar{d}\right)\right] \ \vee \\ & \bar{a}\left[(0 \vee b) \wedge \overline{(c \vee d)} \vee \left(\bar{c}\bar{d} \vee 0b\right) \wedge \left(\bar{c} \vee \bar{d}\right)\right] \\ = \quad & \underbrace{a\left[\overline{(c \vee d)} \vee \left(\bar{c}\bar{d} \vee b\right) \wedge \left(\bar{c} \vee \bar{d}\right)\right] \ \vee \bar{a}\left[(b) \wedge \overline{(c \vee d)} \vee \left(\bar{c}\bar{d}\right) \wedge \left(\bar{c} \vee \bar{d}\right)\right]}_{\text{Restfunktionen nach b entwickeln}} \end{aligned}$$

# Aufgabe 4

$$
\begin{aligned}
= \quad & a \quad [(\overline{c \vee d}) \vee (\bar{c}\,\bar{d} \vee b) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d})] \quad \vee \\
& \bar{a} \quad [(b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\bar{c}\,\bar{d}) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & a\,b \quad [(\overline{c \vee d}) \vee (\bar{c}\,\bar{d} \vee 1) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d})] \quad \vee \\
& a\,\bar{b} \quad [(\overline{c \vee d}) \vee (\bar{c}\,\bar{d} \vee 0) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d})] \quad \vee \\
& \bar{a}\,b \quad [(1) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\bar{c}\,\bar{d}) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d})] \quad \vee \\
& \bar{a}\,\bar{b} \quad [(0) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\bar{c}\,\bar{d}) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & a\,b \quad [(\overline{c \vee d}) \vee (\bar{c} \vee \bar{d})] \quad \vee \\
& a\,\bar{b} \quad [(\overline{c \vee d}) \vee (\bar{c}\,\bar{d}) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d})] \quad \vee \\
& \bar{a}\,b \quad [(\overline{c \vee d}) \vee (\bar{c}\,\bar{d}) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d})] \quad \vee
\end{aligned}
$$

$\bar{a}\,\bar{b} \quad [(\bar{c}\,\bar{d}) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d})]$

# Aufgabe 4

Restfunktionen nach c entwickeln:

$$
\begin{aligned}
= \quad & a\,b \quad [(\overline{c \vee d}) \vee (\bar{c} \vee \bar{d})] \quad \vee \\
& a\,\bar{b} \quad [(\overline{c \vee d}) \vee (\bar{c}\,\bar{d}) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d})] \quad \vee \\
& \bar{a}\,b \quad [(\overline{c \vee d}) \vee (\bar{c}\,\bar{d}) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d})] \quad \vee \quad \bar{a}\bar{b} \quad [(\bar{c}\bar{d}) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & a\,b\,c\,\bar{d}\,[(\overline{1 \vee d}) \vee (\bar{1} \vee \bar{d})] \quad \vee a\,b\,\bar{c}\,[(\overline{0 \vee d}) \vee (\bar{0} \vee \bar{d})] \quad \vee \\
& a\,\bar{b}\,c\,0\,[(\overline{1 \vee d}) \vee (\bar{1}\,\bar{d}) \wedge (\bar{1} \vee \bar{d})] \quad \vee \\
& a\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}\,[(\overline{0 \vee d}) \vee (\bar{0}\,\bar{d}) \wedge (\bar{0} \vee \bar{d})] \quad \vee \\
& \bar{a}\,b\,c\,0\,[(\overline{1 \vee d}) \vee (\bar{1}\,\bar{d}) \wedge (\bar{1} \vee \bar{d})] \quad \vee \\
& \bar{a}\,b\,\bar{c}\,\bar{d}\,[(\overline{0 \vee d}) \vee (\bar{0}\,\bar{d}) \wedge (\bar{0} \vee \bar{d})] \quad \vee \\
& \bar{a}\bar{b}c\,0\,[(\bar{1}\bar{d}) \wedge (\bar{1} \vee \bar{d})] \vee \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}[(\bar{0}\bar{d}) \wedge (\bar{0} \vee \bar{d})]
\end{aligned}
$$

# Aufgabe 4

$$f(d,c,b,a) = abc\overline{d} \vee ab\overline{c}1 \vee a\overline{b}c0 \vee a\overline{b}\overline{c}\overline{d} \vee$$
$$\overline{a}bc0 \vee \overline{a}b\overline{c}\overline{d} \vee \overline{a}\overline{b}c0 \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}$$

$$f(d,c,b,a) = abc\overline{d} \vee ab\overline{c}(d \vee \overline{d}) \vee a\overline{b}\overline{c}\overline{d} \vee$$
$$\overline{a}b\overline{c}\overline{d} \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}$$

**Disjunktive Normalform:**

$$f(d,c,b,a) = abc\overline{d} \vee ab\overline{c}d \vee ab\overline{c}\overline{d} \vee a\overline{b}\overline{c}\overline{d} \vee$$
$$\overline{a}b\overline{c}\overline{d} \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}$$

# Dualitätsprinzip

## Dualitätsprinzip:

| | | |
|---|---|---|
| Man ersetze | $\vee \leftrightarrow \wedge$ | $\mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{1}$ |
| Man belasse | $a \leftrightarrow a$ | $\overline{a} \leftrightarrow \overline{a}$ |

**Shannonscher Entwicklungssatz:**

Disjunktive Form:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = [\, x_i \wedge f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \mathbf{1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \,] \vee [\, \overline{x_i} \wedge f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \mathbf{0}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \,]$$

Konjunktive Form:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = [\, x_i \vee f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \mathbf{0}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \,] \wedge [\, \overline{x_i} \vee f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \mathbf{1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \,]$$

# Aufgabe 5

Die folgende boolesche Funktion soll in eine konjunktive Normalform mit Hilfe des Entwicklungssatzes überführt werden:

$$f(c, b, a) = (a \vee b) \leftrightarrow (c \vee (a \nleftrightarrow c))$$

Entwicklung nach a: $f(c,b,c) = [a \vee f(c,b,0)] \wedge [\bar{a} \vee f(c,b,1)]$

$= [a \vee ((0 \vee b) \leftrightarrow (c \vee (0 \nleftrightarrow c)))] \wedge$

$[\bar{a} \vee ((1 \vee b) \leftrightarrow (c \vee (1 \nleftrightarrow c)))]$

$= [a \vee (b \leftrightarrow c)] \wedge [\bar{a} \vee (1 \leftrightarrow 1)]$

$= a \vee (b \leftrightarrow c)$

$$a \vee (b \leftrightarrow c)$$

$$= a \vee \left( (b \vee \bar{c}) \wedge (\bar{b} \vee c) \right)$$

$$= (a \vee b \vee \bar{c}) \wedge (a \vee \bar{b} \vee c) = f(a,b,c)$$

0 0 1 0 1 0

1 2

$$= MAX_{\in}(1, 2)$$

NR: $b \leftrightarrow c = \underbrace{\left[ b \vee \underbrace{(0 \leftrightarrow c)}_{\bar{c}} \right]}_{\in} \wedge \left[ \bar{b} \vee (1 \leftrightarrow c) \right]$

$$= (b \vee \bar{c}) \wedge (\bar{b} \vee c)$$

Hier wurde die Reihenfolge der variablen nicht in die Form f(c,b,a) geändert.

Sondern direkt als f(a,b,c) interpretiert. Dies führt zu den gegebenen Maxtermen. Dies hat folgen beim zugehörigen KV-Diagramm (siehe spätere Vorlesungen)

Mit Umsortierung zu f(c,b,a) folgt: MAXt(2,4) = f(c,b,a)

# Aufgabe 6: ”Farmers Dilemma”

Farmer, Wolf, Ziege und ein Kohlkopf befinden sich auf einer Flussseite. Der Farmer besitzt ein Boot, welches ihn selbst sowie einen weiteren Gegenstand trägt. Er möchte nun mit allen Gütern auf die andere Seite des Flusses gelangen. Unglücklicherweise frisst der Wolf die Ziege bzw. die Ziege den Kohlkopf, wenn er diese unbeaufsichtigt lässt. Zur Vereinfachung sei angenommen, dass die Überfahrt keine Zeit benötigt, der Bauer also entweder am linken oder am rechten Ufer ist.

Damit nun der Bauer nicht versehentlich Wolf und Ziege bzw. Ziege und Kohl allein lässt, soll ein Warnsystem aufgebaut werden, welches in diesen Fällen Alarm auslöst.

Die Buchstaben **f, w, z,** und **k** bezeichnen Farmer, Wolf, Ziege und den Kohlkopf. Ist der Wert einer solchen Variablen **0 (1)**, dann befindet sich der entsprechende Gegenstand auf der **linken** (**rechten**) Flussseite.

- Geben Sie die Funktionstabelle der Alarmfunktion **a(f,w,z,k)** an

# Lösung

Funktionstabelle:

| f | w | z | k | a |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

- DNF?
- KNF?
- Dilemma-Lösung ?

# DNF: Farmers Dilemma

| f | w | z | k | a |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

DNF:

$$a = \bar{f}\bar{w}zk \vee \bar{f}w z\bar{k} \vee \bar{f}wzk \vee f\bar{w}\bar{z}\bar{k} \vee f\bar{w}\bar{z}k \vee fw\bar{z}\bar{k}$$

# KNF: Farmers Dilemma

| f | w | z | k | a |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

KNF

$a = (f \vee w \vee z \vee k) \wedge (f \vee w \vee z \vee \bar{k})$

$\wedge (f \vee w \vee \bar{z} \vee k) \wedge (f \vee \bar{w} \vee z \vee k)$

$\wedge (f \vee \bar{w} \vee z \vee \bar{k}) \wedge (f \vee w \vee \bar{z} \vee k)$

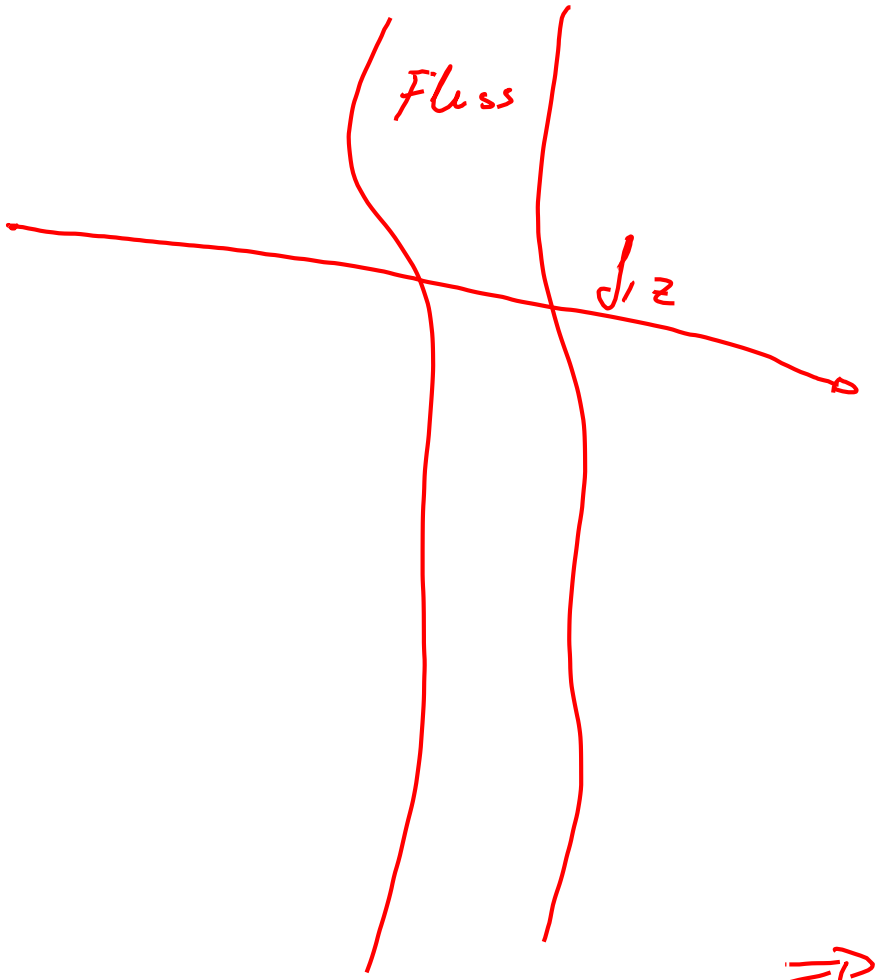
$\wedge (\bar{f} \vee w \vee \bar{z} \vee \bar{k}) \wedge (f \vee \bar{w} \vee z \vee \bar{k})$

$\wedge (\bar{f} \vee \bar{w} \vee \bar{z} \vee k) \wedge (f \vee \bar{w} \vee \bar{z} \vee \bar{k})$

# Lösung Farmers Dilemma

Start

| f | w | z | k | a |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |




| f | w | z | k | a |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Ziel

Lösung:
-> f,z
<- f
-> f,w
< -f,z
-> f,k
<- f
-> f,z

⇒ 7 Übergänge

# Aufgabe 7

Bestimmen Sie die beiden Normalformen der Schaltfunktion

$$f(c, b, a) = \overline{c} \vee b\overline{a}$$

| $c$ | $b$ | $a$ | $f$ | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 6 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 7 |

DNF:

$f = MIN_t(0, 1, 2, 3, 6) = \overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a} \vee \overline{c}\,\overline{b}\,a \vee \overline{c}\,b\,\overline{a} \vee \overline{c}\,b\,a \vee c\,b\,\overline{a}$

$o_t = 6$

KNF:

$f = MAX_t(4, 5, 7) = (\overline{c} \vee b \vee a) \wedge (\overline{c} \vee b \vee \overline{a}) \wedge (\overline{c} \vee \overline{b} \vee \overline{a})$

# Aufgabe 8

Es soll eine Notstop-Schaltung für einen mobilen Roboter realisiert werden. Der Roboter hat drei Sensoren, die drohende Kollisionen mit Hindernissen erkennen. Der Roboter darf weiterfahren, wenn zwei Sensoren keine Kollisionsgefahr melden.

- Geben Sie die Schaltfunktion der Schaltung in disjunktiver Normalform an
- Vereinfachen Sie die DNF soweit wie möglich

f = „mindestens 2 Einsen"

# Aufgabe 8

| $s_2$ | $s_1$ | $s_0$ | f |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 * |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

DNF:

$f = \overline{s_2}\, s_1\, s_0 \vee s_2\, \overline{s_1}\, s_0 \vee s_2\, s_1\, \overline{s_0} \vee s_2\, s_1\, s_0$

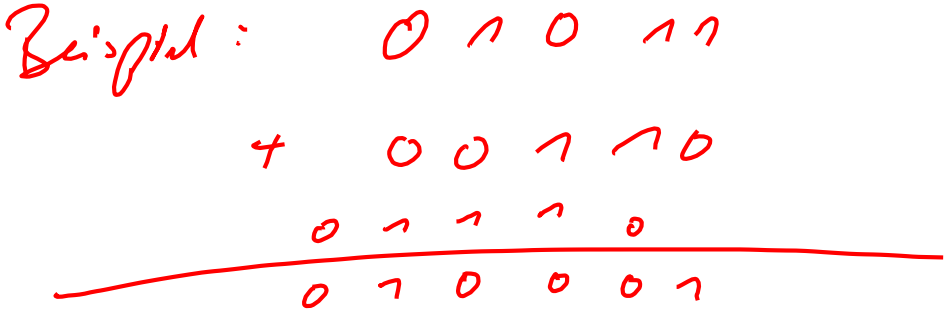
„hinschauen"

$f = s_1 s_0 \vee s_2 s_1 \vee s_2 s_0$

# Aufgabe 9

Es soll eine Schaltnetz entworfen werden, das die Summe von zwei Dualziffern $a_i$ und $b_i$ addiert und dabei den Übertrag $c_{in}$ aus der vorhergehenden Stelle berücksichtigt. Ausgabevariablen sind die Summe $s_i$ und der bei der Addition evtl. entstehende Übertrag $c_{out}$.

- Geben Sie die Funktionstabelle an
- Geben Sie die DNF von $s_i$ an
- Geben Sie die KNF von $c_{out}$ an



# Aufgabe 9

## Funktionstabelle

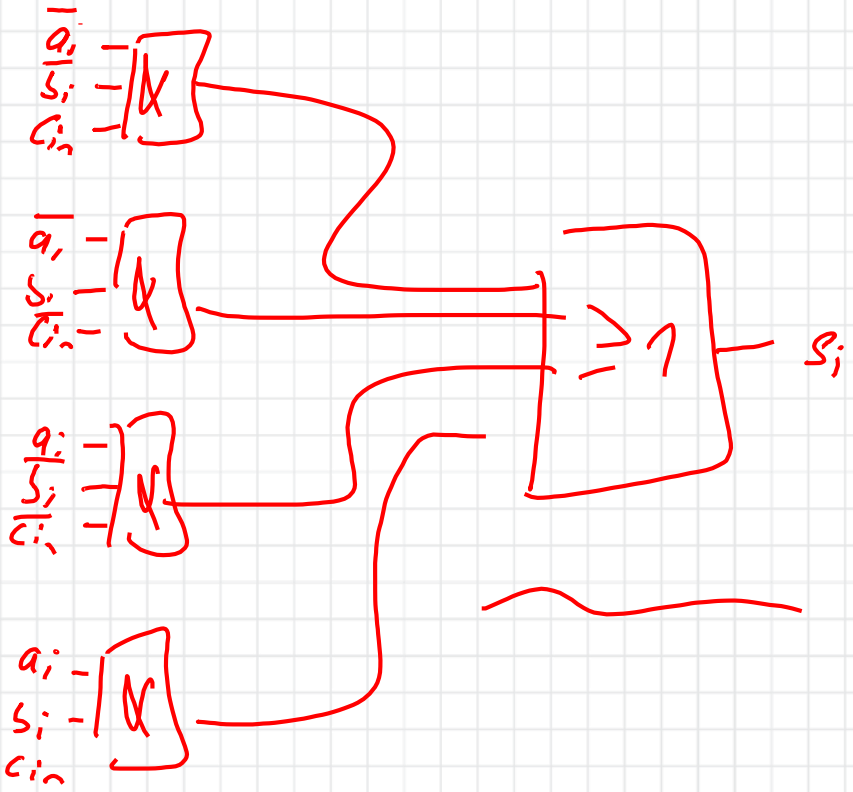
| $a_i$ | $b_i$ | $c_{in}$ | $s_i$ | $c_{out}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# Aufgabe 9

DNF von $s_i$

| $a_i$ | $b_i$ | $c_{in}$ | $s_i$ | $c_{out}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

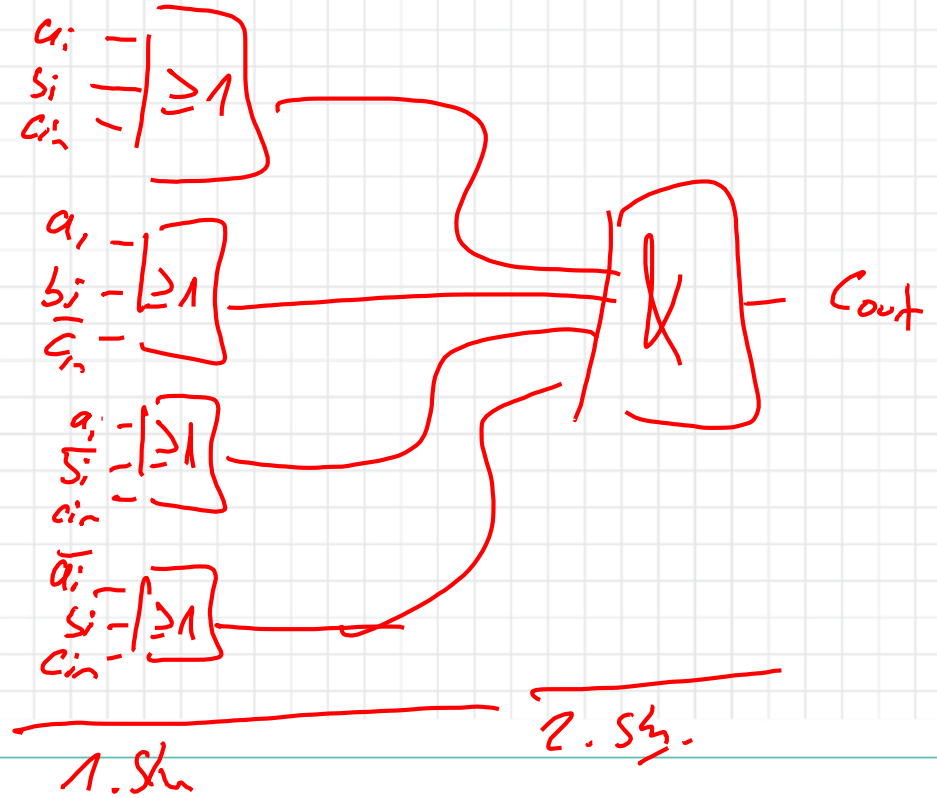
$s_i = \bar{a}_i \bar{b}_i c_{in} \vee \bar{a}_i b_i \bar{c}_{in} \vee a_i \bar{b}_i \bar{c}_{in} \vee a_i b_i c_{in}$



# Aufgabe 9

## KNF von $c_{out}$

| $a_i$ | $b_i$ | $c_{in}$ | $s_i$ | $c_{out}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

KNF:

$c_{out} = (a_i \vee s_i \vee c_{in}) \wedge (a_i \vee s_i \vee \overline{c_{in}}) \wedge (a_i \vee \overline{s_i} \vee c_{in}) \wedge (\overline{a_i} \vee s_i \vee c_{in})$