Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Technische Informatik (ITEC)

Digitaltechnik und Entwurfsverfahren im Sommersemester 2024

Aufgaben zu den Tutorien in der Woche
vom 29. April bis 03. Mai 2024

Prof. Dr.-Ing. Uwe D. Hanebeck
Geb. 50.20, Rm. 140

Roman Lehmann, M. Sc.
Geb. 07.21, Rm. B2-314.1

Email: `roman.lehmann@kit.edu`

Lernziele:

- Zahlensysteme:
  - Zahlenumwandlung (Euklidischer Algorithmus und Horner Schema)
  - Besonderheit, wenn die Basis eine Zweierpotenz der anderen Basis ist (Dual ↔ Hexadezimal)
- Darstellung negativer Zahlen im Rechner:
  - Vorzeichen-Betrag-Form
  - Einerkomplement-Form
  - Zweierkomplement-Form
  - Offset-Dual-Darstellung
- Gleitkommazahlen
  - Normalisierung
  - *smallreal, minreal, maxreal*
  - Besonderheiten beim IEEE-Standard
- Codes (BCD, Gray, ..., siehe Vorlesungsfolien und Skript)

Aufgabe 1

Vervollständigen Sie folgende Tabelle:

Dezimalzahl	Dualzahl	Oktalzahl	Hexadezimalzahl
			CB
			23,F
		57	
		43,52	
	1101001		
	110,01		
253			
19,95			

Lösung 1

Dezimalzahl	Dualzahl	Oktalzahl	Hexadezimalzahl
203	11001011	313	CB
35,9375	100011,1111	43,74	23,F
47	101111	57	2F
35,65625	100011,10101	43,52	23,A8
105	1101001	151	69
6,25	110,01	6,2	6,4
253	11111101	375	FD
19,95	10011,11110011	23,74631	13,F3333

Aufgabe 2

1. Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem im Dualsystem

$$\begin{aligned} x + y &= 100000 \\ x - y &= 1100 \end{aligned}$$

   Die Koeffizienten seien vorzeichenlose Dualzahlen.

   Ermitteln Sie x und y. Führen Sie alle notwendigen Berechnungen im Dualsystem durch.

2. Geben Sie die 8-Bit Darstellung von -29_{10} in:
   - Vorzeichen-Betrag-Form
   - Einerkomplement-Form
   - Zweierkomplement-Form

   an.

Lösung 2

1. Berechnung von x und y:

$$\begin{array}{rrcr} & x+y & = & 100000 \\ + & x-y & = & 1100 \\ \hline & 2x & = & 101100 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x &= 010110 \\ y &= 100000 - x \end{aligned}$$

   Einerkomplement von x ist gleich 10 1001
   Zweierkomplement von x: $x_{ZK} = 10\ 1010$

$$\begin{aligned} y &= \mathbf{0}100000 + x_{ZK} \\ &= \mathbf{0}100000 + \mathbf{1}101010 = 0001010 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{array}{rcll} 29_{10} & = & 00011101_2 & \\ -29_{10} & \widehat{=} & 10011101 & \text{Vorzeichen-Betrag-Form} \\ & \widehat{=} & 11100010 & \text{Einerkomplement-Form} \\ & \widehat{=} & 11100011 & \text{Zweierkomplement-Form} \end{array}$$

Aufgabe 3

Wandeln Sie die Dezimalzahl 21 in das 32-Bit-Format des IEEE-754-Standard um. Stellen Sie die Gleitkommazahl als hexadezimale Zahl dar.

Lösung 3

Dezimalzahl 21 im 32-Bit-IEEE-Format:

$$21_{10} \;=\; 10101_2 \;=\; 1,0101 \cdot 2^4$$

Exponent $= 4 \Rightarrow$ Char $= 127 + 4 = 131_{10} = 1000\ 0011_2$

$$21_{10} \;=\; 0100\ 0001\ 1010\ 1000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000 \;=\; 41A80000_{16}$$

Aufgabe 4

Gegeben sei die folgende Abwandlung des 32-Bit-IEEE-754-Maschinenformats für die Darstellung von Gleitkommazahlen. Sie besteht aus einem Bit für das Vorzeichen, 7 Bits für die Charakteristik und 24 Bits für die Mantisse. Zudem wird die Basis 16 verwendet. Der Indikator für normalisierte Zahlen ist analog zum normalen 32-IEEE-754-Format.

Bit	31	30 … 24	23 … 0
	VZ	CHARAKTERISTIK	MANTISSE

Vorzeichen:	VZ $= 0 \Rightarrow$ positive Zahl	CHARAKTERISTIK $=$ EXPONENT $+ 40_{16}$
	VZ $= 1 \Rightarrow$ negative Zahl	Basis 16

Die Mantisse liegt im Zahlenbereich $0 \leq$ MANTISSE $\leq (1 - 16^{-6})$

1. Geben Sie in obigem Format die größte und die kleinste negative Zahl in normalisierter und in nicht-normalisierter Maschinendarstellung an.
2. Was sind die Vor- und Nachteile, wenn man statt der Basis 16 die Basis 2 verwendet?
3. Was ändert sich, wenn man (im Fall der Basis 2) ein Bit der Mantisse aufgibt zugunsten eines Bits für die Charakteristik?

Lösung 4

1. größte negative Zahl (= betragsmäßig kleinste mit VZ =1)

normalisiert:	1000	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000
	8	1	0	0	0	0	0	0
	In hexadezimaler Schreibweise							
nicht normalisiert:	1000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001
	8	0	0	0	0	0	0	1
	In hexadezimaler Schreibweise							

   Kleinste negative Zahl (= betragsmäßig größte Zahl mit VZ =1):

normalisiert:	1111	1110	1111	1111	1111	1111	1111	1111
	F	E	F	F	F	F	F	F
	In hexadezimaler Schreibweise							

nicht normalisiert:	1000	0000	1111	1111	1111	1111	1111	1111
	8	0	F	F	F	F	F	F

In hexadezimaler Schreibweise

2. Vor- und Nachteile der Basis 2 gegenüber der Basis 16:

Basis 16	**Basis 2**
Nachteile: • pro Zahl maximal 6 Möglichkeiten der Darstellung • $0,000001_{16} \cdot 16^1$ ist smallreal. Faktor 2^3 größer als bei der Darstellung zur Basis 2.	Vorteile: • pro Zahl maximal 24 Möglichkeiten der Darstellung, • $0,000001_{16} \cdot 2^1$ ist smallreal • Normalisierung: 1 Bit kann gespart werden (aber spezieller Kode für 0 nötig).
Vorteile: • $0,FFFFFF_{16} \cdot 16^{63}$ ist maxreal, Faktor 2^{63*3} größer als als bei der Darstellung zur Basis 2, • normiert: $0,1_{16} \cdot 16^{-64}$ ist minreal. Faktor 2^{64*3} kleiner als bei der Darstellung zur Basis 2.	Nachteile: • $0,FFFFFF_{16} \cdot 2^{63}$ ist maxreal. • normiert: $0,1_2 \cdot 2^{-64}$ ist minreal.

3. Man verliert ein Bit an Genauigkeit

Pro Exponent:	vorher	$0,0\cdots00$	$0,1\cdots11$
		$\mid\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\mid$	
	nachher	$0,0\cdots0$	$0,1\cdots1$
		$\mid\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\mid$	

Dafür verdoppelt sich die Zahl der möglichen Exponenten.

Speziell:	smallreal wächst um Faktor 2
	maxreal wächst um Faktor 2^{64}
	minreal sinkt um Faktor 2^{64}