Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Technische Informatik (ITEC)

Digitaltechnik und Entwurfsverfahren im Sommersemester 2024

Aufgaben zu den Tutorien in der Woche
vom 13. bis 17. Mai 2024

Prof. Dr.-Ing. Uwe D. Hanebeck
Geb. 50.20, Rm. 140

Roman Lehmann, M. Sc.
Geb. 07.21, Rm. B2-314.1

Email: roman.lehmann@kit.edu

Lernziele:

- ggf. Wiederholung der letzten Woche:
  - Was ist eine Boolesche Algebra? Was ist die Schaltalgebra?
- Beschreibung einer Booleschen Funktion?
  - Funktionstabelle (Wahrheitstabelle)
  - Durch die Menge der Nullstellen oder die Menge der Einsstellen der Funktion. Also durch die Angabe der Minterme oder der Maxterme der Funktion.
  - Durch Angabe aller Würfel, welche die Funktion überdecken.
- Anwendung des Shannonschen Entwicklungssatzes in seiner disjunktiven bzw. konjunktiven Form (Dualitätsprinzip)

  Disjunktive Form:

  $$\begin{aligned} f(x_n,\ldots,x_1) = \quad & \Big(\mathbf{x_i} \wedge f(x_n,\ldots,x_{i+1},\mathbf{1},x_{i-1},\ldots,x_1)\Big) \\ \vee \quad & \Big(\overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}} \wedge f(x_n,\ldots,x_{i+1},\mathbf{0},x_{i-1},\ldots,x_1)\Big) \end{aligned}$$

  Konjunktive Form:

  $$\begin{aligned} f(x_n,\ldots,x_1) = \quad & \Big(\mathbf{x_i} \vee f(x_n,\ldots,x_{i+1},\mathbf{0},x_{i-1},\ldots,x_1)\Big) \\ \wedge \quad & \Big(\overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}} \vee f(x_n,\ldots,x_{i+1},\mathbf{1},x_{i-1},\ldots,x_1)\Big) \end{aligned}$$

- Würfelkalkül
- NAND_k-/NOR_k-Funktionen (Unterschied zu $\overline{\wedge}$ und $\overline{\vee}$!) und Umwandlung von Funktionen in NAND_k-/NOR_k-Form

Aufgabe 1

Gegeben sei die Boolesche Funktion

$$f(c,b,a) \;=\; \text{MINt}(1,2,3,6,7)$$

1. Stellen Sie die Funktionstabelle der Funktionen $f(c,b,a)$ und $\overline{f}(c,b,a)$ (Komplement von f) auf.
2. Geben Sie die konjunktive Normalform (KNF) der Funktionen f und $\overline{f}$ an.
3. Geben Sie die disjunktive Normalform (DNF) von $\overline{f}$ an.
4. Vereinfachen Sie die Ausdrücke der DNF und KNF von f mit Hilfe der Regeln der Booleschen Algebra. Die resultierenden Ausdrücke sollen so wenig Literale wie möglich enthalten.
5. Geben Sie Würfelüberdeckungen an, durch die f und $\overline{f}$ beschreiben werden.

Lösung 1

1. Funktionstabelle

c	b	a	f	$\overline{f}$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

2. Konjunktive Normalformen:

$$\begin{aligned} f(c,b,a) &= \text{MAXt}(0,4,5) &&= (c \vee b \vee a)\cdot(\overline{c} \vee b \vee a)\cdot(\overline{c} \vee b \vee \overline{a}) \\ \overline{f}(c,b,a) &= \text{MAXt}(1,2,3,6,7) &&= (c \vee b \vee \overline{a})\cdot(c \vee \overline{b} \vee a)\cdot(c \vee \overline{b} \vee \overline{a})\cdot \\ &&& \ (\overline{c} \vee \overline{b} \vee a)\cdot(\overline{c} \vee \overline{b} \vee \overline{a}) \end{aligned}$$

3. Disjunktive Normalform von $\overline{f}$:

$$\overline{f}(c,b,a) \;=\; \text{MINt}(0,4,5) = \overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a} \vee c\,\overline{b}\,\overline{a} \vee c\,\overline{b}\,a$$

4. Vereinfachung den DNF und KNF:

DNF:

$$\begin{aligned} f(c,b,a) = \text{MINt}(1,2,3,6,7) &= \overline{c}\,\overline{b}\,a \vee \overline{c}\,b\,\overline{a} \vee \underbrace{\overline{c}\,b\,a}_{=\overline{c}\,b\,a \vee \overline{c}\,b\,a} \vee c\,b\,\overline{a} \vee c\,b\,a \\ &= \overline{c}\,\overline{b}\,a \vee \overline{c}\,b\,a \vee \overline{c}\,b\,\overline{a} \vee c\,b\,\overline{a} \vee \overline{c}\,b\,a \vee c\,b\,a \\ &= \overline{c}\,a\,(\overline{b} \vee b) \vee b\,\overline{a}\,(\overline{c} \vee c) \vee b\,a\,(c \vee \overline{c}) \\ &= \overline{c}\,a \vee b\,\overline{a} \vee b\,a \\ &= \overline{c}\,a \vee b \end{aligned}$$

KNF:

$$
\begin{aligned}
f(c,b,a) \;= \mathrm{MAXt}(0,4,5) \quad &= \quad (c \,\vee\, b \,\vee\, a) \cdot (\overline{c} \,\vee\, b \,\vee\, a) \cdot (\overline{c} \,\vee\, b \,\vee\, \overline{a}\,) \\
&= \quad (c \,\vee\, b \,\vee\, a) \cdot \Big((\overline{c} \,\vee\, b) \,\vee\, a\,\overline{a} \Big) \\
&= \quad (c \,\vee\, b \,\vee\, a) \cdot (\overline{c} \,\vee\, b) \\
&= \quad (c \,\vee\, b) \cdot (\overline{c} \,\vee\, b) \,\vee\, a\,(\overline{c} \,\vee\, b) \\
&= \quad (b \,\vee\, a) \cdot (\overline{c} \,\vee\, b)
\end{aligned}
$$

5. Würfelüberdeckung:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}_f &= \{(0,-,1),(-,1,-)\} \\
\mathbb{C}_{\overline{f}} &= \{(0,0,0),(1,0,0),(1,0,1)\} \qquad \text{aus der KNF oder} \\
\mathbb{C}_{\overline{f}} &= \{(-,0,0),(1,0,-)\} \qquad \text{nach Vereinfachung der KNF}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die boolesche Funktion:

$$y = f(d,c,b,a) = \overline{d}\,\overline{c}\,a \vee d\,\overline{c}\,b \vee d\,\overline{c}\,a \vee dcb$$

1. Vereinfachen Sie den Ausdruck der obigen Funktion.
2. Stellen Sie die Funktionstabelle der Funktion y auf.
3. Geben Sie sowohl die disjunktive Normalform (DNF) als auch die konjunktive Normalform (KNF) von y an.

Lösung 2

1.
$$
\begin{aligned}
y &= \overline{d}\,\overline{c}\,a \vee d\,\overline{c}\,b \vee d\,\overline{c}\,a \vee dcb \\
&= \overline{c}\,a(d \vee \overline{d}\,) \vee db(c \vee \overline{c}\,) \\
&= \overline{c}\,a \vee db
\end{aligned}
$$

2. Funktionstabelle:

Nr.	d	c	b	a	$y = f(d,c,b,a)$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

3. Disjunktive Normalform (DNF):

$$y = \overline{d}\,\overline{c}\,\overline{b}\,a \vee \overline{d}\,\overline{c}\,ba \vee d\,\overline{c}\,\overline{b}\,a \vee d\,\overline{c}\,b\overline{a} \vee d\,\overline{c}\,ba \vee dcb\overline{a} \vee dcba$$

Konjunktive Normalform (KNF):

$$
\begin{aligned}
y \;=\; & (d \vee c \vee b \vee a)(d \vee c \vee \overline{b} \vee a)(d \vee \overline{c} \vee b \vee a)(d \vee \overline{c} \vee b \vee \overline{a}\,)(d \vee \overline{c} \vee \overline{b} \vee a) \\
& (d \vee \overline{c} \vee \overline{b} \vee \overline{a}\,)(\overline{d} \vee c \vee b \vee a)(\overline{d} \vee \overline{c} \vee b \vee a)(\overline{d} \vee \overline{c} \vee b \vee \overline{a}\,)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Gegeben ist die folgende Tabelle, in der zwei Schaltfunktion $s_i(a_i, b_i, c_{in})$ und $c_{out}(a_i, b_i, c_{in})$:

a_i	b_i	c_{in}	s_i	c_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

1. Geben Sie die disjunktive Normalform (DNF) der Schaltfunktion s_i an.
2. Geben Sie die konjunktive Normalform (KNF) der Schaltfunktion c_{out} an.
3. Zeigen Sie *schaltalgebraisch*, dass $s_i = (a_i \nleftrightarrow b_i) \nleftrightarrow c_{in}$ gilt.

Lösung 3

1. DNF von $s_i(a_i, b_i, c_{in})$:

$$s_i \;=\; \overline{a}_i\,\overline{b}_i\,c_{in} \;\vee\; \overline{a}_i\,b_i\,\overline{c}_{in} \;\vee\; a_i\,\overline{b}_i\,\overline{c}_{in} \;\vee\; a_i\,b_i\,c_{in}$$

2. KNF von $c_{out}(a_i, b_i, c_{in})$:

$$c_{out} \;=\; (a_i \vee b_i \vee c_{in}) \cdot (a_i \vee b_i \vee \overline{c}_{in}) \cdot (a_i \vee \overline{b}_i \vee c_{in}) \cdot (\overline{a}_i \vee b_i \vee c_{in})$$

3. Beweis: $s_i = a_i \nleftrightarrow b_i \nleftrightarrow c_{in}$:

$$\begin{aligned} s_i &= \overline{a}_i\,\overline{b}_i\,c_{in} \;\vee\; \overline{a}_i\,b_i\,\overline{c}_{in} \;\vee\; a_i\,\overline{b}_i\,\overline{c}_{in} \;\vee\; a_i\,b_i\,c_{in} \\ &= (\overline{a}_i\,\overline{b}_i \;\vee\; a_i\,b_i)\,c_{in} \;\vee\; (\overline{a}_i\,b_i \;\vee\; a_i\,\overline{b}_i)\,\overline{c}_{in} \\ &= (a_i \leftrightarrow b_i)\,c_{in} \;\vee\; (a_i \nleftrightarrow b_i)\,\overline{c}_{in} \\ &= (a_i \nleftrightarrow b_i) \nleftrightarrow c_{in} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Geben Sie die folgenden Schaltfunktionen sowohl in NAND$_k$- als auch in NOR$_k$-Form an. (Die Variablen stehen sowohl bejaht als auch negiert zur Verfügung).

1. $y = c \wedge (a \nleftrightarrow b) \wedge \overline{d}$
2. $y = (c \leftrightarrow b) \;\overline{\wedge}\; a$
3. $y = (a \vee \overline{b} \wedge (b \vee \overline{c})) \wedge (\overline{a} \vee \overline{c})$
4. $y = \overline{b}\,\overline{a} \vee c\,b\,a \vee e\,d\,c$

Lösung 4

1. $y = c \wedge (a \not\leftrightarrow b) \wedge \overline{d} \;=\; c(\overline{a}\,b \vee a\overline{b}\,)\overline{d} \;=\; c\overline{a}\,b\overline{d} \vee ca\overline{b}\,\overline{d}$

NAND:
$$\begin{aligned} y &= \overline{\overline{c\overline{a}\,b\overline{d} \vee ca\overline{b}\,\overline{d}}} \;=\; \overline{\overline{c\overline{a}\,b\overline{d}} \wedge \overline{ca\overline{b}\,\overline{d}}} \\ &= \mathrm{NAND}_2\Big(\mathrm{NAND}_4(c, \overline{a}\,, b, \overline{d}\,), \mathrm{NAND}_4(c, a, \overline{b}\,, \overline{d}\,)\Big) \end{aligned}$$

NOR:
$$\begin{aligned} \overline{y} &= \overline{c\overline{a}\,b\overline{d} \vee ca\overline{b}\,\overline{d}} \;=\; \overline{\overline{\overline{c\overline{a}\,b\overline{d}}} \wedge \overline{\overline{ca\overline{b}\,\overline{d}}}} \\ &= \mathrm{NOR}_2\Big(\mathrm{NOR}_4(\overline{c}\,, a, \overline{b}\,, d), \mathrm{NOR}_4(\overline{c}\,, \overline{a}\,, b, d)\Big) \\ y &= \overline{y} \;\overline{\vee}\; \overline{y} \qquad \text{oder:} \quad y = \mathrm{NOR}_2(\overline{y}\,, \overline{y}\,) \end{aligned}$$

2. $y = (c \leftrightarrow b)\overline{\wedge} a \;=\; \overline{(cb \vee \overline{c}\,\overline{b}\,) \wedge a} \;=\; \overline{(cba \vee \overline{c}\,\overline{b}\,a} \;=\; (\overline{c} \vee \overline{b} \vee \overline{a}\,)(c \vee b \vee \overline{a}\,)$

NAND:
$$\begin{aligned} \overline{y} &= \overline{\overline{cba \vee \overline{c}\,\overline{b}\,a}} \;=\; \overline{\overline{cba} \wedge \overline{\overline{c}\,\overline{b}\,a}} \\ &= \mathrm{NAND}_2\Big(\mathrm{NAND}_3(c, b, a), \mathrm{NAND}_3(\overline{c}\,, \overline{b}\,, a)\Big) \\ y &= \overline{y} \;\overline{\wedge}\; \overline{y} \qquad \text{oder:} \quad y = \mathrm{NAND}_2(\overline{y}\,, \overline{y}\,) \end{aligned}$$

NOR:
$$\begin{aligned} y &= \overline{\overline{(\overline{c} \vee \overline{b} \vee \overline{a}\,)(c \vee b \vee \overline{a}\,)}} \;=\; \overline{\overline{(\overline{c} \vee \overline{b} \vee \overline{a}\,)} \vee \overline{(c \vee b \vee \overline{a}\,)}} \\ &= \mathrm{NOR}_2\Big(\mathrm{NOR}_3(\overline{c}\,, \overline{b}\,, \overline{a}\,), \mathrm{NOR}_3(c, b, \overline{a}\,)\Big) \end{aligned}$$

3. $y = (a \vee \overline{b} \wedge (b \vee \overline{c}\,)) \wedge (\overline{a} \vee \overline{c}\,) \;=\; (a \vee \overline{b}\,b \vee \overline{b}\,\overline{c}\,)(\overline{a} \vee \overline{c}\,) \;=\; (a \vee \overline{b}\,\overline{c}\,)(\overline{a} \vee \overline{c}\,)$
$= \; a\overline{a} \vee a\overline{c} \vee \overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a} \vee \overline{b}\,\overline{c}\,\overline{c} \;=\; a\overline{c} \vee \overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a} \vee \overline{b}\,\overline{c} \;=\; a\overline{c} \vee \overline{b}\,\overline{c}$

NAND:
$$\begin{aligned} y &= \overline{\overline{a\overline{c} \vee \overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a} \vee \overline{b}\,\overline{c}}} \;=\; \overline{\overline{a\overline{c}} \wedge \overline{\overline{b}\,\overline{c}}} \\ &= \mathrm{NAND}_2\Big(\mathrm{NAND}_2(a, \overline{c}\,), \mathrm{NAND}_2(\overline{b}\,, \overline{c}\,)\Big) \end{aligned}$$

NOR:
$$\begin{aligned} \overline{y} &= \overline{a\overline{c} \vee \overline{b}\,\overline{c}} \;=\; \overline{\overline{\overline{a\overline{c}}} \vee \overline{\overline{\overline{b}\,\overline{c}}}} \\ &= \mathrm{NOR}_2\Big(\mathrm{NOR}_2(\overline{a}\,, c), \mathrm{NOR}_2(b, c)\Big) \\ y &= \overline{y} \;\overline{\vee}\; \overline{y} \qquad \text{oder:} \quad y = \mathrm{NOR}_2(\overline{y}\,, \overline{y}\,) \end{aligned}$$

4. $y = \overline{b}\,\overline{a} \vee cba \vee edc$

NAND:
$$\begin{aligned} y &= \overline{\overline{\overline{b}\,\overline{a} \vee cba \vee edc}} \;=\; \overline{\overline{\overline{b}\,\overline{a}} \wedge \overline{cba} \wedge \overline{edc}} \\ &= \mathrm{NAND}_3\Big(\mathrm{NAND}_2(\overline{b}\,, \overline{a}\,), \mathrm{NAND}_3(c, b, a), \mathrm{NAND}_3(e, d, c)\Big) \end{aligned}$$

NOR:
$$\begin{aligned} \overline{y} &= \overline{\overline{b}\,\overline{a} \vee cba \vee edc} \;=\; \overline{\overline{\overline{\overline{b}\,\overline{a}}} \vee \overline{\overline{cba}} \vee \overline{\overline{edc}}} \\ &= \mathrm{NOR}_3\Big(\mathrm{NOR}_2(b, a), \mathrm{NOR}_3(\overline{c}\,, \overline{b}\,, \overline{a}\,), \mathrm{NOR}_3(\overline{e}\,, \overline{d}\,, \overline{c}\,)\Big) \\ y &= \overline{y} \;\overline{\vee}\; \overline{y} \qquad \text{oder:} \quad y = \mathrm{NOR}_2(\overline{y}\,, \overline{y}\,) \end{aligned}$$