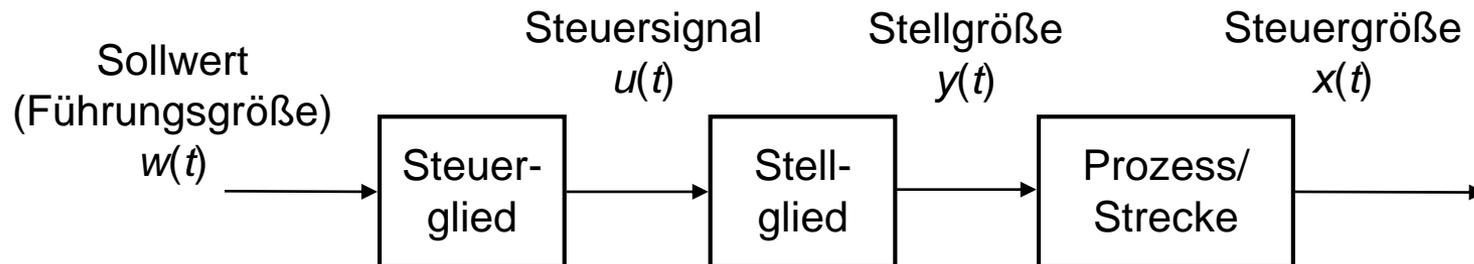


Kapitel 7

Regelungstechnik für Echtzeitsysteme in der Automatisierung

Wirkungskette einer Steuerung

Nach DIN 19226 ist die **Steuerung** definiert: Die Steuerung ist ein Vorgang in einem abgegrenzten System, bei dem eine oder mehrere Größen als Eingangsgrößen andere Größen als Ausgangsgrößen aufgrund der dem System eigenen Gesetzmäßigkeiten beeinflussen.



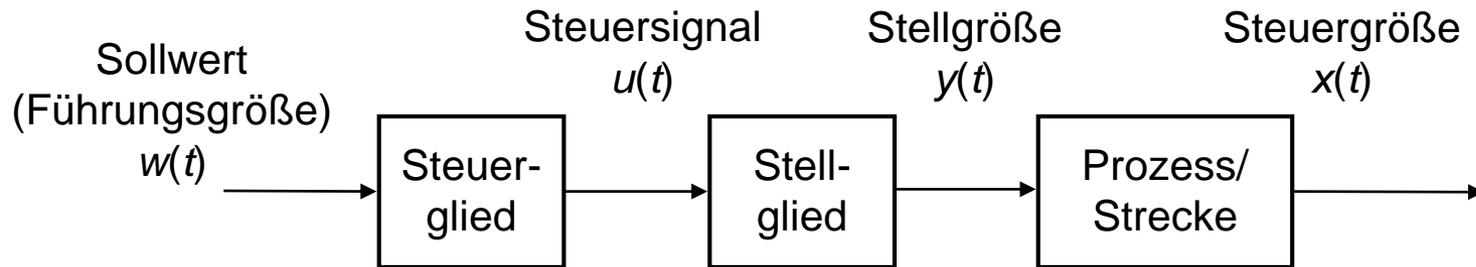
Regelungstechnik automatisiert Vorgänge so, dass ein Zustand eingestellt wird oder erhalten bleibt.

Beispiele

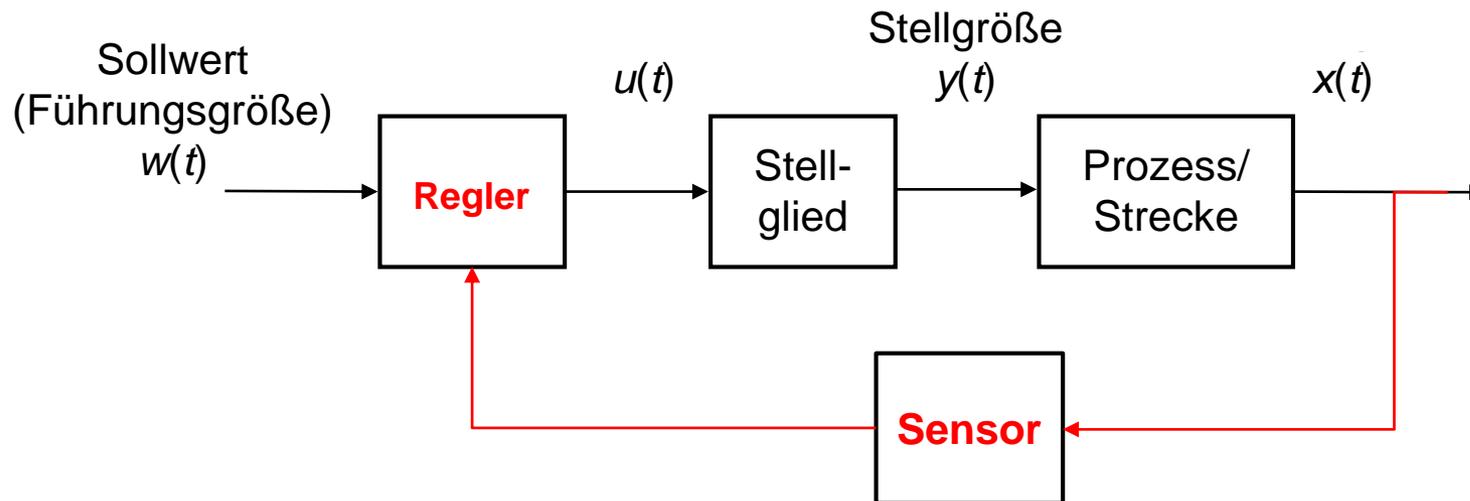
- Tempomat, Abstandsautomatik
- Klimaanlage, Temperaturregelung

Steuerung vs. Regelung

Steuerung:

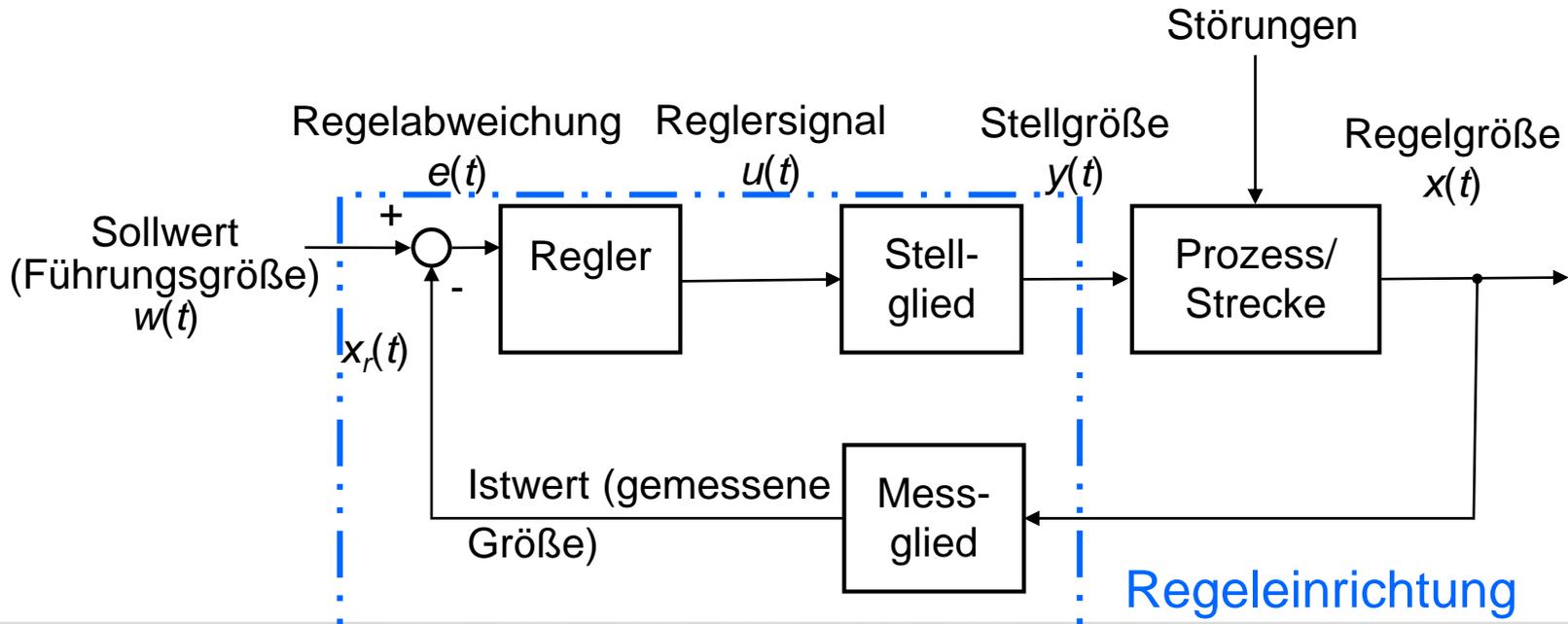


Regelung:

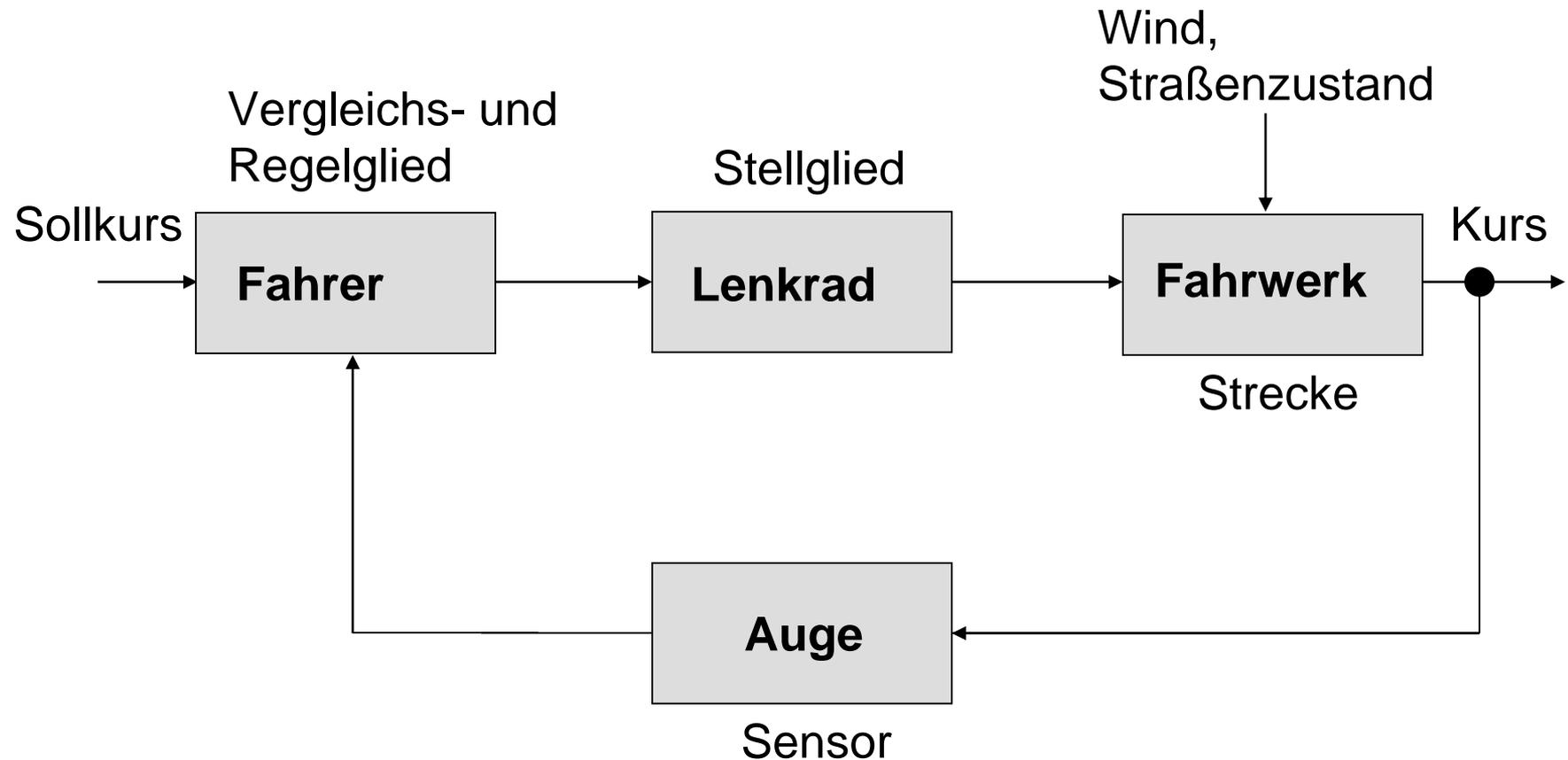


Wirkungskette einer Regelung

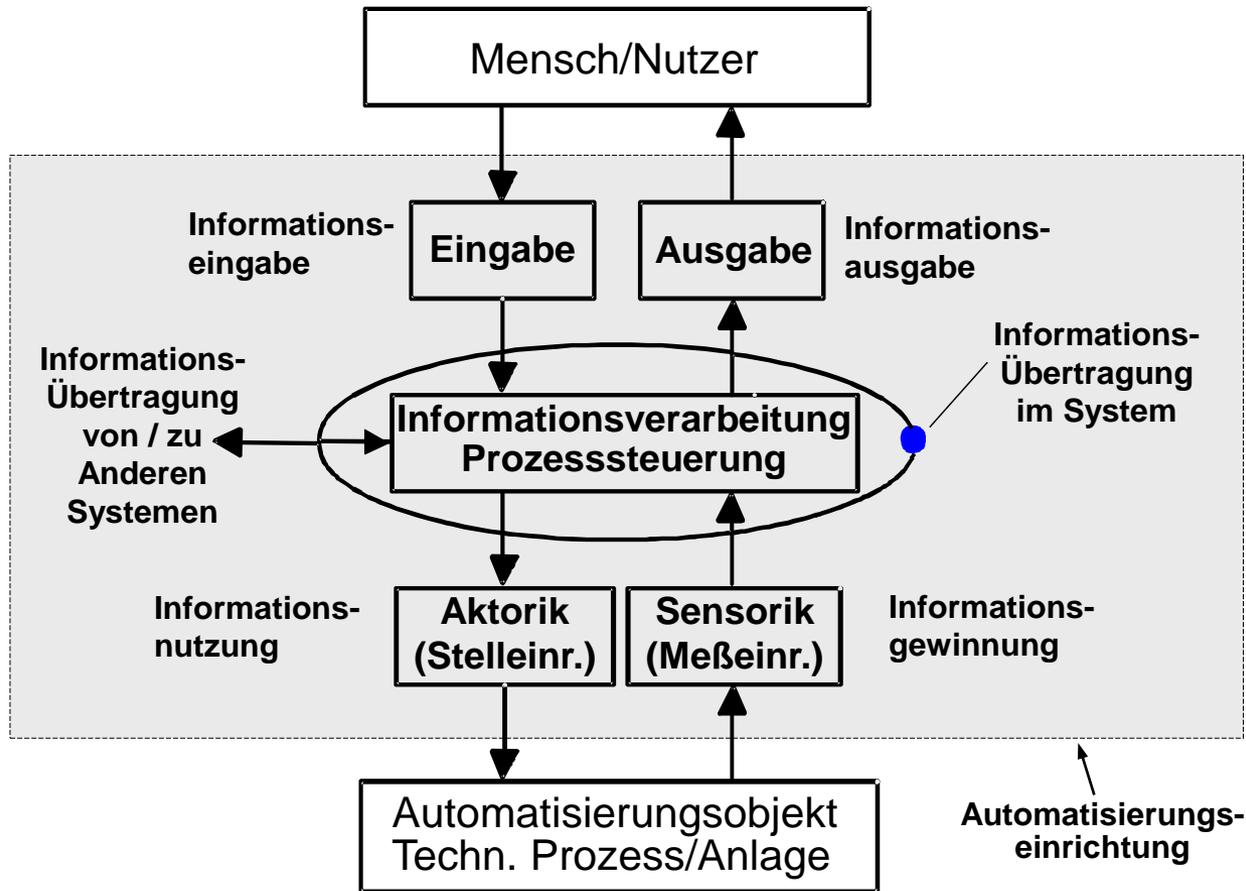
Nach DIN 19226 ist die **Regelung** wie folgt definiert: Die Regelung ist ein technischer Vorgang in einem abgegrenzten System, bei dem eine technische oder physikalische Größe, die sogenannte Regelgröße oder der Istwert, fortlaufend erfasst und durch Vergleich ihres Signals mit dem Signal einer anderen von außen vorgegebenen Größe, der Führungsgröße oder dem Sollwert, im Sinne einer Angleichung an die Führungsgröße beeinflusst wird.



Beispiel: Lenkung eines Autos



Grundprinzip der Automatisierung



Informationsbezogene Funktionalität des Informationsmanagements
(Grundschemata der Automation)

Aufgabenstellungen der Regelungstechnik

Analyse von Regelsyst.

gegeben:

- Strecke (Prozess) und Regler

gesucht:

- Eigenschaften des Systems, z.B.
 - Stabilität
 - Regelgüte
 - Regelparameter

Synthese von Regelsyst.

gegeben:

- Strecke (Prozess)

gesucht:

- Regler, der Stabilität und Regelgüte erfüllt

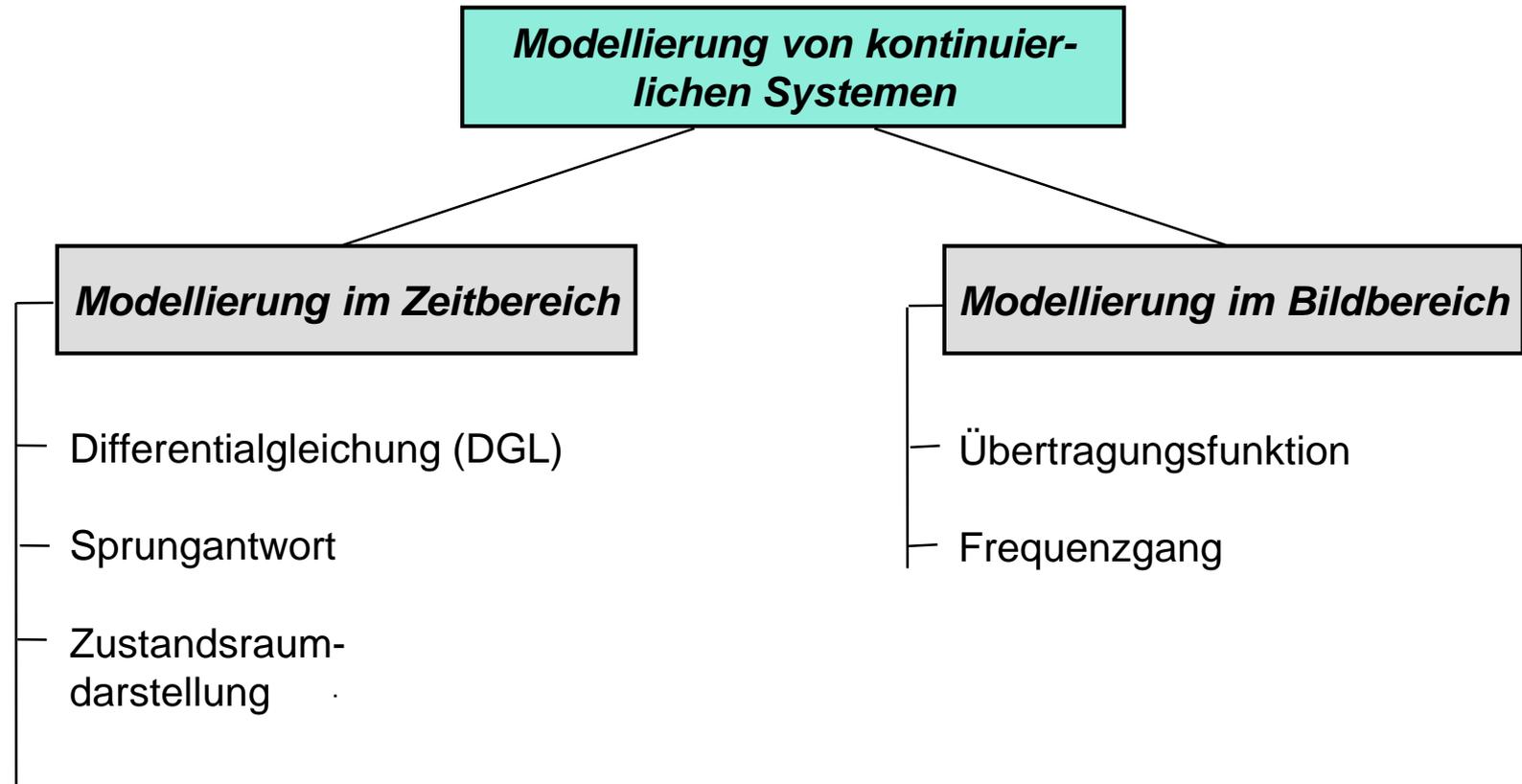
Adaption von Regelsyst.

Identifikation der Strecke

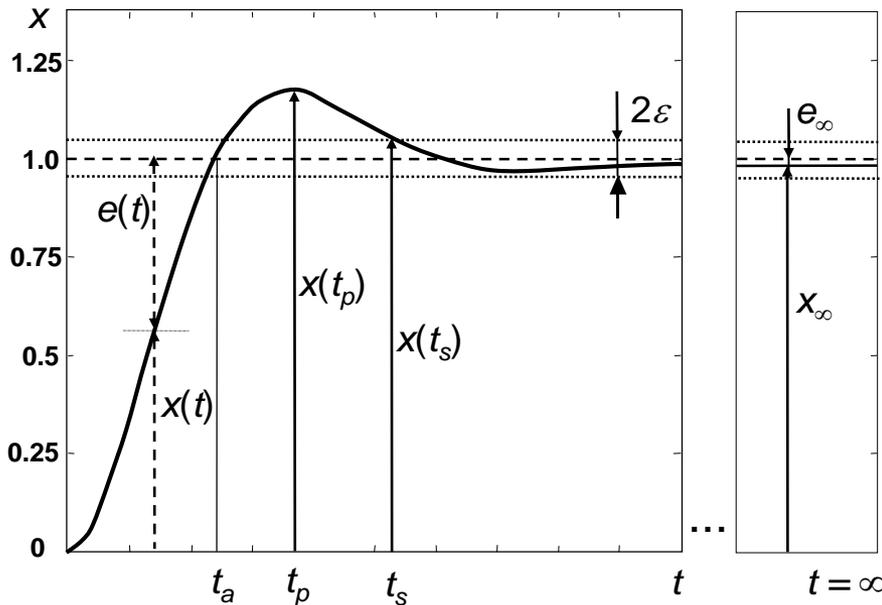
Parameteradaption

- **Mathematische Modellierung** eines Systems (unter Berücksichtigung der statischen und vor allem der dynamischen Eigenschaften)
- Auf der Basis dieses Modells wird das System mit einer technischen Einrichtung versehen (Steuereinheit, **Regler**), die dafür sorgt, dass Ausgangsgrößen einen bestimmten zeitlichen Verlauf annehmen.

Modellierung von kontinuierlichen Systemen



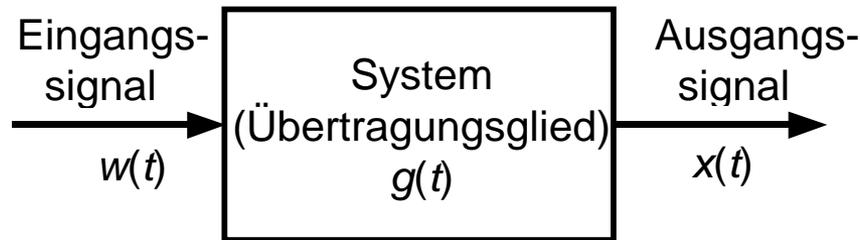
Die wichtigsten Kenngrößen der Sprungantwort sind:



- die **Anregelzeit** t_a (rise time: 0–100 %) ist der Zeitpunkt, bei dem die Ausgangsgröße $x(t)$ zum ersten mal den Sollwert (hier $x=1$) erreicht.
- die **Ausregelzeit** (settling time) t_s kennzeichnet den Zeitpunkt, ab dem der Absolutbetrag der Abweichung vom stationären Wert $x(\infty)$ kleiner als e ist. Normalerweise wird $e = 0.05$ von $x(\infty)$ angenommen.
- die **Überschwingweite/Überschwinghöhe** (peak overshoot) M_p entspricht den maximalen Wert $x(t_p)$ der Sprungantwort relativ zum stationären Wert $x(\infty)$.
- die **bleibende Regeldifferenz** (system error) ist $e_\infty = 1 - x(\infty)$.

Ein System wird durch ein mathematisches Modell beschrieben:

- bei kontinuierlichen Signalen
 - Differentialgleichungen
- bei diskreten Signalen
 - Differenzgleichungen



Differenzialgleichung n -ter Ordnung
im Zeitbereich

$$F(x^{(n)}, \dots, x, w^{(m)}, \dots, w, t) = 0$$

lineare Differenzialgleichung:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = b_0 w^{(m)} + b_1 w^{(m-1)} + \dots + b_m w$$

Anfangsbedingungen:

$$x(t=0) = x_0, \quad \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0, \quad \dots, \quad x^{(n)}(t=0) = x_0^{(n)}$$

Existenzbedingung (Kausalität): $m \leq n$

Lösung der homogenen linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$x_h(t) = C_k e^{\lambda_k t} = C_k e^{(\delta_k + i\omega_k)t} = C_k e^{\delta_k t} (\cos \omega_k t + i \sin \omega_k t)$$

Systembeschreibung (Modellierung) mit Differentialgleichungen

Beispiel: Feder, Dämpfer, Masse

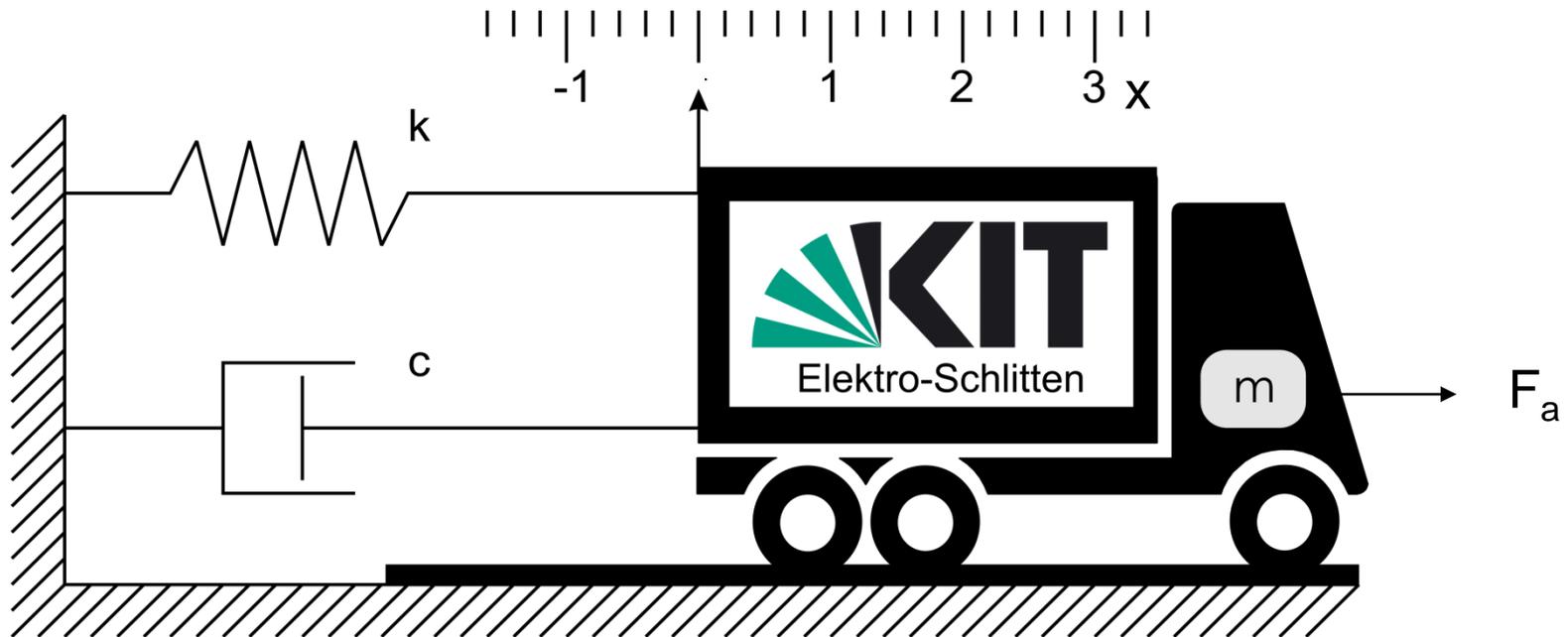
LKW mit Masse m und Zugkraft F_a

Eingangs-/Stellgröße: F_a

Feder mit Steifigkeit k

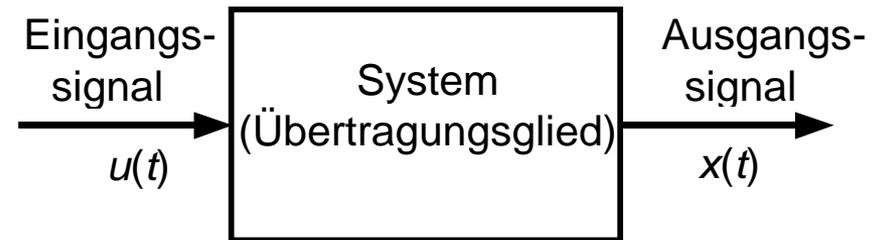
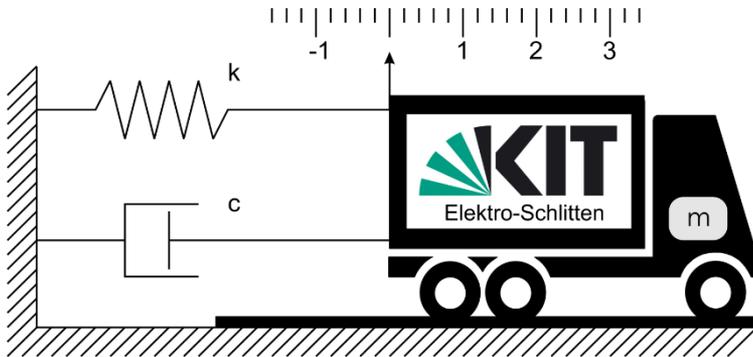
Ausgangs-/Regelgröße: x

Dämpfer mit Koeffizient c



Systembeschreibung (Modellierung) mit Differentialgleichungen

Beispiel: Feder, Dämpfer, Masse



Systembeschreibung (Modellierung) mit Differentialgleichungen

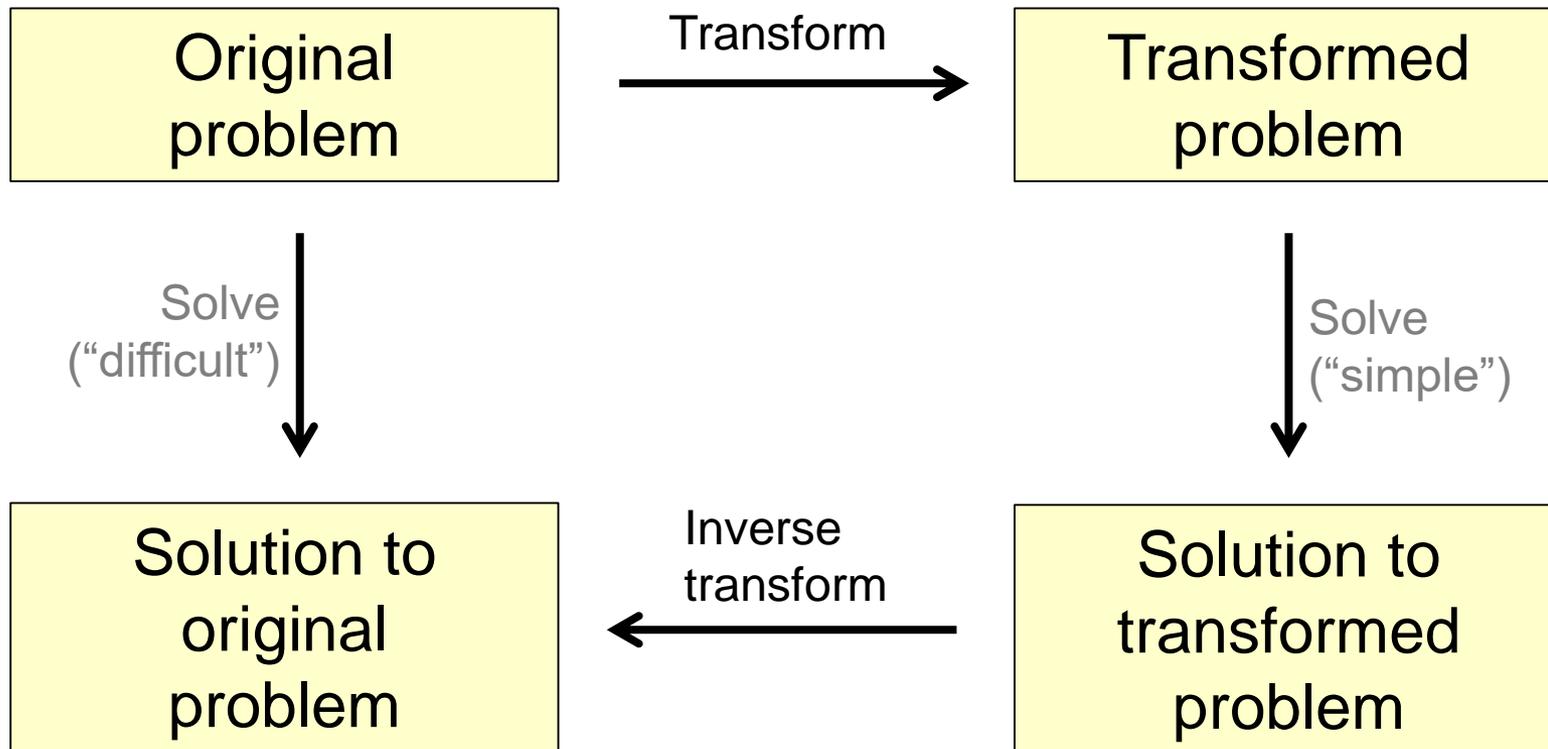
Beispiel: Feder, Dämpfer, Masse

**Einfachere Beschreibung?
→ Transformationen!**

Laplace-Transformation

Time Domain

Frequency Domain



Für kontinuierliche Signale:

- Periodisches Signal
 - Verwendung der Fourier-Reihe
- Allgemeine nichtperiodische Signale
 - Fourier-Integral (Fourier-Transformation)
 - **Laplace-Transformation**

Für diskrete Signale:

- Diskrete Fourier-Transformation (DFT)
- Fast Fourier-Transformation (DFT)
- **z-Transformation**

The Laplace Transform

- A differential equation involving an unknown function $f(t)$ and its derivatives is said to be *initial-valued* if the values $f(t)$ and its derivatives are given for $t = 0$. These initial values are used to evaluate the integration constants that appear in the solution to the differential equation.
- The Laplace transform is employed to solve certain initial-valued differential equations. The method uses algebra rather than the calculus and incorporates the values of the integration constants from the beginning.

Why Laplace Transform?

- Find solution to differential equation using algebra
- Relationship to Fourier Transform allows easy way to characterize systems
- No need for convolution of input and differential equation solution
- Useful with multiple processes in system

The Laplace Transform

Given a function $f(t)$ defined for values of the variable $t > 0$ then the Laplace transform of $f(t)$, denoted by:

$$L\{f(t)\}$$

is defined to be:

$$L\{f(t)\} = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Where s is a variable whose values are chosen so as to ensure that the semi-infinite integral converges.

Definition der Laplace-Transformation

$$X(s) = \mathcal{L} \{x(t)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-0}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

- Erweiterung der Fouriertransformation
- absolute Integrierbarkeit nicht vorausgesetzt

komplexe Frequenz

$$s = \sigma + j\omega$$

- Bedingung

$$x(t < 0) \equiv 0$$

$$x(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad X(s)$$

Definition der Laplace-Transformation

Definition

Die Laplace Transformation $L\{ f(t) \}$ ordnet jeder zeitabhängigen Funktion $f(t)$ eine komplexe Funktion $F(s)$ eindeutig zu. Sie ist definiert durch das Laplace-Intregral:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

wobei $s = \rho + j \omega$ (mit Realteil ρ und Imaginärteil ω) eine komplexe Variable ist.

Laplace-Rücktransformation

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int e^{st} F(s) ds$$

Regeln

Linearität:

$$c f(t) + d g(t) \leftrightarrow c F(s) + d G(s)$$

Differenzierung:

$$f'(t) \leftrightarrow s F(s) - f(+0)$$

Integration:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow F(s) / s$$

Definition der Laplace-Transformation

Definition

Die Laplace Transformation $L\{f(t)\}$ ordnet jeder zeitabhängigen Funktion $f(t)$ eine komplexe Funktion $F(s)$ eindeutig zu. Sie ist definiert durch das Laplace-Integral:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

wobei $s = \rho + j\omega$ (mit Realteil ρ und Imaginärteil ω) eine komplexe Variable ist.

Laplace-Rücktransformation

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int e^{st} F(s) ds$$

Regeln

Linearität:

$$c f(t) + d g(t) \leftrightarrow c F(s) + d G(s)$$

Besonders wichtig!

Differenzierung:

$$f'(t) \leftrightarrow s F(s) - f(+0)$$

Integration:

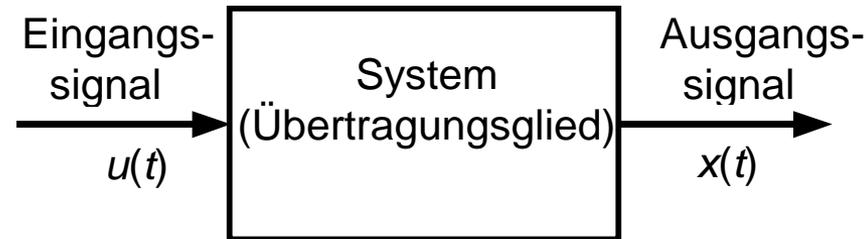
$$\int_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow F(s) / s$$

Die Laplace-Übertragungsfunktion

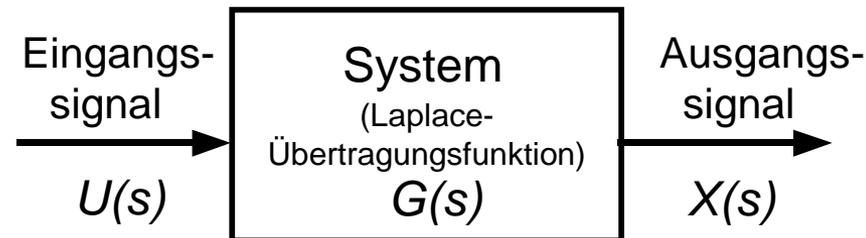
Ausgangspunkt: Differentialgleichung (s. Beispiel Feder-Masse-Dämpfer)

Ergebnis: Laplace-Übertragungsfunktion

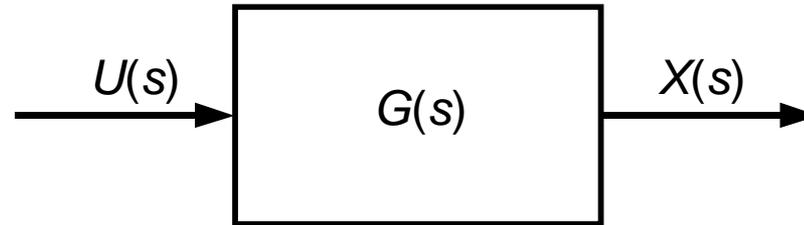
Die Laplace-Übertragungsfunktion



Wird zu:



Blockschaltbilddarstellung eines Systems im Bildbereich



Die Laplace -Transformierte der linearen Differenzialgleichung

$$x^{(n)} + \dots + a_n x = b_0 u^{(m)} + \dots + b_m u$$

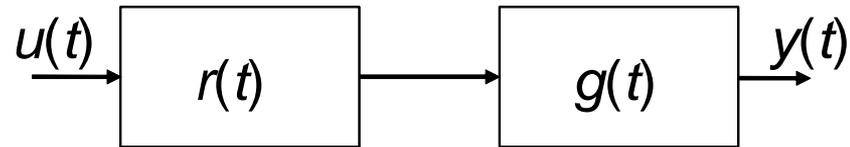
ist : $(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) X(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m) U(s)$

Die komplexe **Übertragungsfunktion** :

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = b_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s - \mu_i)}{\prod_{j=1}^n (s - \lambda_j)}$$

„Reihenschaltung“ von Systemen

Zeitbereich:

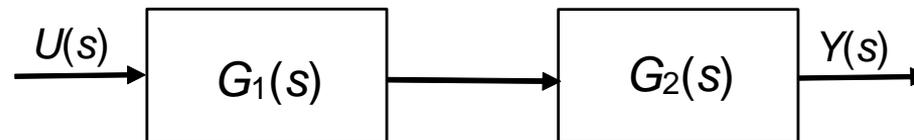


$$x(t) = \int_0^t h(t - \tau) \cdot w(\tau) d\tau, \text{ wobei}$$

$$h(t) = \int_0^t r(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau$$

**Faltung wird zu
Multiplikation!**

Bildbereich:



$$X(s) = [G_2(s) \cdot G_1(s)] \cdot W(s)$$

Korrespondenztabelle (Beispiel)

Zeitbereich	Bildbereich
$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-t_0 s}, t_0 > 0$
1 bzw. $\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}, n = 0, 1, \dots$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}, \alpha \text{ beliebig}$
$t \cdot e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s - \alpha)^2}$

In der Praxis oft
einfacher als
"händische"
Transformation!

Laplace Transformation (4)

Zeitbereich	Bildbereich
$\frac{t^n}{n!} \cdot e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s - \alpha)^{n+1}}$
$\frac{1}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{1 + Ts}$
$1 - e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{s(1 + Ts)}$
$\frac{t}{T^2} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{(1 + Ts)^2}$
$t - T \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}})$	$\frac{1}{s^2(1 + Ts)}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{\omega} \sin \omega t$	$\frac{1}{s^2 + \omega^2}$

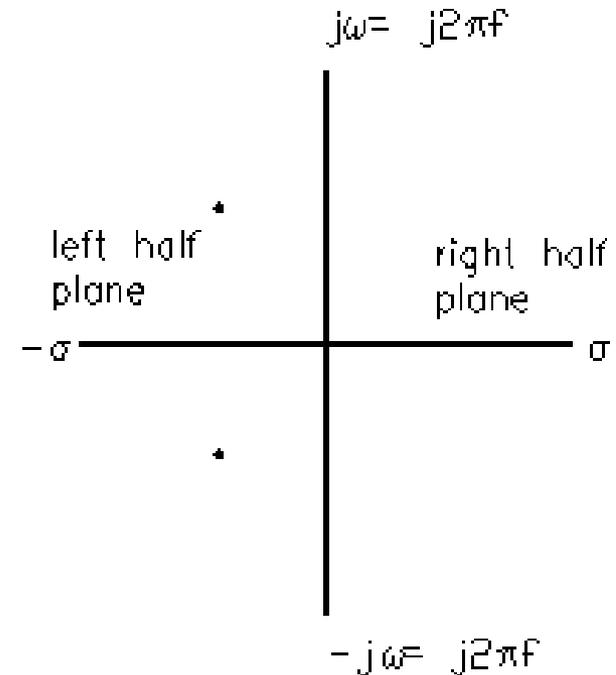
Falls in der Klausur
eine Tabelle nötig ist,
wird diese gegeben!

Laplace-Transformation und komplexe Zahlenebene

Die Laplace-Variable s ist eine komplexe Zahl.
Man nennt sie auch **komplexe Frequenz**.

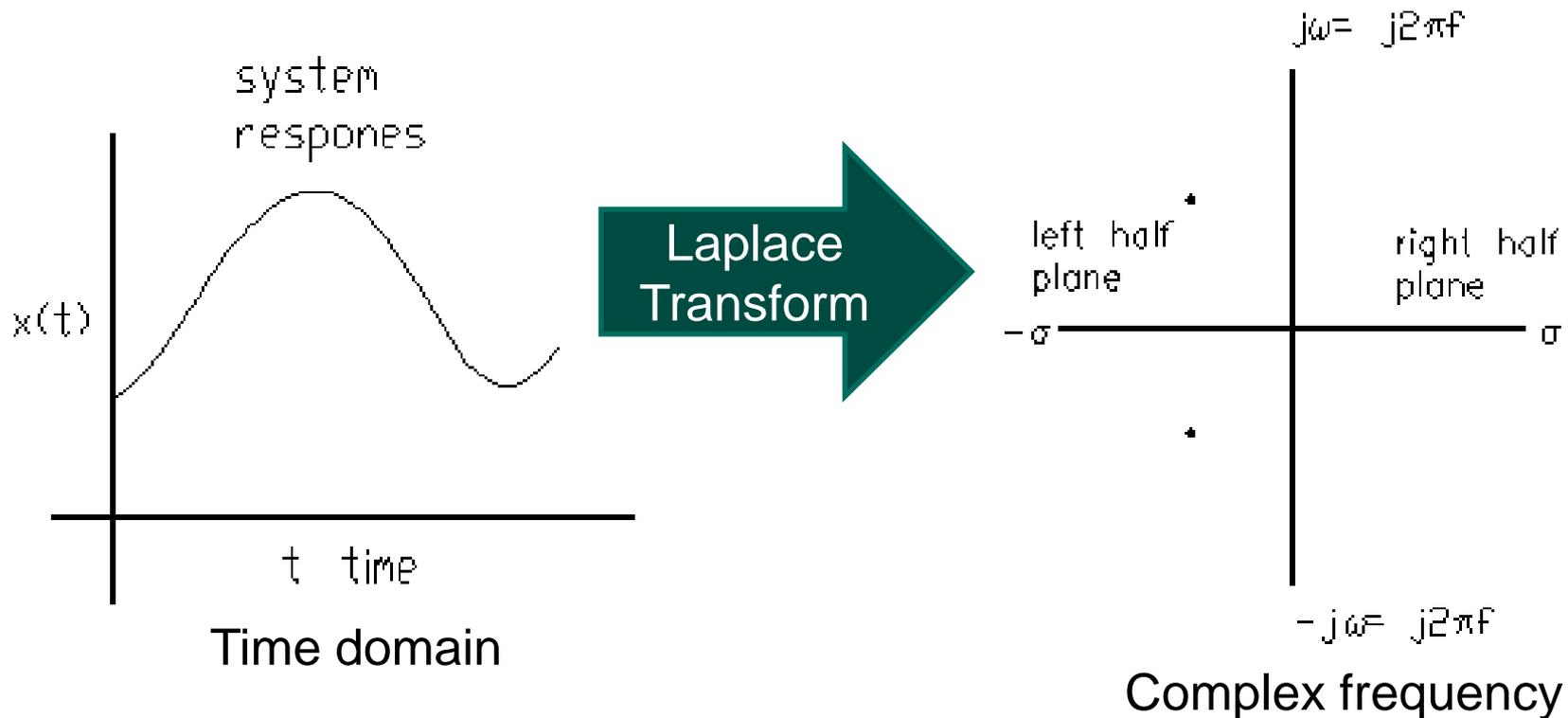
$$s = \sigma + j\omega$$

Laplace-Variablen können also in einer **komplexen Zahlenebene** dargestellt werden.
(Diese Darstellungsform werden wir später in der Vorlesung noch brauchen.)



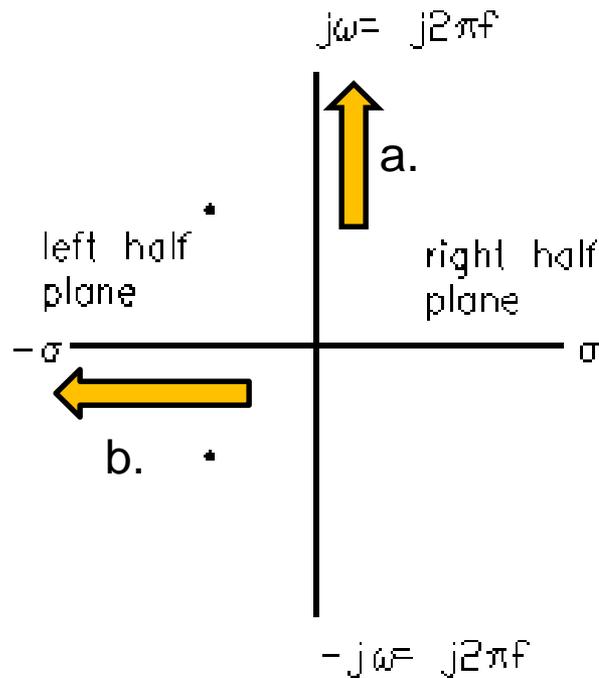
Hier: keine weitere Herleitung oder
mathematische Hintergründe
Bei Interesse siehe
Literaturhinweise

Laplace transform converts time domain problems into functions of a complex variable, s , that is related to the frequency response of the system



Zusatzfolie

Complex frequency combines transient response with sinusoidal steady-state response to get total response of system to input



$$s = \sigma + j\omega$$

Complex Frequency

$\sigma =$ exponential decay/increase constant that is related to time constants of systems transient response ($RC = L/R = \sigma$ in circuit analysis).

- a.) Higher frequency
- b.) Faster time constants

$e^{\sigma t}$ Exponentially increasing function over time
 $e^{-\sigma t}$ Exponentially decreasing function over time

Zusatzfolie

The radian frequency $\omega = j2\pi f$ same frequency used in phasor analysis

Laplace related to sine response through Euler's Identity. Euler's relates complex exponentials to sine and cosine time functions

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \cdot \sin(\omega t)$$

Adding and subtracting the above relationships gives the exponential forms of sine and cosine

Add the identities

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} &= \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t} &= \cos(\omega t) - j \cdot \sin(\omega t) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} e^{j\omega t} \\ e^{-j\omega t} \end{aligned}} \right\} +$$

$$e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = 2 \cdot \cos(\omega t)$$

$$\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \cos(\omega t)$$

Exponential form of Cosine

Subtract the identities

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} &= \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t} &= \cos(\omega t) - j \cdot \sin(\omega t) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} e^{j\omega t} \\ e^{-j\omega t} \end{aligned}} \right\} -$$

$$e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} = 2j \cdot \sin(\omega t)$$

$$\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \sin(\omega t)$$

Exponential form of Sine

Since $e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}$

Laplace can give complete response: dc transient and steady-state sinusoidal

Time Domain Function

Laplace Domain Function

$\delta(t)$ Impulse



$\mathbf{1}$

$u_s(t)$ Unit Step



$\frac{1}{s}$

e^{-at}



$\frac{1}{s+a}$

e^{at}



$\frac{1}{s-a}$

$\sin(\omega t)$



$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

$\cos(\omega t)$



$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

t Linear ramp (slope 1)



$\frac{1}{s^2}$

Note: time functions multiplied by constants give Laplace function multiplied by constant

Examples:

$$5 \cdot u_s(t) \rightarrow \frac{5}{s}$$

$$3 \cdot \sin(4t) \rightarrow 3 \cdot \left(\frac{4}{s^2 + 16} \right) \quad \omega = 4$$

Videoquellen:

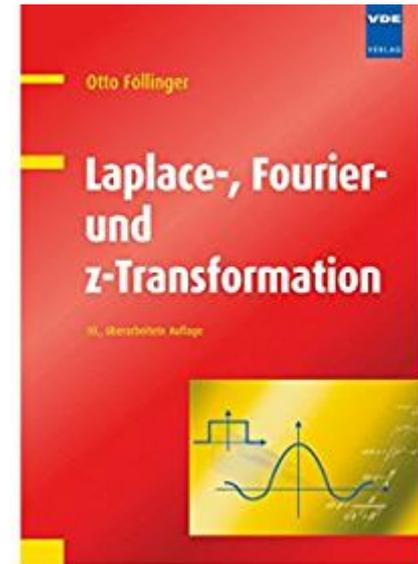
<https://www.khanacademy.org/math/differential-equations/laplace-transform/laplace-transform-tutorial/v/laplace-transform-1>

Literatur

Otto Föllinger: Laplace-, Fourier- und
z-Transformation

VDE-Verlag, 2011

ISBN 978-3-8007-3257-9



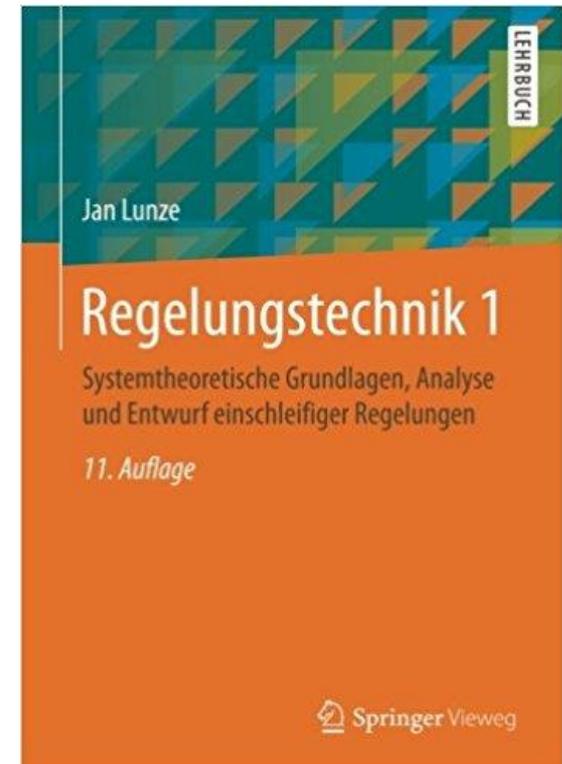
Literature

Jan Lunze

Regelungstechnik 1: Systemtheoretische
Grundlagen, Analyse und Entwurf
einschleifiger Regelungen

Springer, 2016

ISBN: 978-3662526774



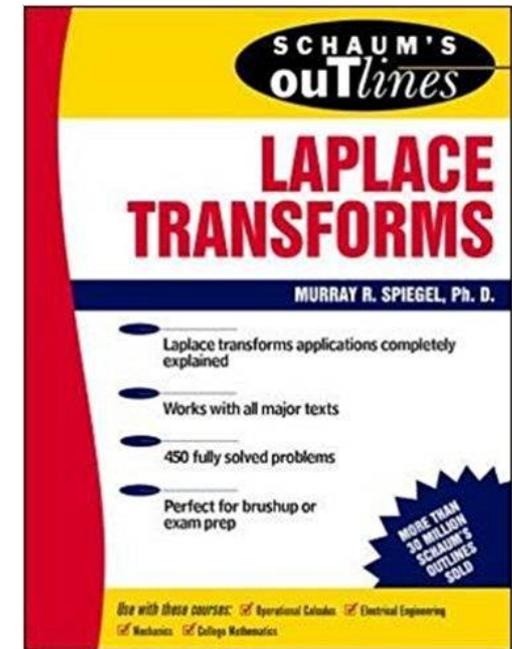
Literature

Murray R. Spiegel

Schaum's Outlines: Laplace Transforms

McGraw-Hill Education, 1965

ISBN: 978-0070602311



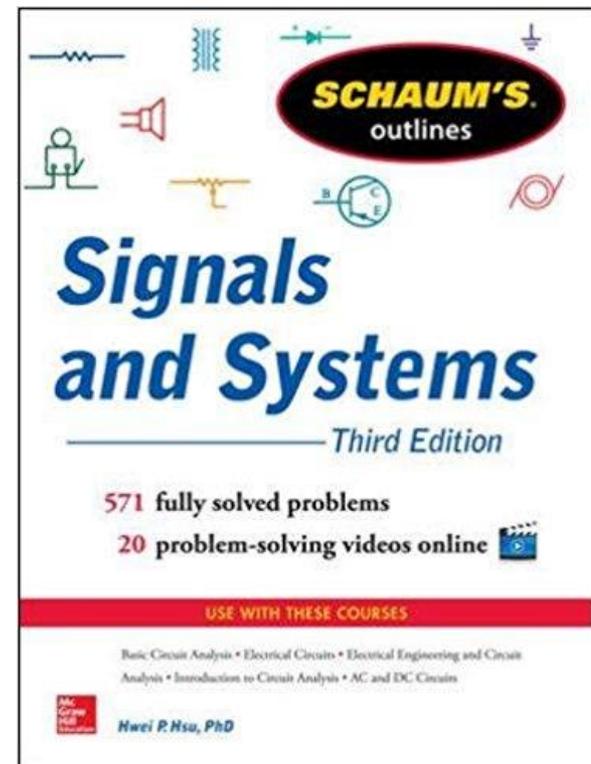
Literature

Hwei Hsu

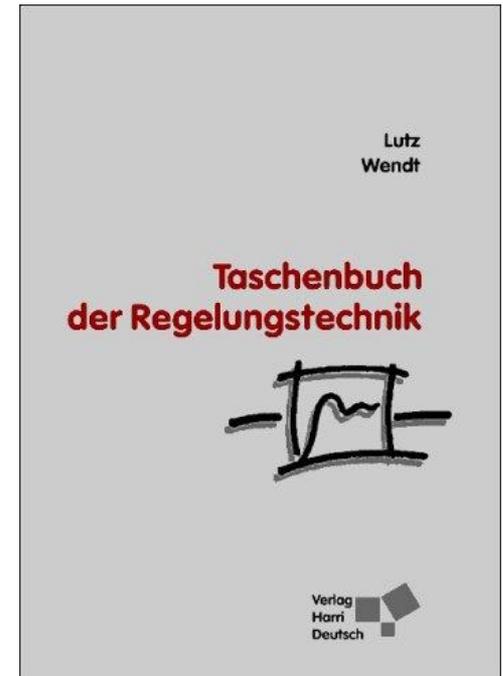
Schaum's Outline of Signals and
Systems

McGraw-Hill Education, 2013

ISBN: 978-0071829465

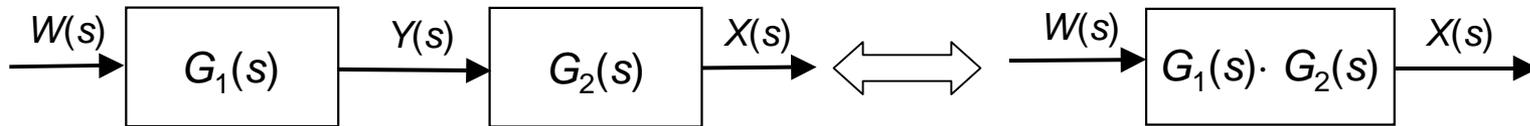


Holger Lutz und Wolfgang Wendt
Taschenbuch der Regelungstechnik
Harri Deutsch, 2014
ISBN: 978-3817117499



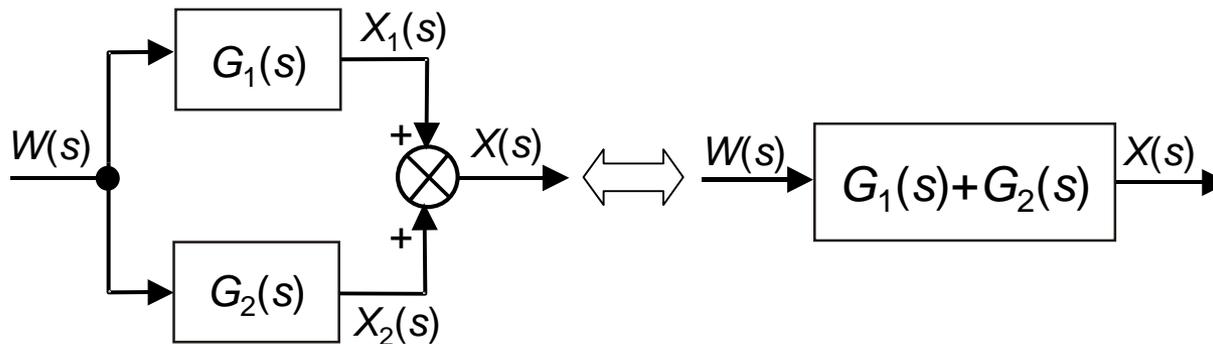
Umformungsregeln der Gesamtübertragungsfunktion (1)

1) **Reihenschaltung** von zwei Blöcken im Bildbereich:



$$\left. \begin{array}{l} X(s) = G_2(s) \cdot Y(s) \\ Y(s) = G_1(s) \cdot W(s) \end{array} \right\} \Rightarrow X(s) = [G_2(s) \cdot G_1(s)] \cdot W(s)$$

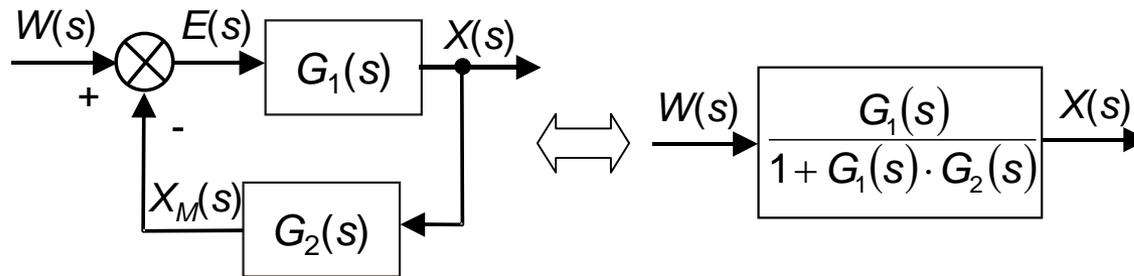
2) **Parallelschaltung** (Addierschaltung) von zwei Blöcken im Bildbereich:



$$\left. \begin{array}{l} X_1(s) = G_1(s) \cdot W(s) \\ X_2(s) = G_2(s) \cdot W(s) \end{array} \right\} \Rightarrow X(s) = X_1(s) + X_2(s) = [G_1(s) + G_2(s)] \cdot W(s)$$

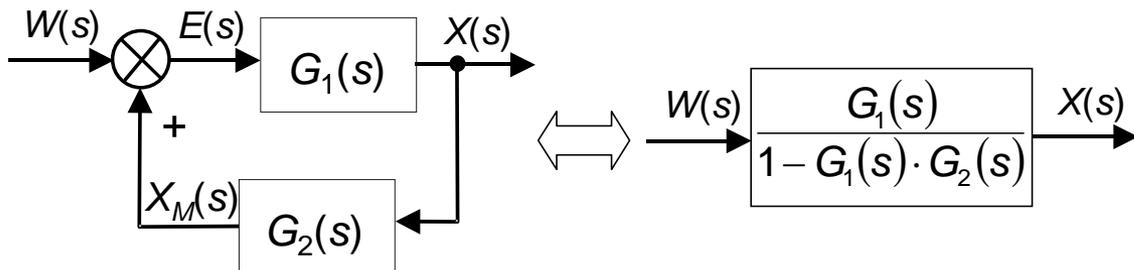
Umformungsregeln der Gesamtübertragungsfunktion (2)

3) Rückkopplung (Gegenkopplung) von zwei Blöcken:



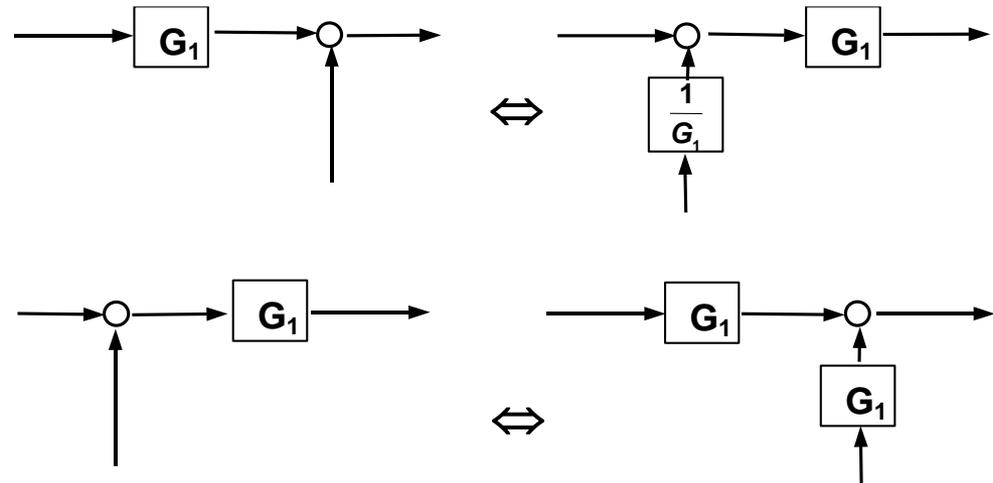
$$\left. \begin{array}{l} X = G_1 \cdot E \\ E = W - X_M \\ X_M = G_2 \cdot X \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} X = G_1 \cdot (W - G_2 \cdot X) \\ (1 + G_1 \cdot G_2) \cdot X = G_1 \cdot W \end{array} \right\} \Rightarrow X(s) = \left[\frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)} \right] \cdot W(s)$$

4) Rückkopplung (Mitkopplung):

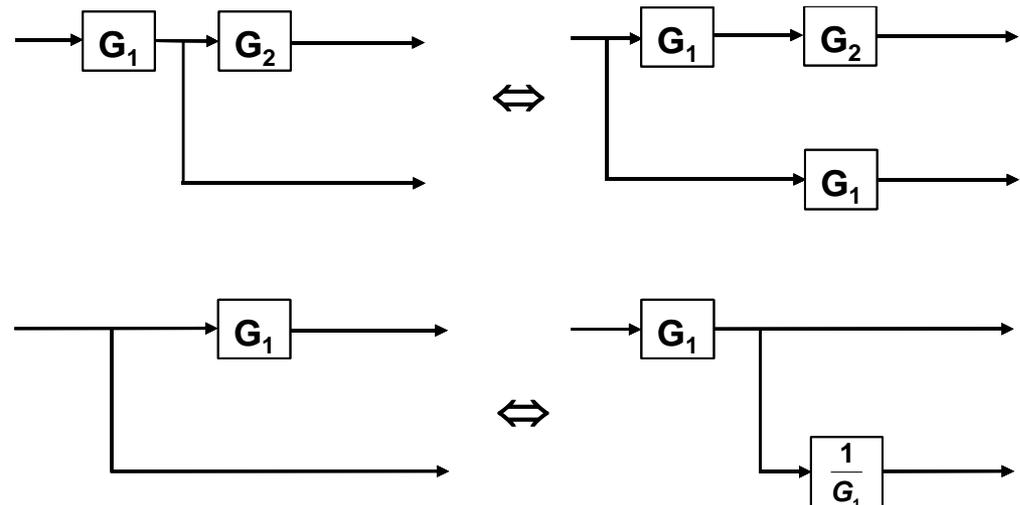


Umformungsregeln der Gesamtübertragungsfunktion (3)

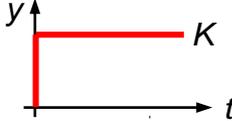
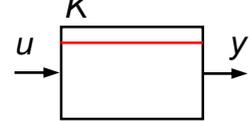
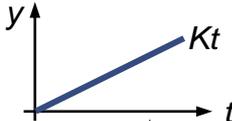
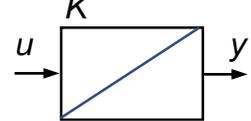
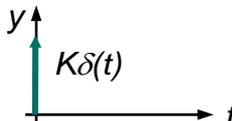
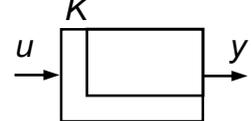
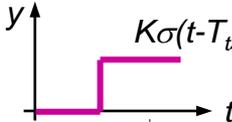
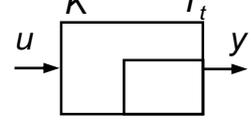
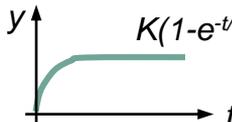
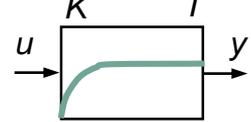
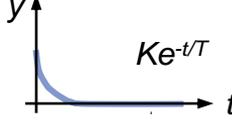
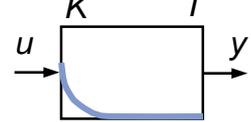
5) **Verschiebung** der Summationsstellen:



6) **Verschiebung** der Verzweigungsstellen:



Häufig genutzte elementare Übertragungsglieder

Benennung	Differentialgleichung $y(t) = f(t)$	Übertragungsfunktion $F(s)$	Sprungantwort	Symbol
P - Glied	$y = K u$	K		
I - Glied	$y = K \int_0^t u(r) dr$	$\frac{K}{s}$		
D - Glied	$y = K \dot{u}$	$K s$		
TZ - Glied (T_t - Glied)	$y(t) = K u(t - T)$	$K e^{-T_t s}$		
VZ ₁ - Glied (PT ₁ - Glied)	$T \dot{y} + y = K u$	$\frac{K}{1 + Ts}$		
VD ₁ - Glied (DT ₁ - Glied)	$T \dot{y} + y = K T \dot{u}$	$\frac{K T s}{1 + Ts}$		

Weitere Beschreibungsformen für dynamische Systeme

(neben der Laplace-Übertragungsfunktion)

- Sprungfunktion
- Impulsfunktion
- Frequenzgang
- Ortskurve
- Bode-Diagramm
- Pol-Nullstellen-Diagramm

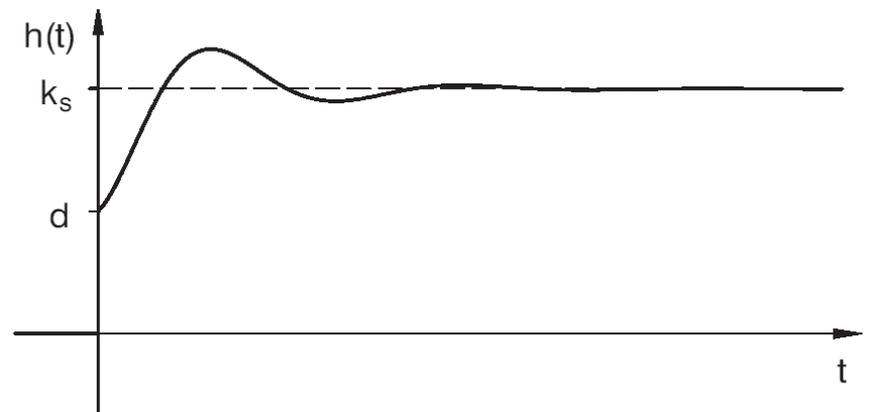
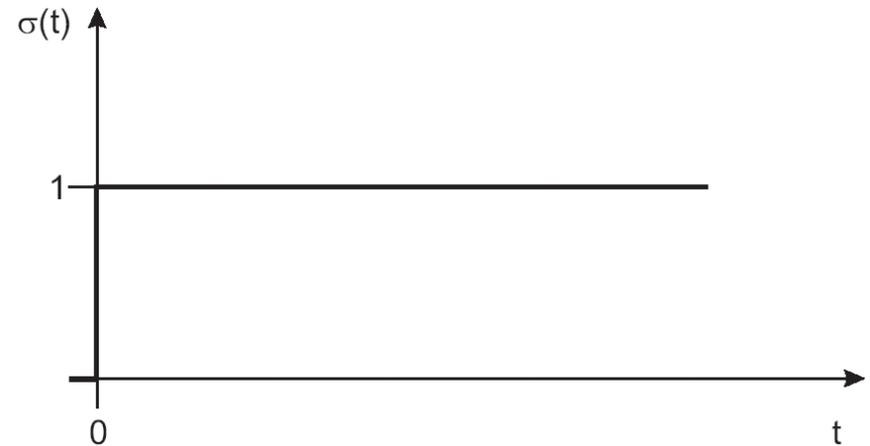
Sprungfunktion

Die Charakterisierung linearer dynamischer Systeme erfolgt durch Testsignale.

Sprungfunktion $\sigma(t)$ mit Sprungantwort $h(t)$

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \sigma(t) \quad \text{○} \text{---} \text{●} \quad X(s) = \frac{1}{s}$$



Impulsfunktion (Dirac-Impuls)
 $\delta(t)$ mit Impulsantwort $g(t)$

Distribution:

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

$$\text{mit } \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} \delta(\tau) f(\tau) d\tau = f(0)$$

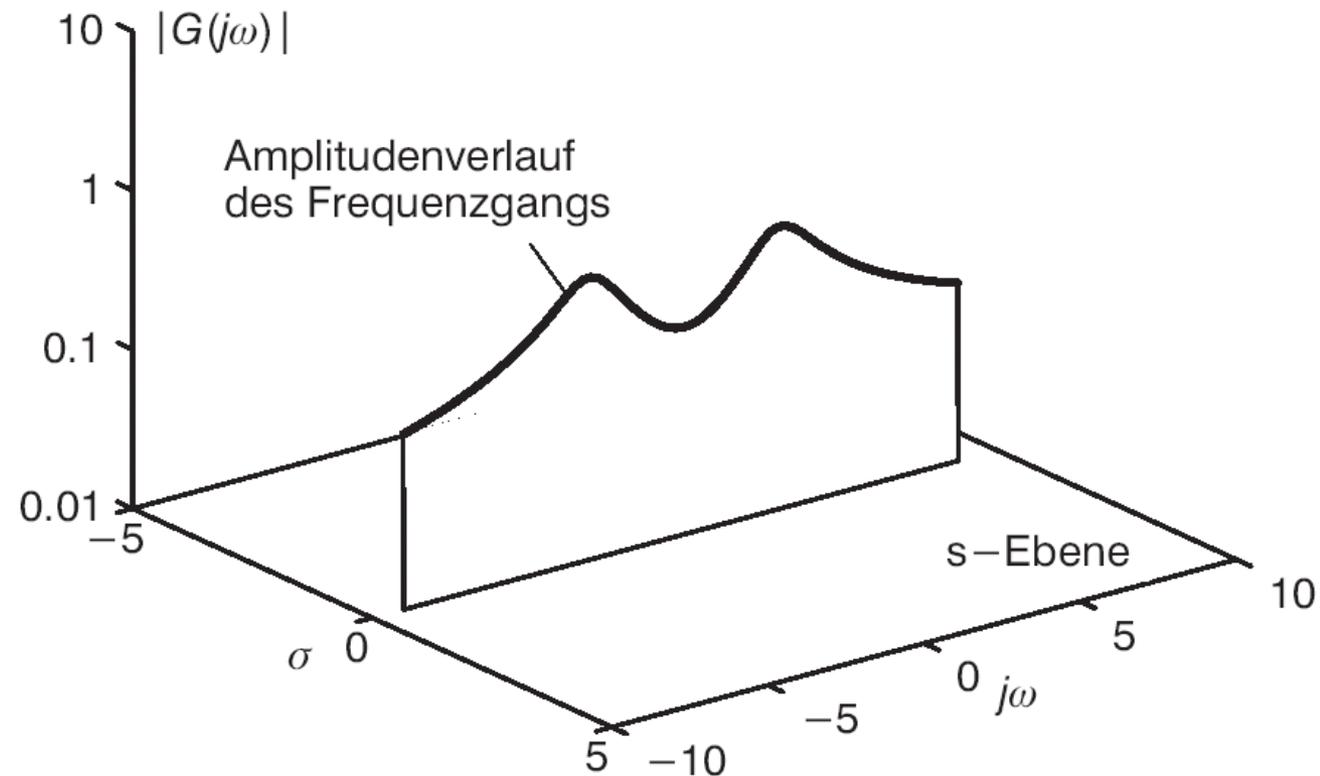
$$x(t) = \delta(t) \quad \text{---} \quad X(s) = 1$$



Frequenzgang

$$G(j\omega) = \mathbf{Re}\{G(j\omega)\} + j\mathbf{Im}\{G(j\omega)\}$$

Liefert Real- und
Imaginärteil der
Systemantwort

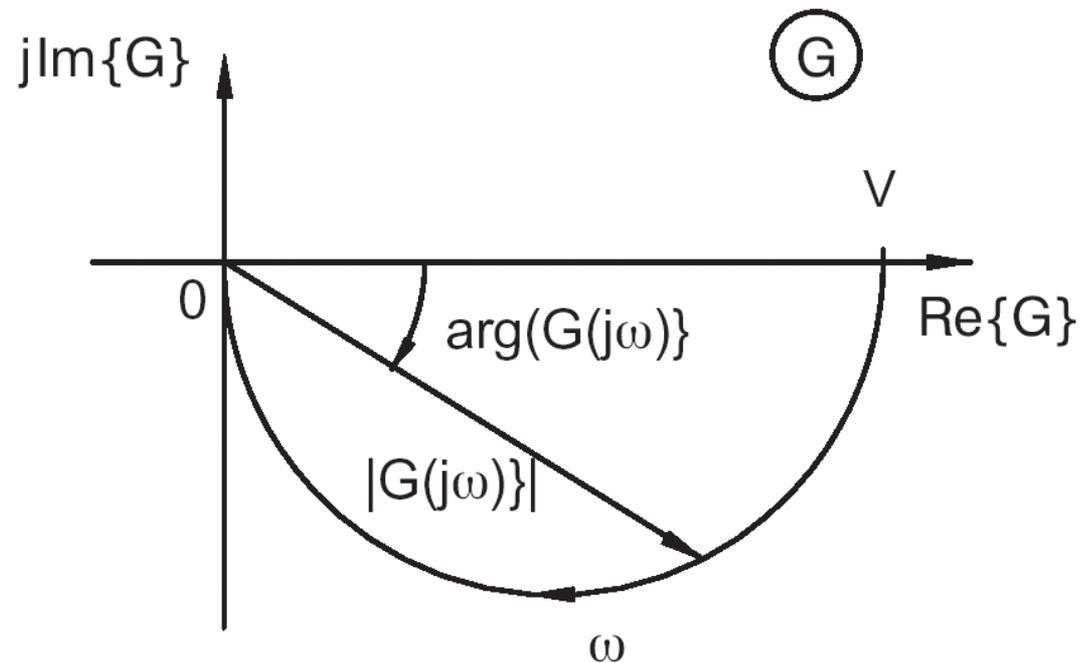


Grafische Darstellung des Frequenzgangs in der komplexen Ebene.

$$G(s) = \frac{V}{T_1 s + 1} = \frac{b_0}{s + a_0}$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{b_0}{j\omega + a_0}$$

$$G(j\omega) = \mathbf{Re}\{G(j\omega)\} + j\mathbf{Im}\{G(j\omega)\}$$



Bode-Diagramm

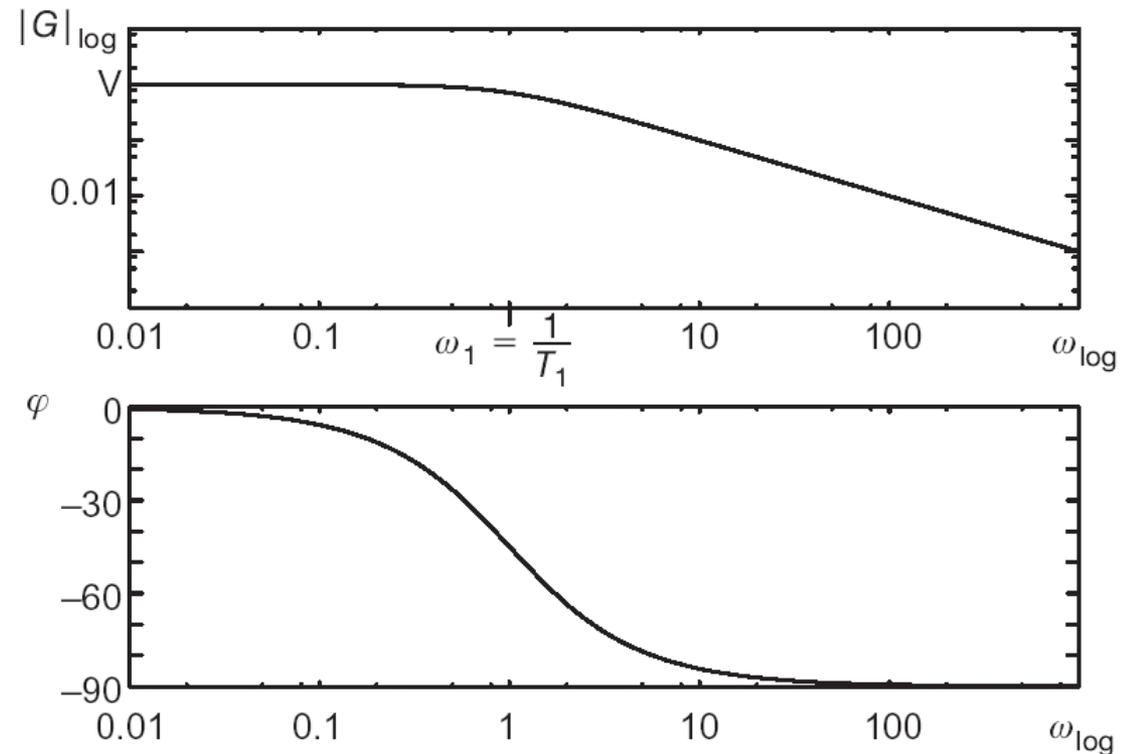
Teilung des Frequenzgangs
nach Betrag und Phase

$$G(j\omega) = \mathbf{Re}\{G(j\omega)\} + j\mathbf{Im}\{G(j\omega)\}$$

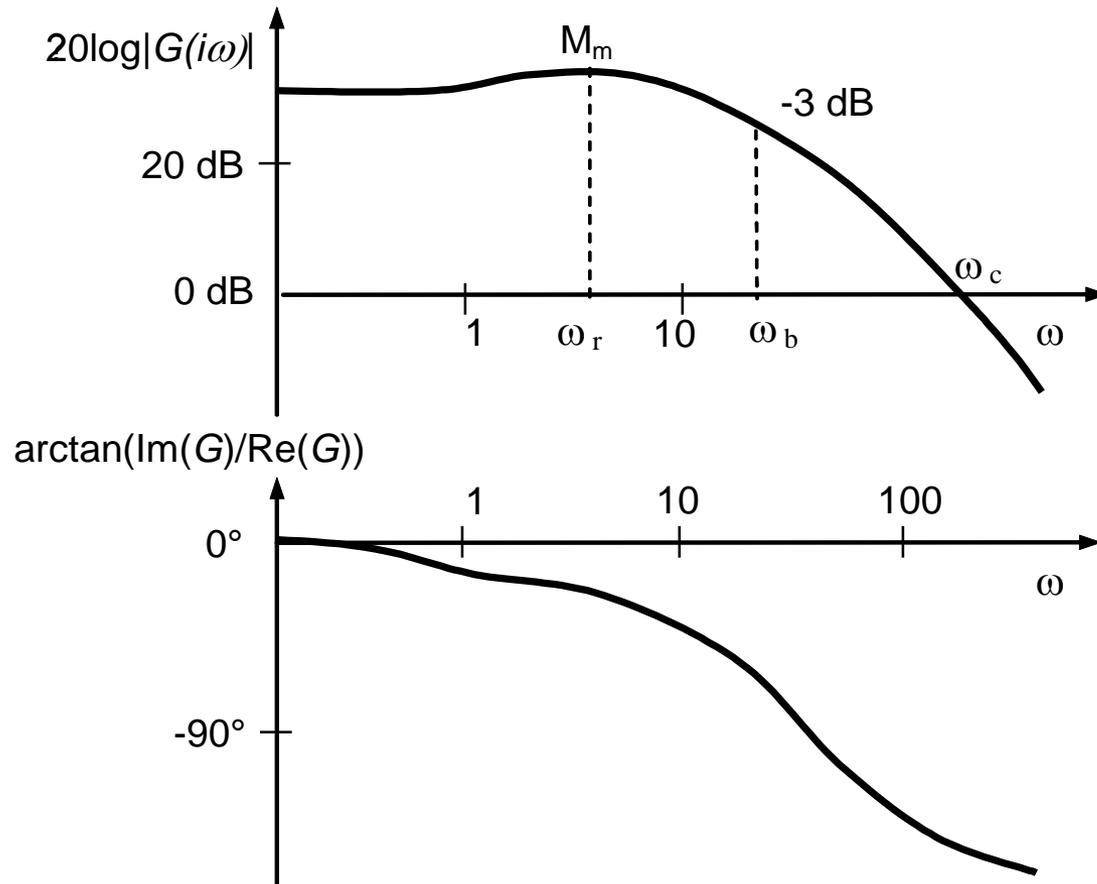
$$G(s) = \frac{V}{T_1 s + 1} = \frac{b_0}{s + a_0}$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{arg(G(j\omega))}$$

ω wird logarithmisch
aufgetragen



Ein Bode-Diagramm eines offenen Regelkreises

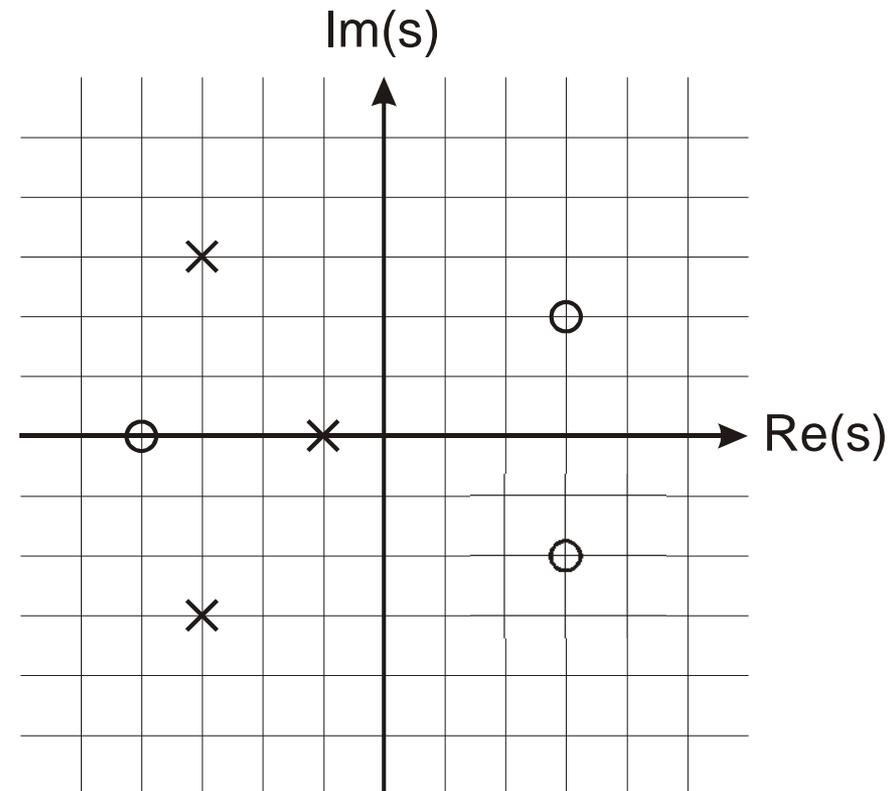


Pol-Nullstellen-Diagramm

Aufteilung in Pole und Nullstellen

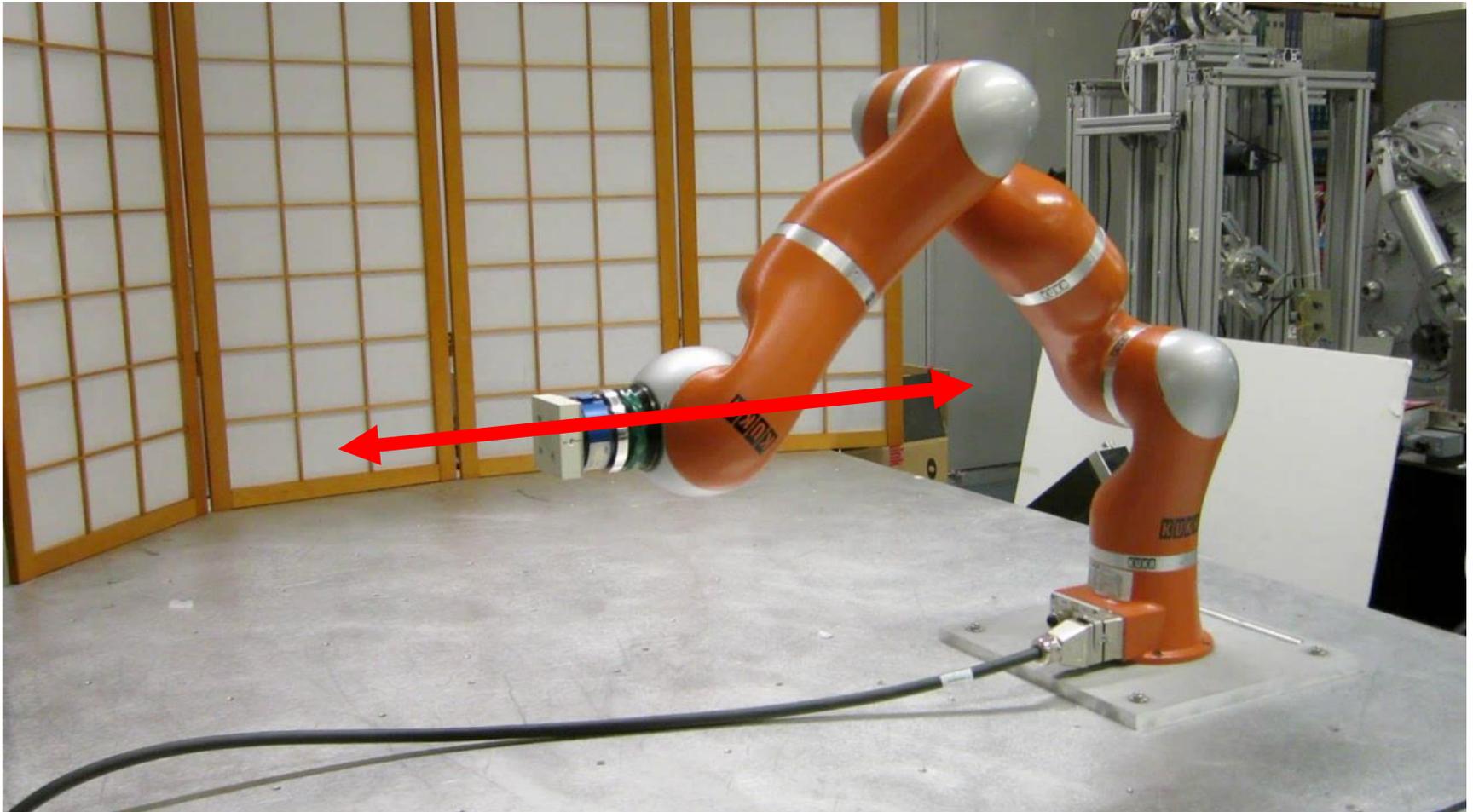
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$= b_m \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - s_{0i})}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)}$$



- × Pol (→ Nullstellen des Nennerpolynoms)
- Nullstelle (→ Nullstellen des Zählerpolynoms)

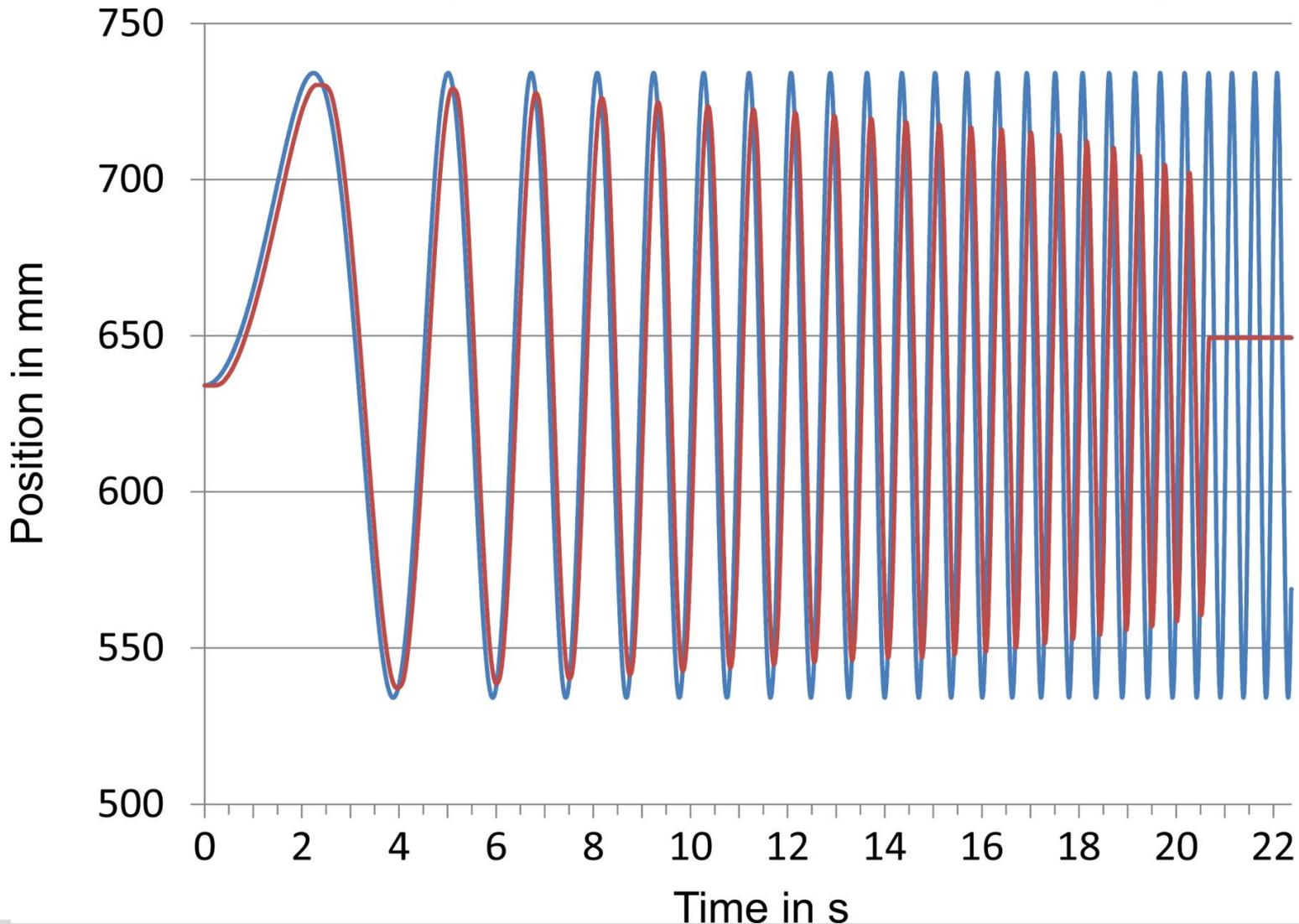
Example: KUKA LBR4+, Task Space Motions



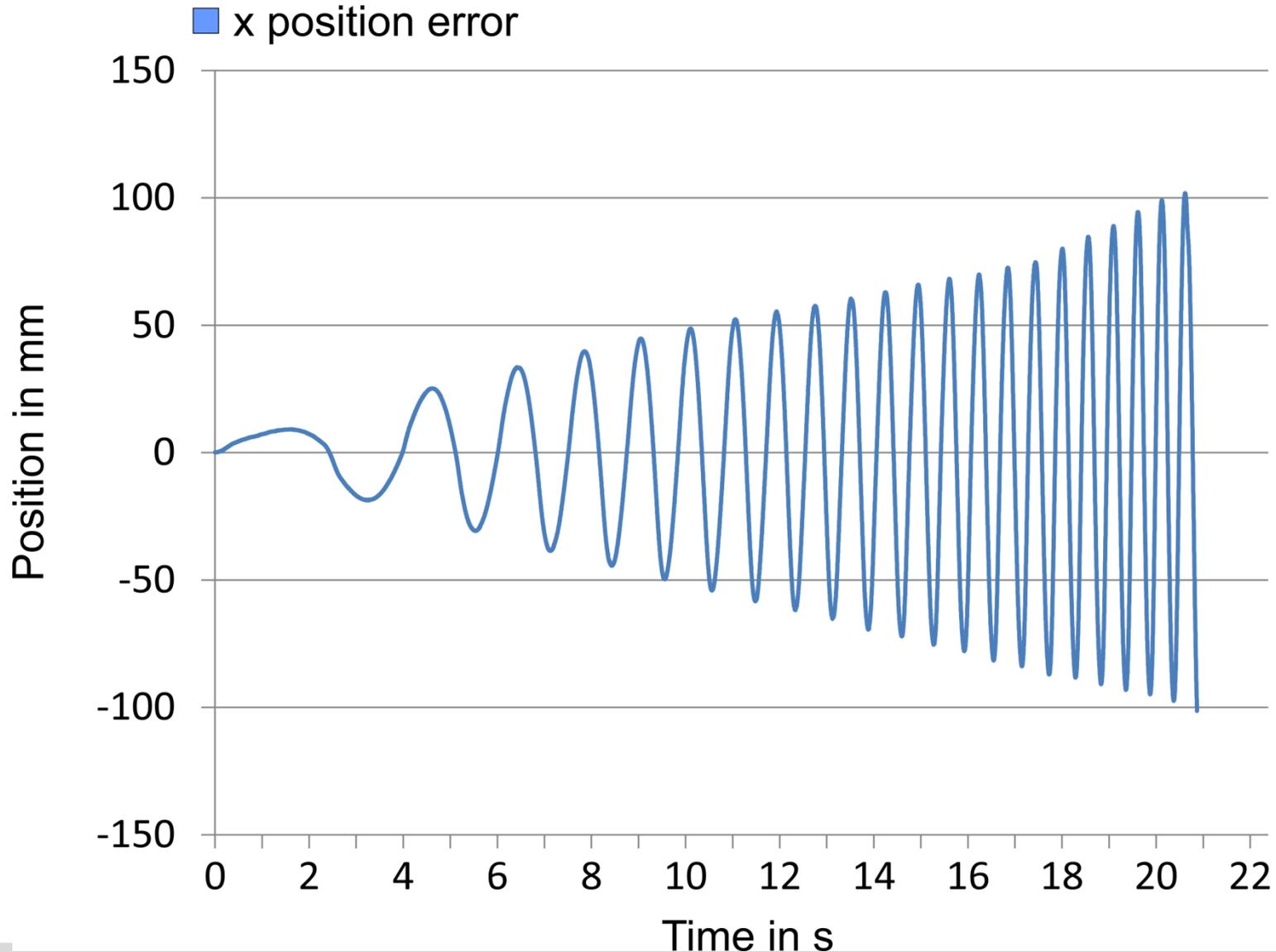
Sinusoidal Sweep in x-direction

■ Measured position

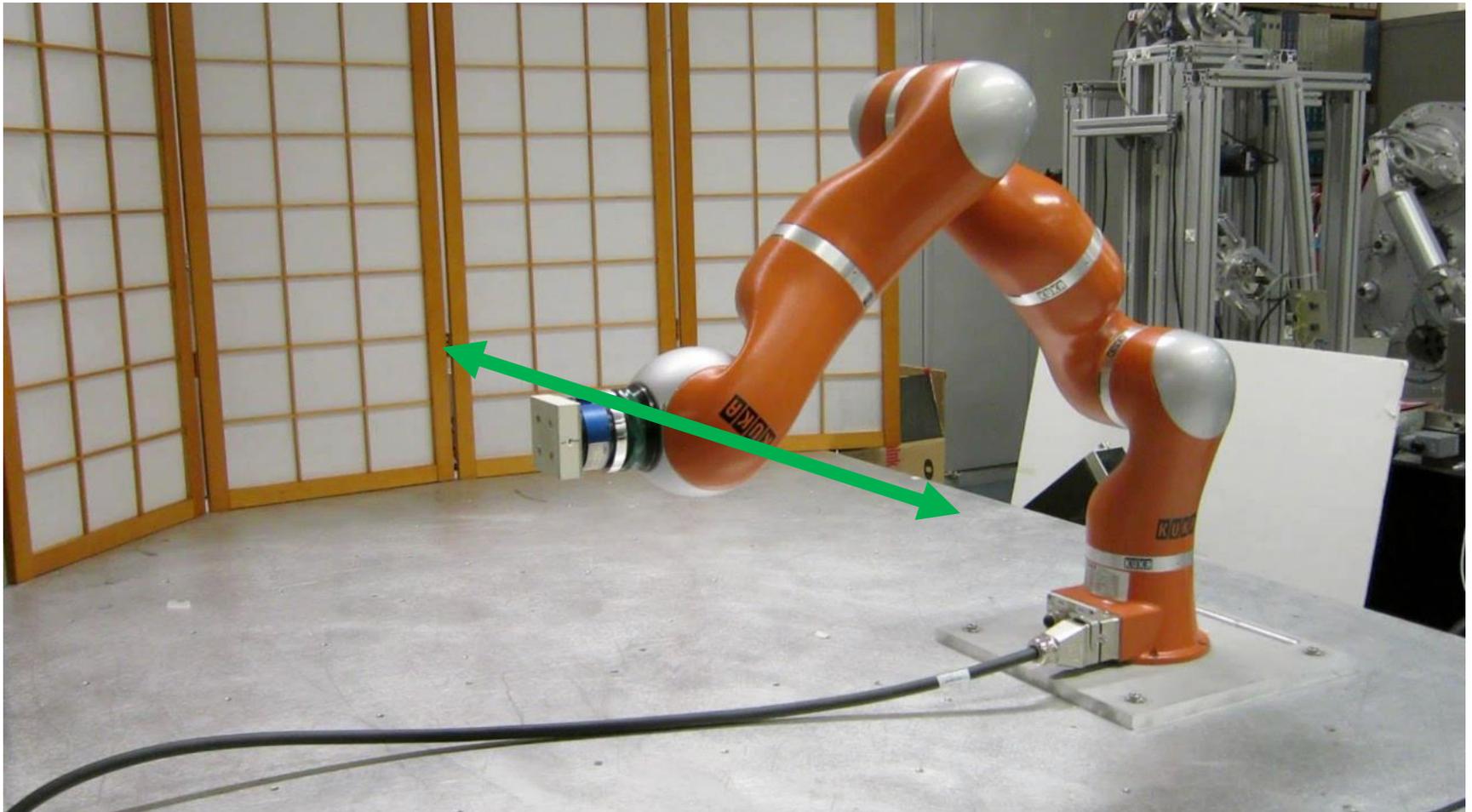
■ Position set point



Sinusoidal Sweep in x-direction



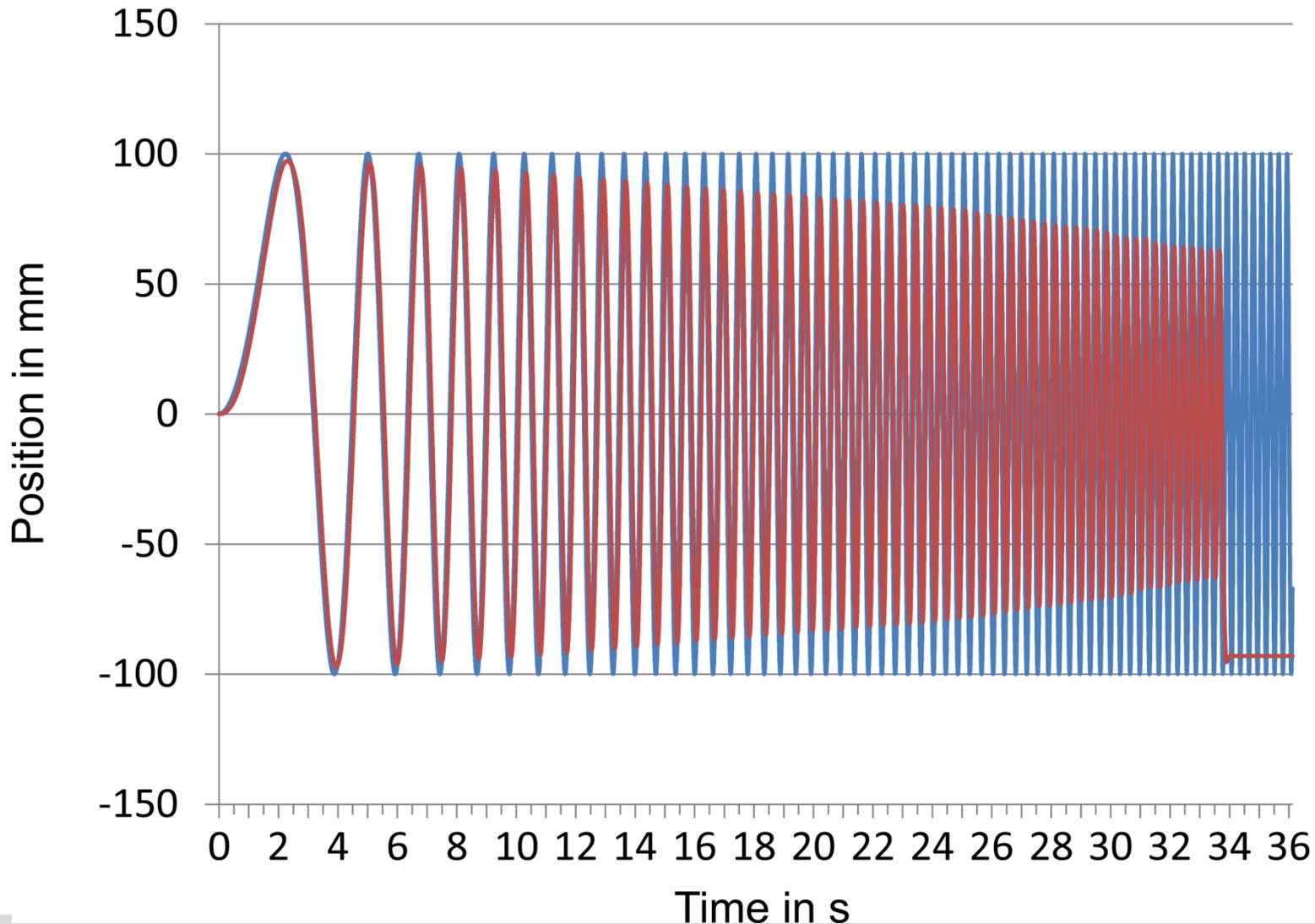
Sinusoidal Sweep in y-direction



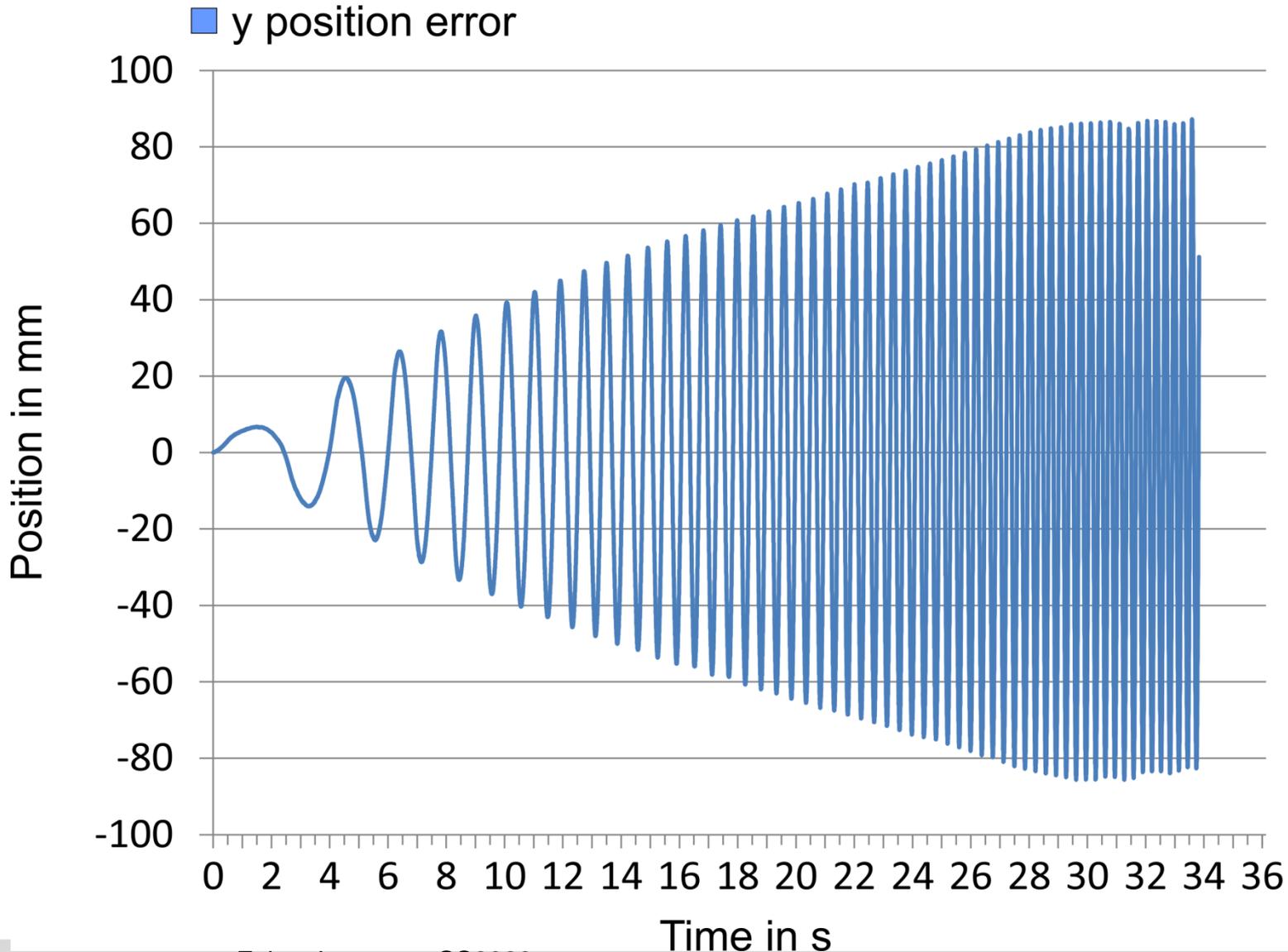
Sinusoidal Sweep in y-direction

■ Measured position

■ Position set point



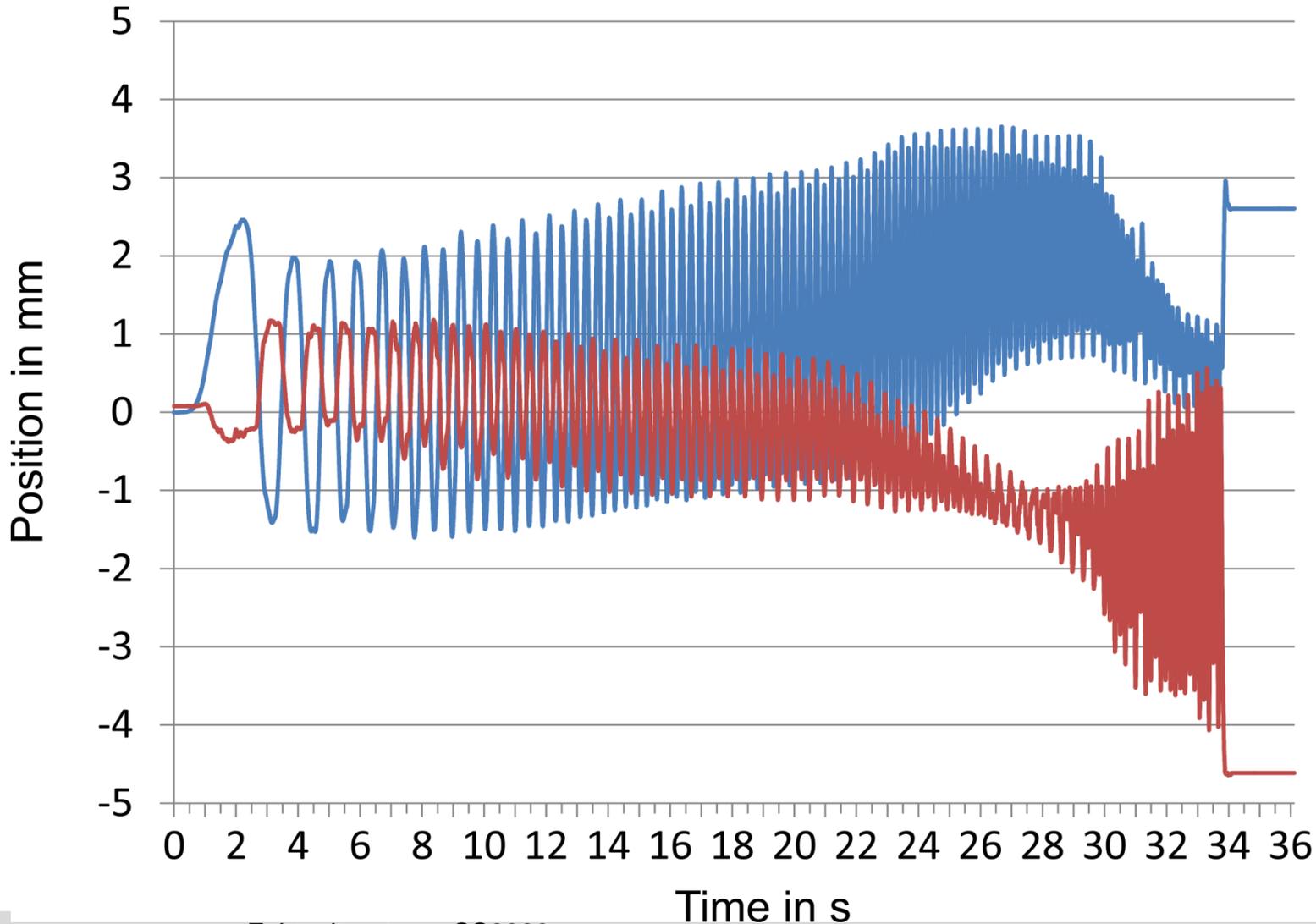
Sinusoidal Sweep in y-direction



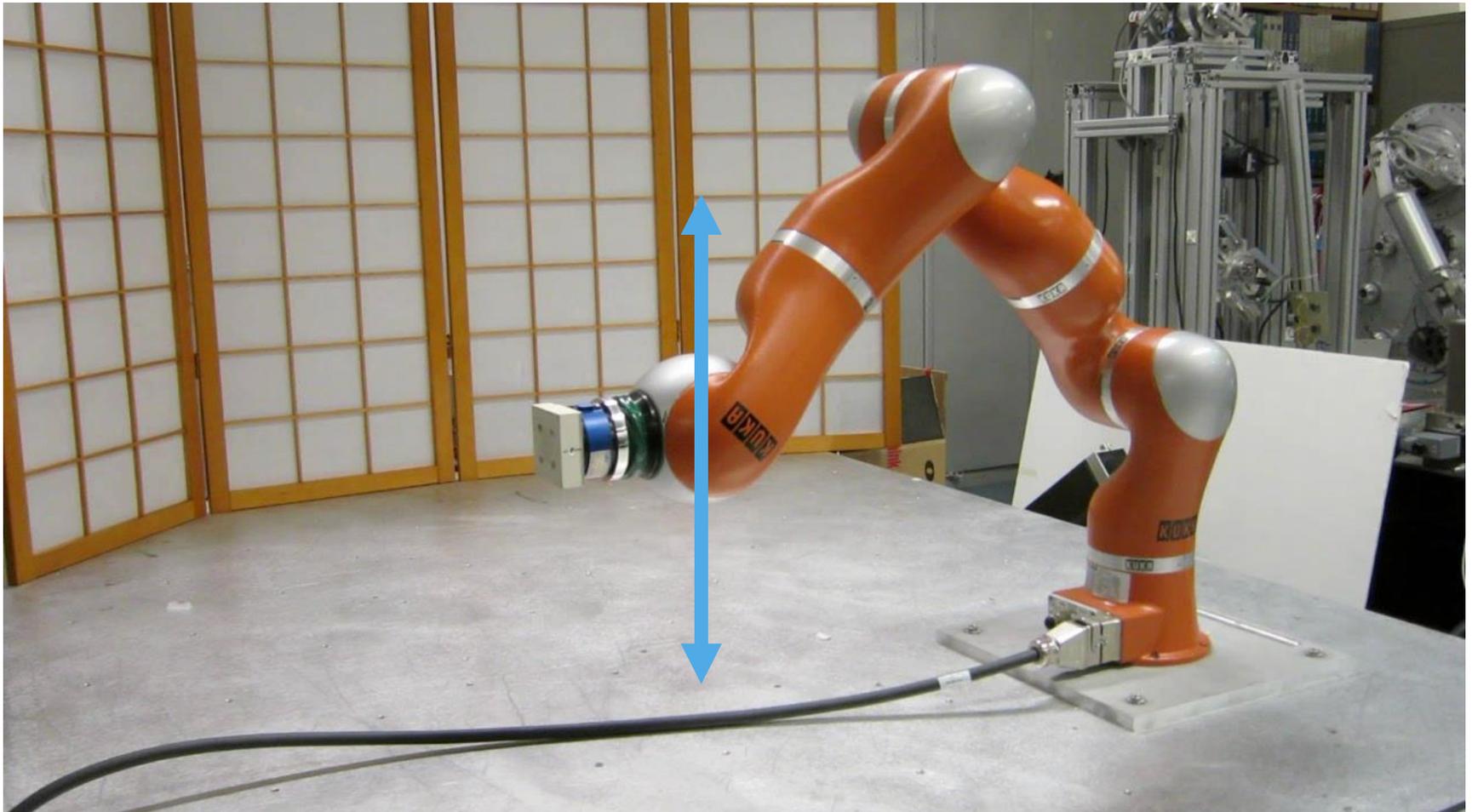
Sinusoidal Sweep in y-direction

■ x position error

■ z position error



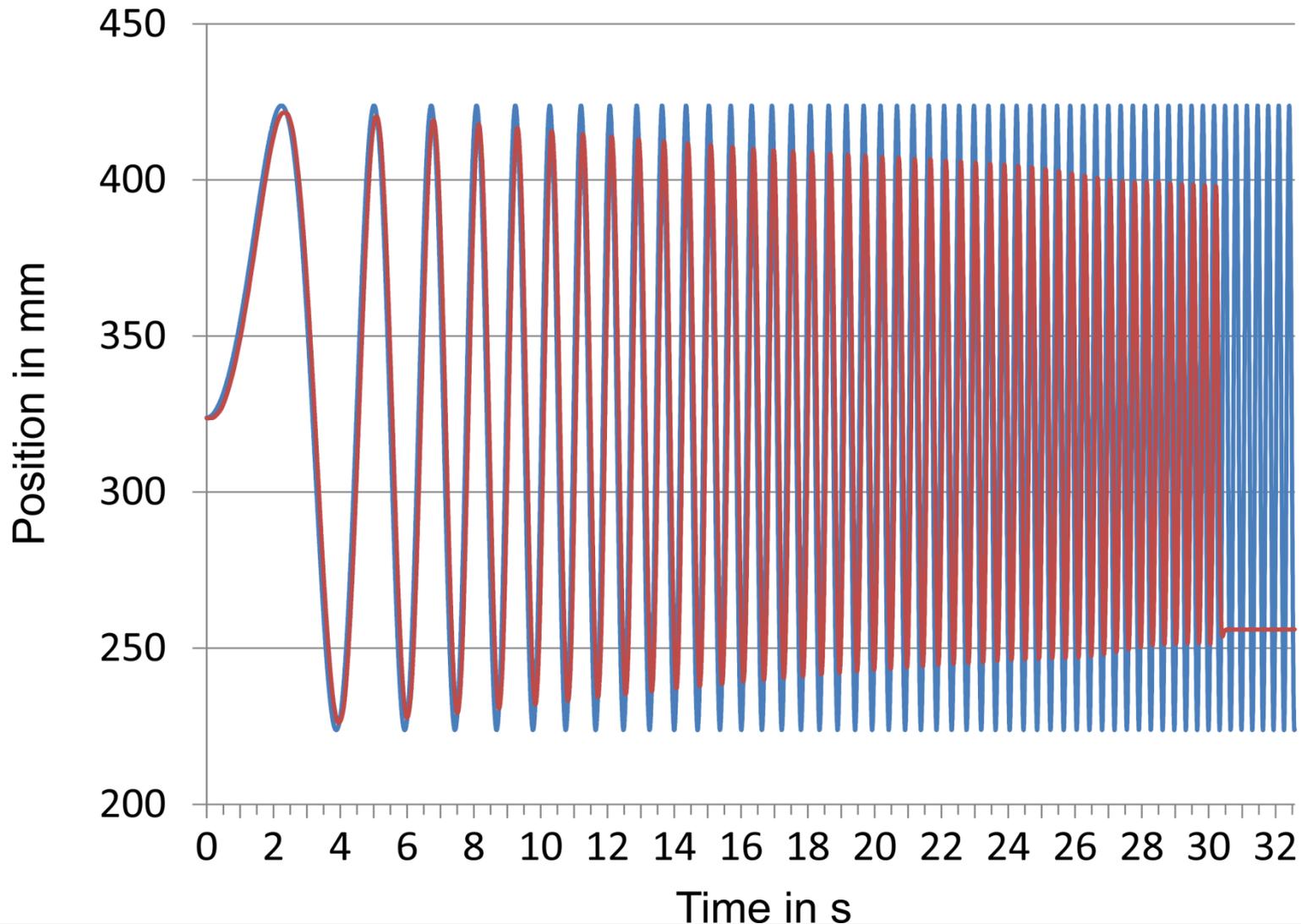
Sinusoidal Sweep in z-direction



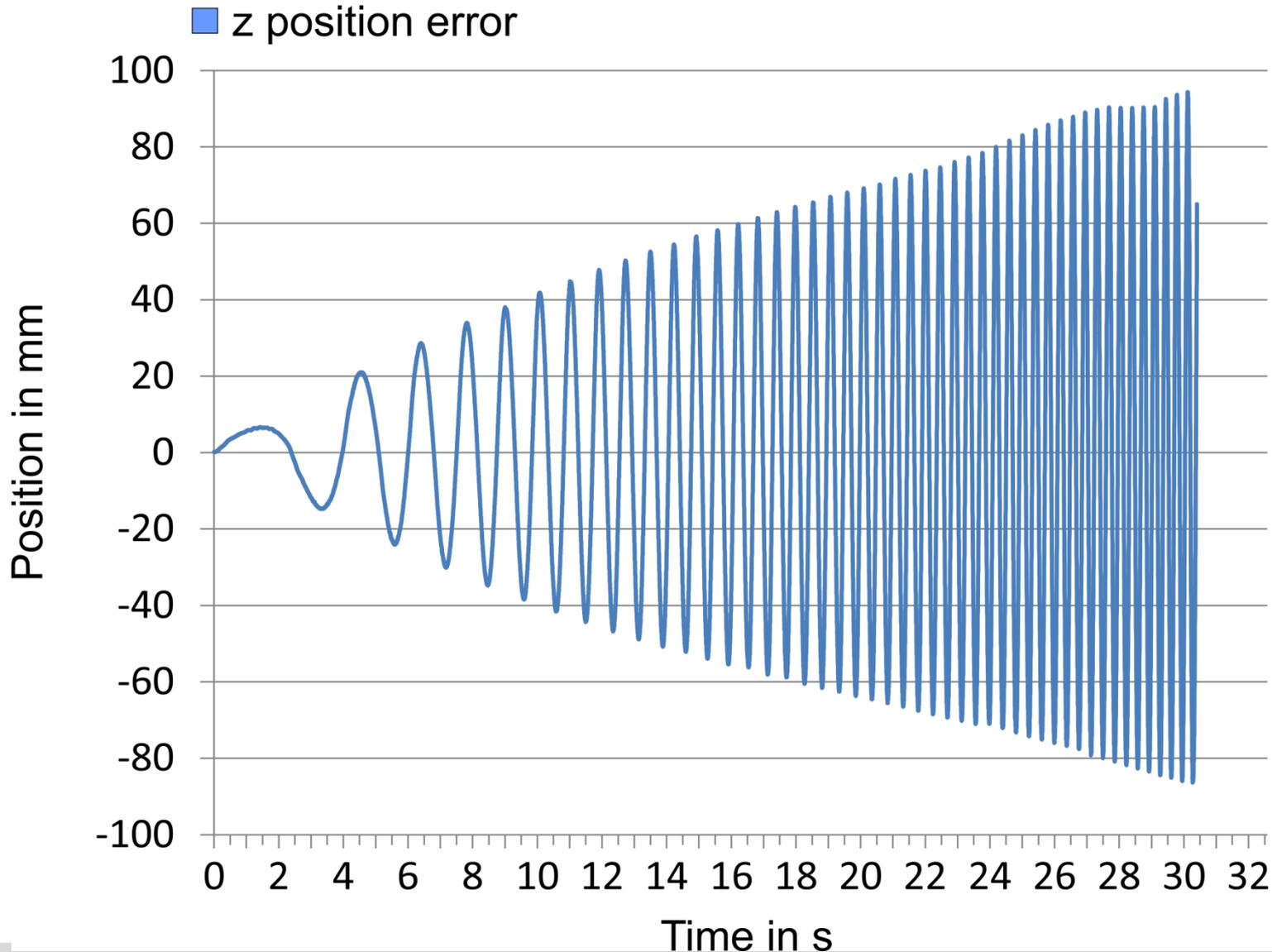
Sinusoidal Sweep in z-direction

■ Measured position

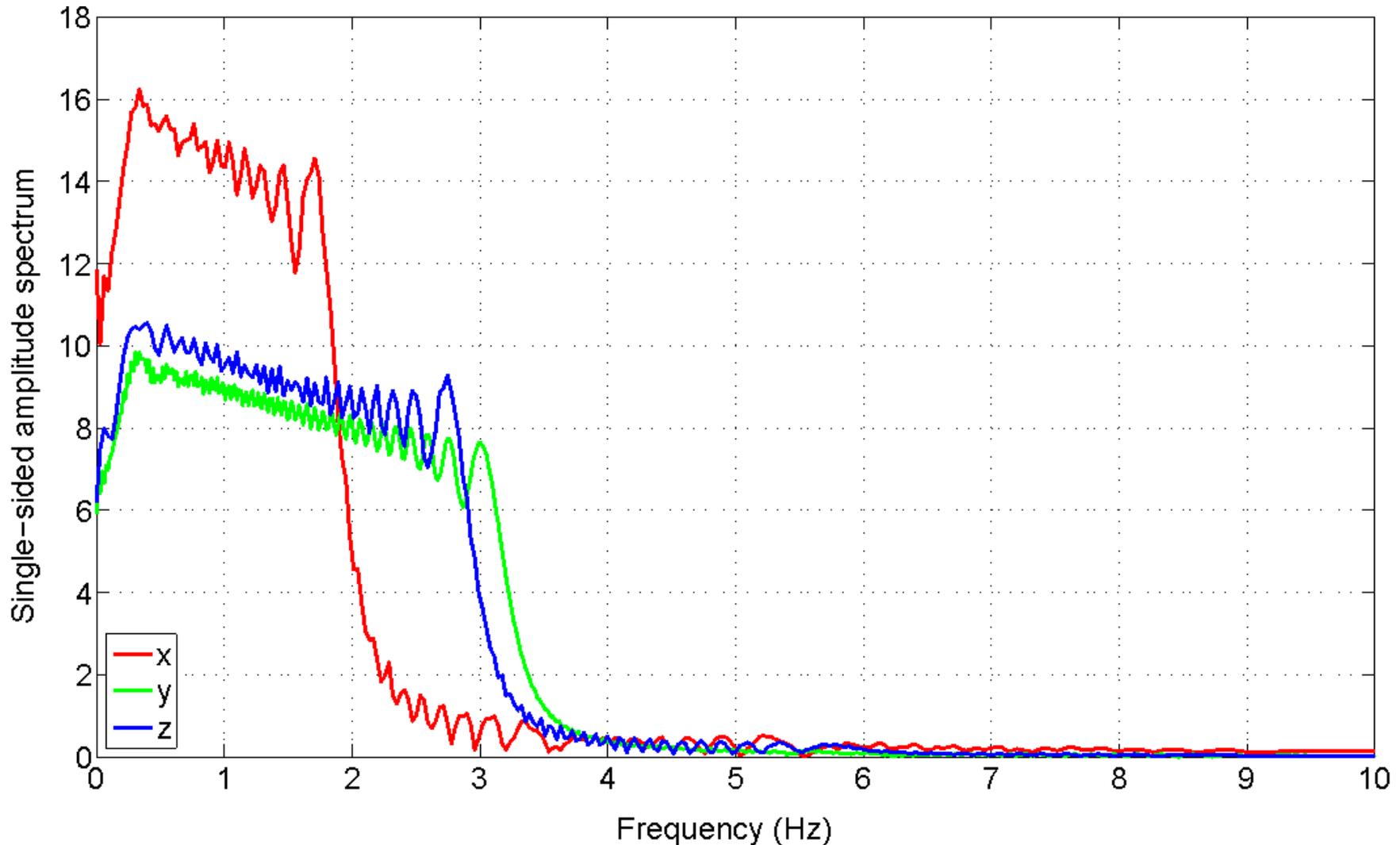
■ Position set point



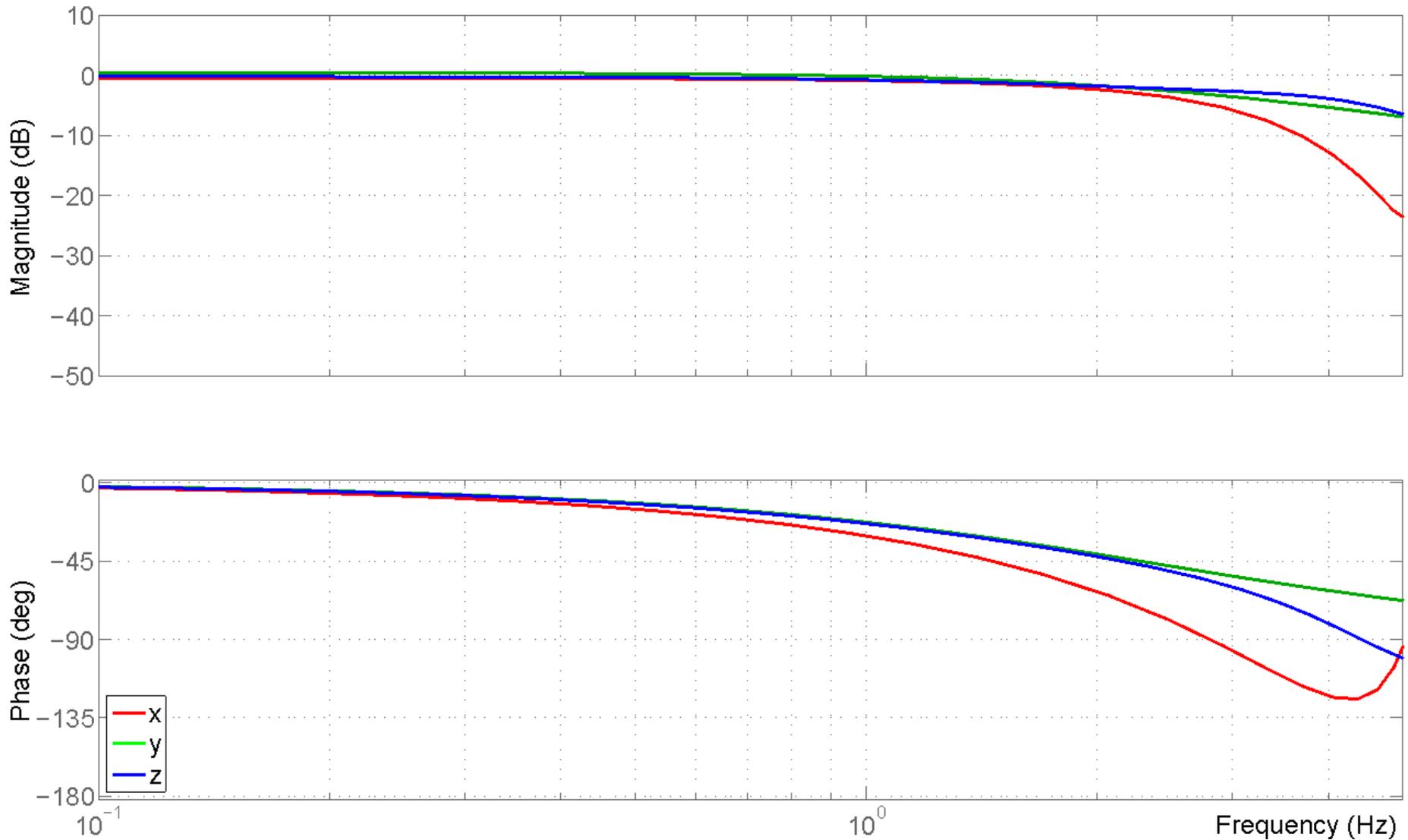
Sinusoidal Sweep in z-direction



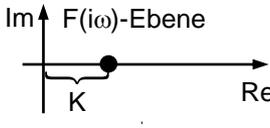
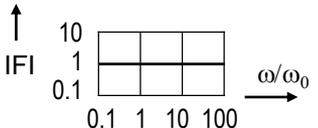
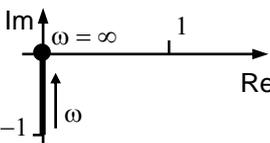
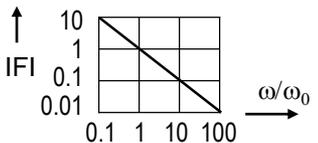
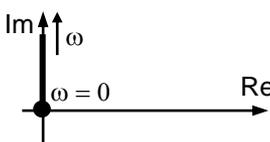
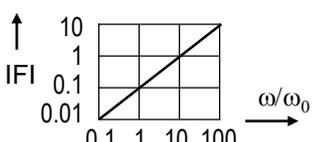
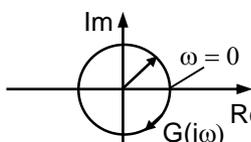
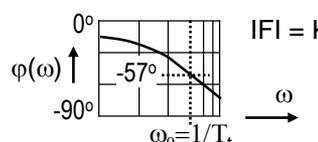
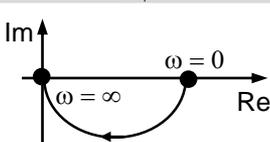
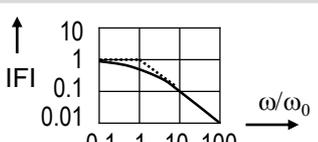
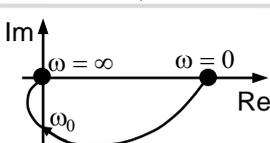
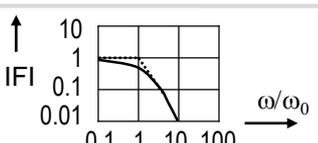
KUKA LWR – Frequency Spectrum



KUKA LWR – Bode Plot



Frequenzgänge von elementaren Übertragungsgliedern

Bezeichnung	Differenzialgleichung	Frequenzgang	Ortskurve	Bode-Diagramm
Proportionalglied	$y = K u$	K		
Integralglied	$\dot{y}T = u$	$\frac{1}{i\omega T}$ $T = 1/\omega_0$		
Differentialglied	$y = K \dot{u}$	$i\omega T$ $T = 1/\omega_0$		
Totzeitglied	$y = K u(t - T_t)$	$K e^{-i\omega T_t}$		
Verzögerungsglied 1. Ordnung (VZ ₁ -Gl.)	$\dot{y}T + y = u$	$\frac{1}{1+i\omega T}$ $T=1/\omega_0$		
Verzögerungsglied 2. Ordnung D>1	$\ddot{y}T^2 + 2DT\dot{y} + y = u$	$\frac{1}{1+2Di\omega T+(i\omega)^2 T^2}$ $T=1/\omega_0$		

Stabilität

Stabilität ist eine der wichtigsten Systemeigenschaften in der Regelungstechnik. Instabile Systeme können im Realeinsatz ernste Probleme verursachen.

Instabile Systeme neigen zum “aufzuschwingen”. Dies kann bis zur Zerstörung des Systems führen.

Ein bekanntest Beispiel ist der durch Schwingungen verursachte Einsturz der Tacoma Bridge.

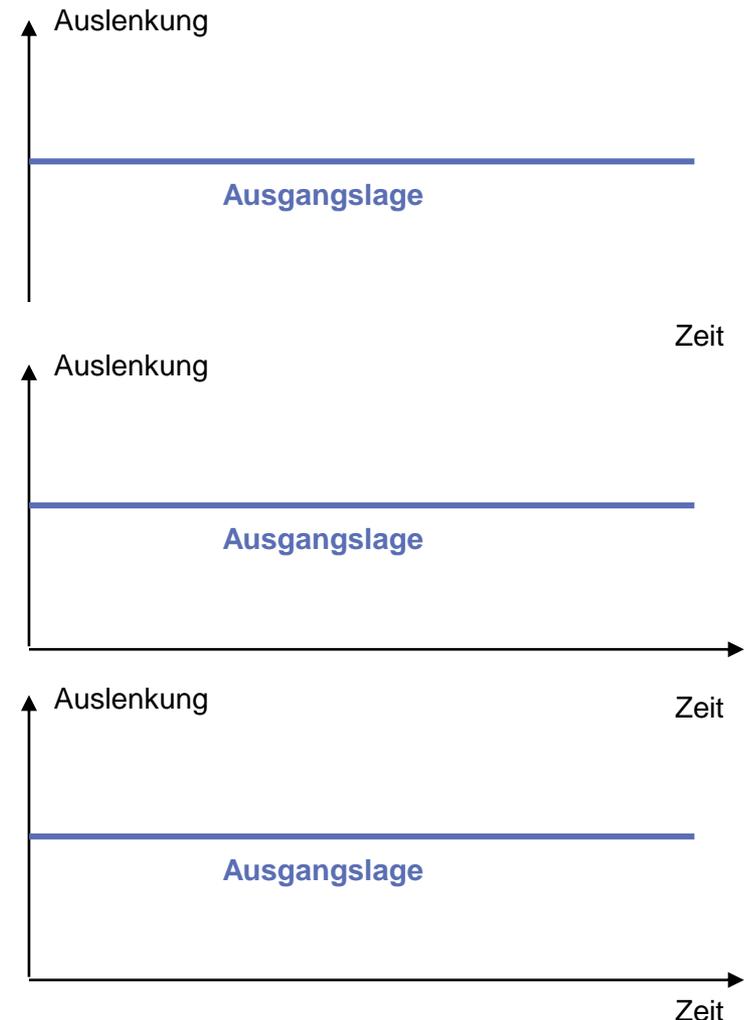


[File:Tacoma-narrows-bridge-collapse.jpg - Wikimedia Commons](#)

Stabilitätsbegriffe

In der Regelungstechnik gibt es verschiedene Stabilitätsbegriffe.

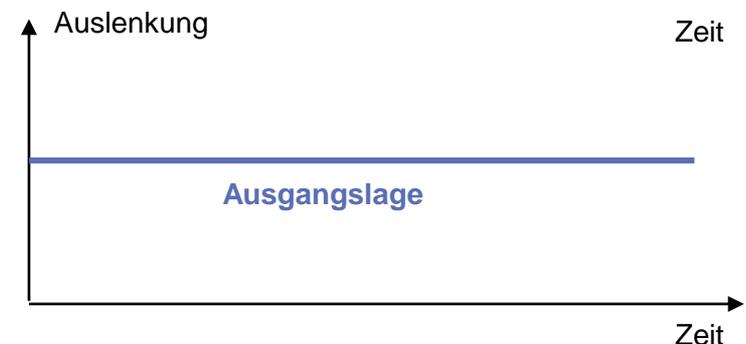
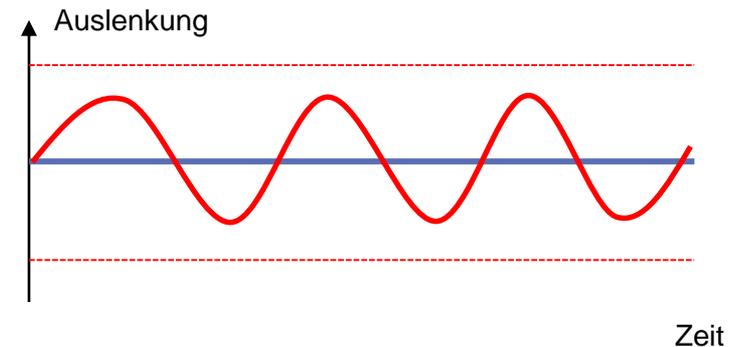
- **Lyapunov-Stabilität:** System verbleibt in einer gewissen Umgebung um die Ausgangslage.
- **Asymptotische Stabilität:** System konvergiert für $t \rightarrow \infty$ wieder gegen die Ausgangslage.
- **Exponentielle Stabilität:** System konvergiert exponentiell gegen die Ausgangslage.



Stabilitätsbegriffe

In der Regelungstechnik gibt es verschiedene Stabilitätsbegriffe.

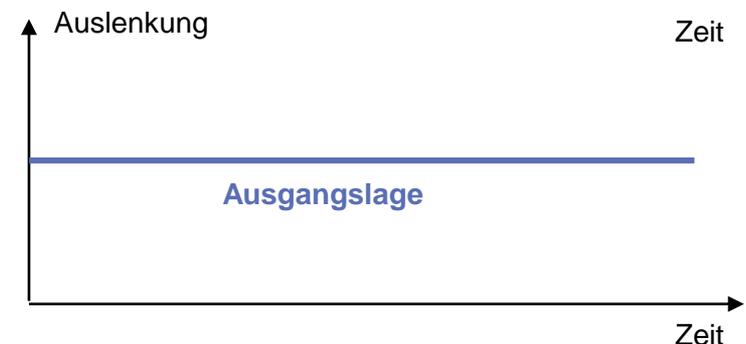
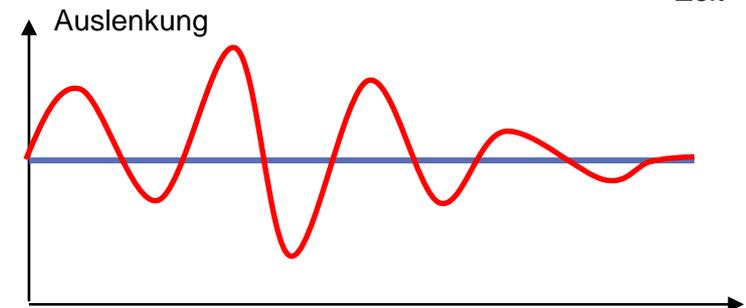
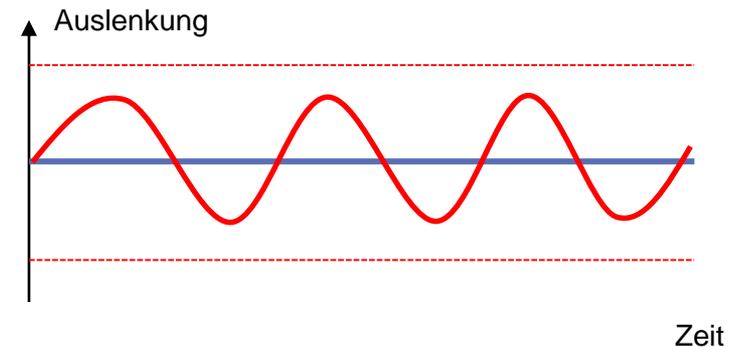
- **Lyapunov-Stabilität:** System verbleibt in einer gewissen Umgebung um die Ausgangslage.
- **Asymptotische Stabilität:** System konvergiert für $t \rightarrow \infty$ wieder gegen die Ausgangslage.
- **Exponentielle Stabilität:** System konvergiert exponentiell gegen die Ausgangslage.



Stabilitätsbegriffe

In der Regelungstechnik gibt es verschiedene Stabilitätsbegriffe.

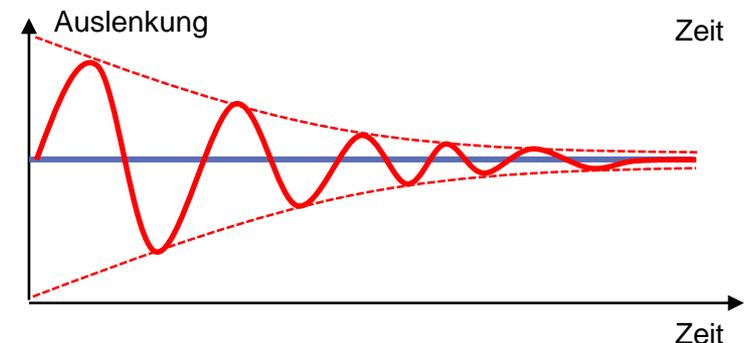
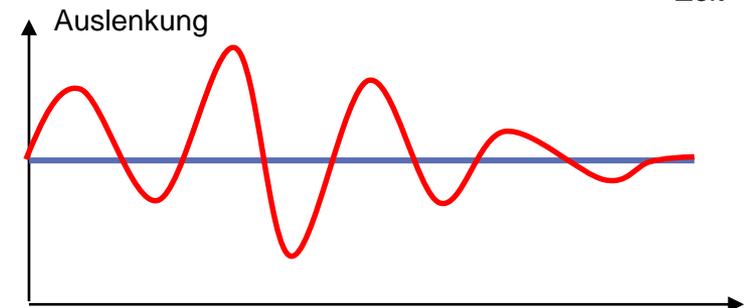
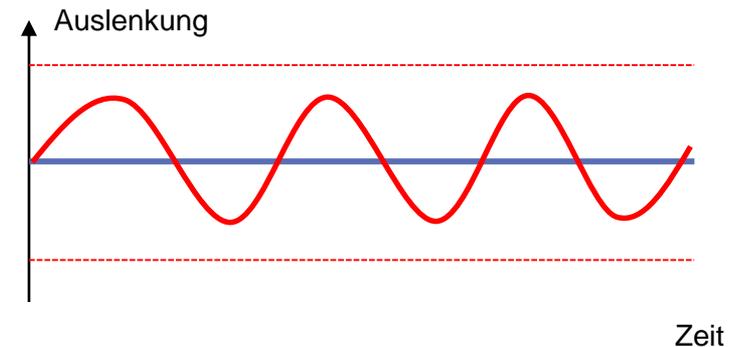
- **Lyapunov-Stabilität:** System verbleibt in einer gewissen Umgebung um die Ausgangslage.
- **Asymptotische Stabilität:** System konvergiert für $t \rightarrow \infty$ wieder gegen die Ausgangslage.
- **Exponentielle Stabilität:** System konvergiert exponentiell gegen die Ausgangslage.



Stabilitätsbegriffe

In der Regelungstechnik gibt es verschiedene Stabilitätsbegriffe.

- **Lyapunov-Stabilität:** System verbleibt in einer gewissen Umgebung um die Ausgangslage.
- **Asymptotische Stabilität:** System konvergiert für $t \rightarrow \infty$ wieder gegen die Ausgangslage.
- **Exponentielle Stabilität:** System konvergiert exponentiell gegen die Ausgangslage.



BIBO-Stabilität

Da wir in dieser Vorlesung nur LTI*-Systeme betrachten, verwenden wir im Folgenden einen vereinfachten Stabilitätsbegriff, der als „BIBO-Stabilität“ bezeichnet wird. Gelegentlich wird auch der Begriff „Übertragungsstabilität“ verwendet.

Definition BIBO-Stabilität:

Ein System ist BIBO-stabil, wenn es auf eine **beschränkte Eingangsgröße** immer mit einer **beschränkten Ausgangsgröße** antwortet
(“Bounded Input, Bounded Output → BIBO)

*LTI: Lineare, Zeitinvariante Systeme

Stabilität prüfen

Es gibt verschiedene Methoden, die Stabilität eines LTI-Systems zu prüfen. Wir behandeln die folgenden Methoden:

- Bestimmung der Systempole
- Hurwitzkriterium
- Nyquist-Kriterium
- Phasenrand-Kriterium

Stabilität anhand der Systempole

Die Systempole sind die **Nullstellen** des **Nennerpolynoms** der **Übertragungsfunktion** $G(s)$.

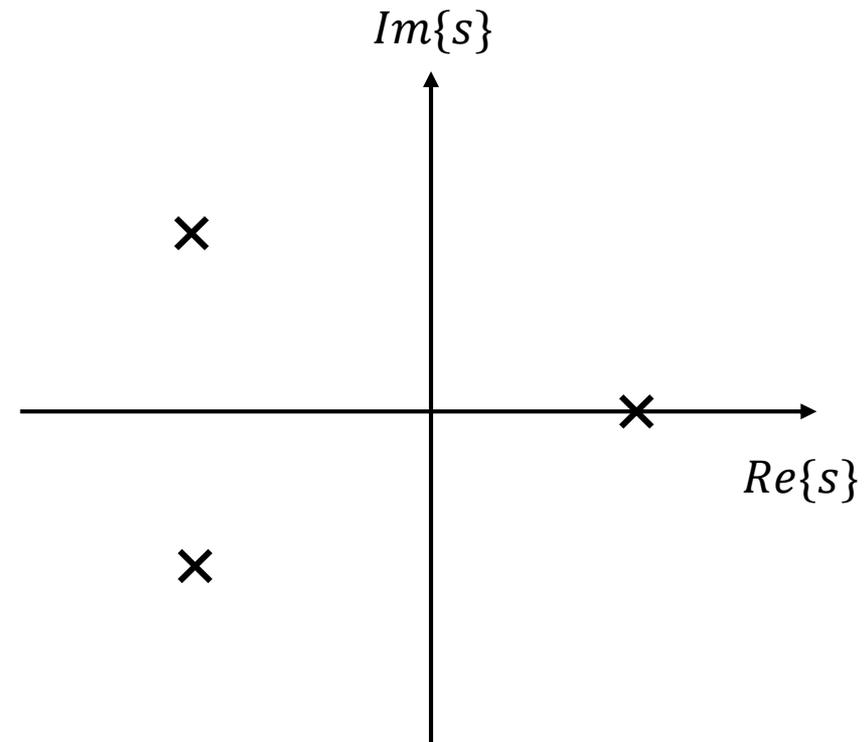
Liegt $G(s)$ vor und ist das Nennerpolynom nicht zu kompliziert, kann man die Stabilität prüfen, indem man die Systempole direkt ausrechnet. Es gilt:

Stabilitätskriterium Systempole

Ein System ist **stabil** wenn sämtliche Systempole s_i in einen **negativen Realteil** haben:

$$\operatorname{Re}\{s_i\} < 0$$

Anschaulich betrachtet bedeutet dies, dass die Pole in der **linken Halbene** der imaginären Zahlenebene liegen müssen.



Stabilität anhand der Systempole

Die Systempole sind die **Nullstellen** des **Nennerpolynoms** der **Übertragungsfunktion** $G(s)$.

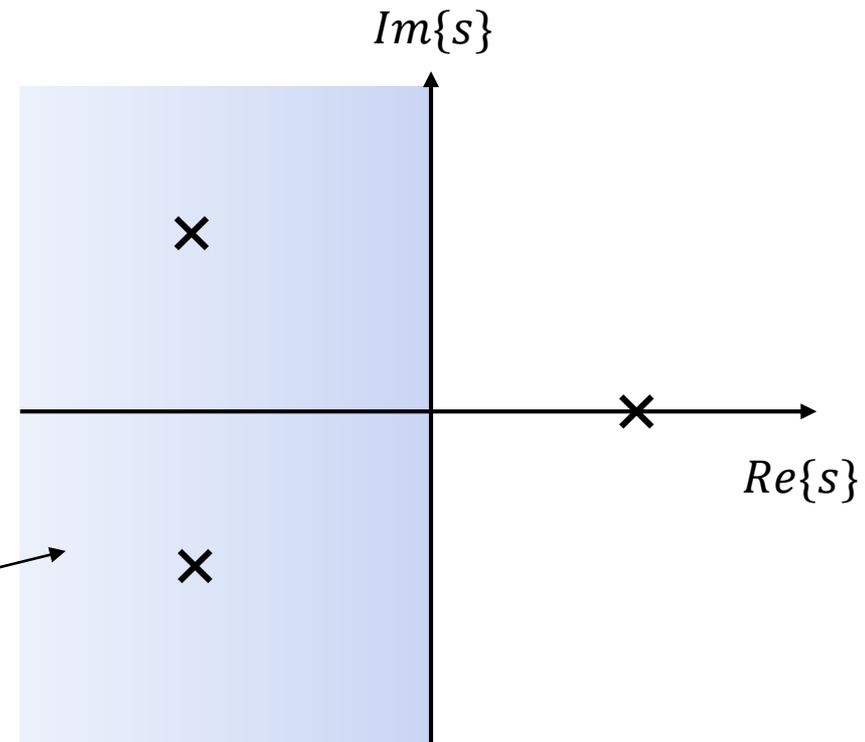
Liegt $G(s)$ vor und ist das Nennerpolynom nicht zu kompliziert, kann man die Stabilität prüfen, indem man die Systempole direkt ausrechnet. Es gilt:

Stabilitätskriterium Systempole

Ein System ist **stabil** wenn sämtliche Systempole s_i in einen **negativen Realteil** haben:

$$\operatorname{Re}\{s_i\} < 0$$

Anschaulich betrachtet bedeutet dies, dass die Pole in der **linken Halbene** der imaginären Zahlenebene liegen müssen.



Stabilität anhand der Systempole

Die Systempole sind die **Nullstellen** des **Nennerpolynoms** der **Übertragungsfunktion** $G(s)$.

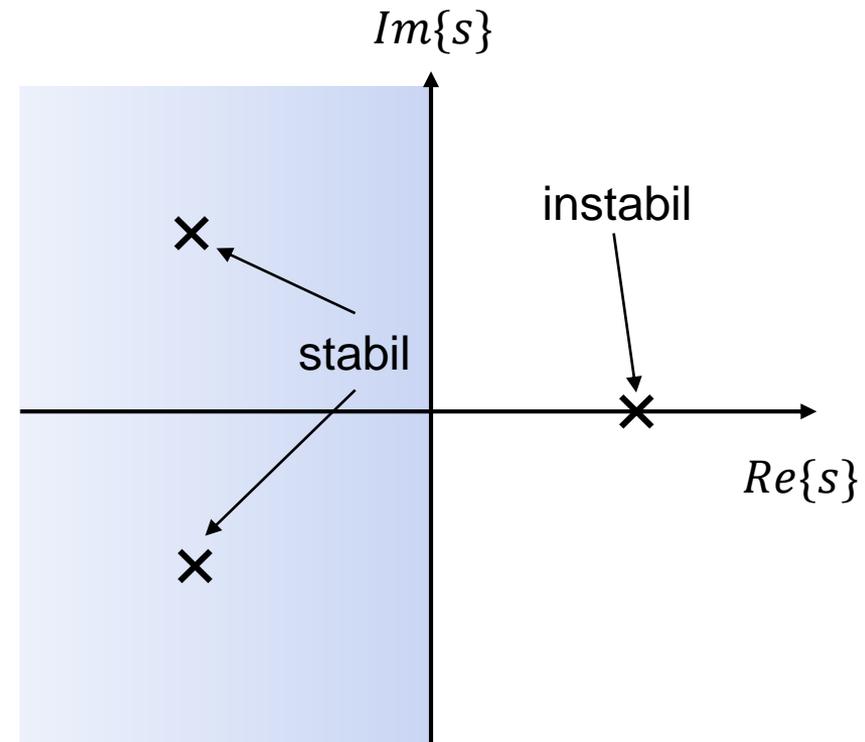
Liegt $G(s)$ vor und ist das Nennerpolynom nicht zu kompliziert, kann man die Stabilität prüfen, indem man die Systempole direkt ausrechnet. Es gilt:

Stabilitätskriterium Systempole

Ein System ist **stabil** wenn sämtliche Systempole s_i in einen **negativen Realteil** haben:

$$\operatorname{Re}\{s_i\} < 0$$

Anschaulich betrachtet bedeutet dies, dass die Pole in der **linken Halbene** der imaginären Zahlenebene liegen müssen.



Stabilitätskriterium nach Hurwitz

Kann man die Nullstellen des Nennerpolynoms nicht direkt berechnet werden können, so kann man das Hurwitzkriterium verwenden.

Man bringt dazu das Nennerpolynom $N(s)$ von $G(s)$ in die folgende Form:

$$N(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + s^n$$

Achtung: ggf. Normierung notwendig!

...und stellt aus den Koeffizienten die Hurwitz-Matrix H auf:

$$H = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & a_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 \end{pmatrix}$$

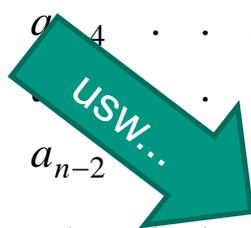
Stabilitätskriterium nach Hurwitz

Die Kriterien für Stabilität sind wie folgt:

- Alle Koeffizienten $a_i > 0$ und
- alle **Hauptabschnittsdeterminanten** der Hurwitz-Matrix sind positiv.

Hinweis: Die Hauptabschnittsdeterminanten sind Unterdeterminanten, deren linke obere Ecke mit der linken oberen Ecke von H zusammenfällt.

$$H = \begin{pmatrix}
 \boxed{a_{n-1}} & \boxed{a_{n-3}} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots & 0 \\
 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots & 0 \\
 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\
 0 & 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\
 0 & 0 & a_{n-1} & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 1 & a_{n-2} & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_0
 \end{pmatrix}$$

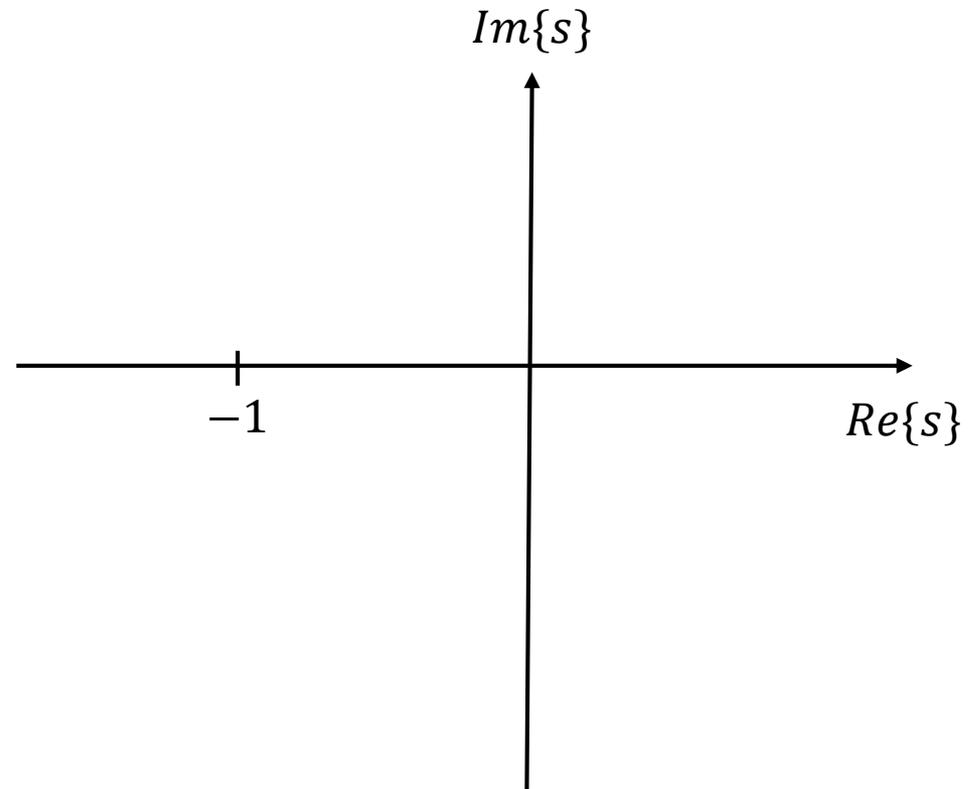


Stabilitätskriterium nach Nyquist

Das Nyquist-Kriterium erlaubt es, anhand der Ortskurve des **offenen** Regelkreises die Stabilität des **geschlossenen** Regelkreises zu überprüfen.

Stabilitätskriterium nach Nyquist (vereinfacht):

Wenn die Ortskurve des offenen Regelkreises den Punkt -1 auf der imaginären Ebene **nicht** umläuft, dann ist der geschlossene Regelkreis stabil.

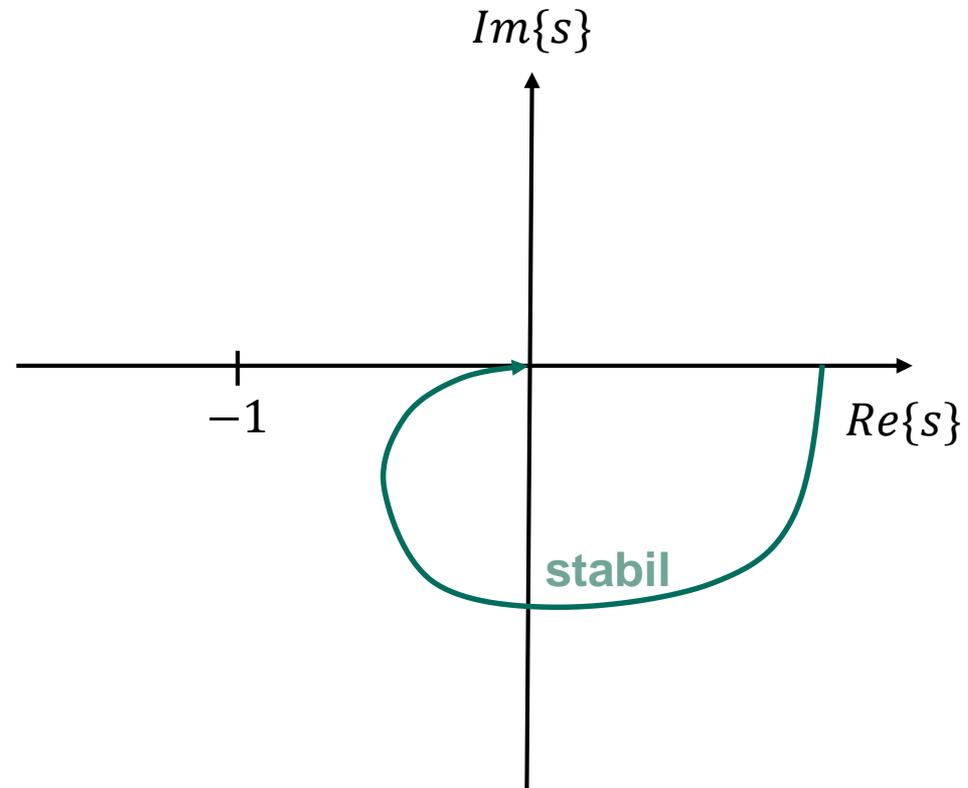


Stabilitätskriterium nach Nyquist

Das Nyquist-Kriterium erlaubt es, anhand der Ortskurve des **offenen** Regelkreises die Stabilität des **geschlossenen** Regelkreises zu überprüfen.

Stabilitätskriterium nach Nyquist (vereinfacht):

Wenn die Ortskurve des offenen Regelkreises den Punkt -1 auf der imaginären Ebene **nicht** umläuft, dann ist der geschlossene Regelkreis stabil.

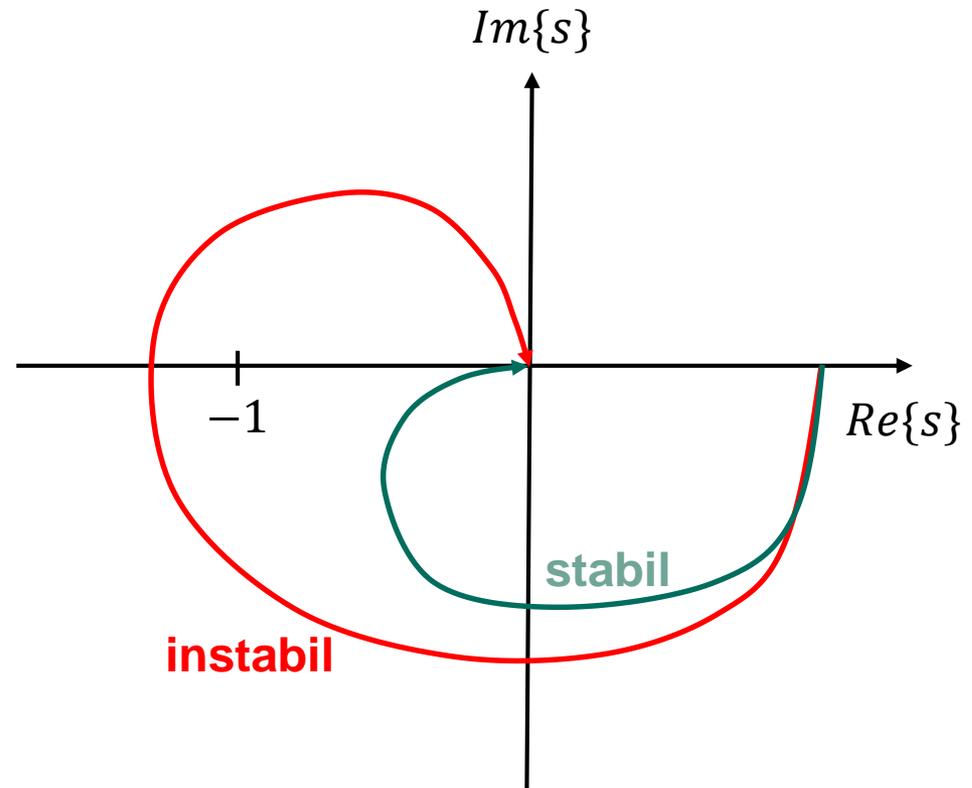


Stabilitätskriterium nach Nyquist

Das Nyquist-Kriterium erlaubt es, anhand der Ortskurve des **offenen** Regelkreises die Stabilität des **geschlossenen** Regelkreises zu überprüfen.

Stabilitätskriterium nach Nyquist (vereinfacht):

Wenn die Ortskurve des offenen Regelkreises den Punkt -1 auf der imaginären Ebene **nicht** umläuft, dann ist der geschlossene Regelkreis stabil.



Stabilitätskriterium nach Nyquist

Das Nyquist-Kriterium erlaubt es, anhand der Ortskurve des **offenen** Regelkreises die Stabilität des **geschlossenen** Regelkreises zu überprüfen.

Hinweis:

Hier in der Vorlesung wird strenggenommen nur das sog. „**spezielle Nyquistkriterium**“ vorgestellt. Es gilt nur, wenn das offene System

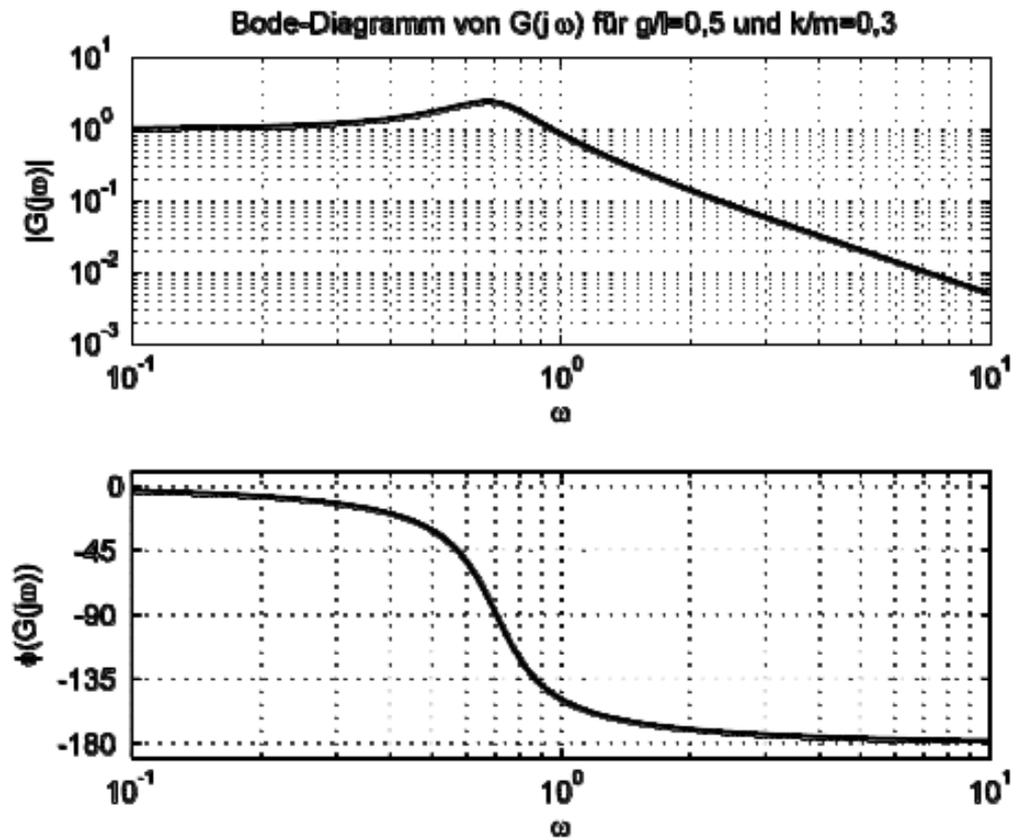
- maximal zwei Pole im Ursprung und
- ansonsten nur Pole mit negativem Realteil hat.

Das **allgemeine Nyquistkriterium** hat weniger restriktive Bedingungen, wird aber aus Zeitgründen hier nicht behandelt.

Phasenrandkriterium

Die Forderung von Nyquist lässt sich auch anhand des Bode-Diagramms des offenen Regelkreises überprüfen. Man spricht dann auch vom „Phasenrandkriterium“:

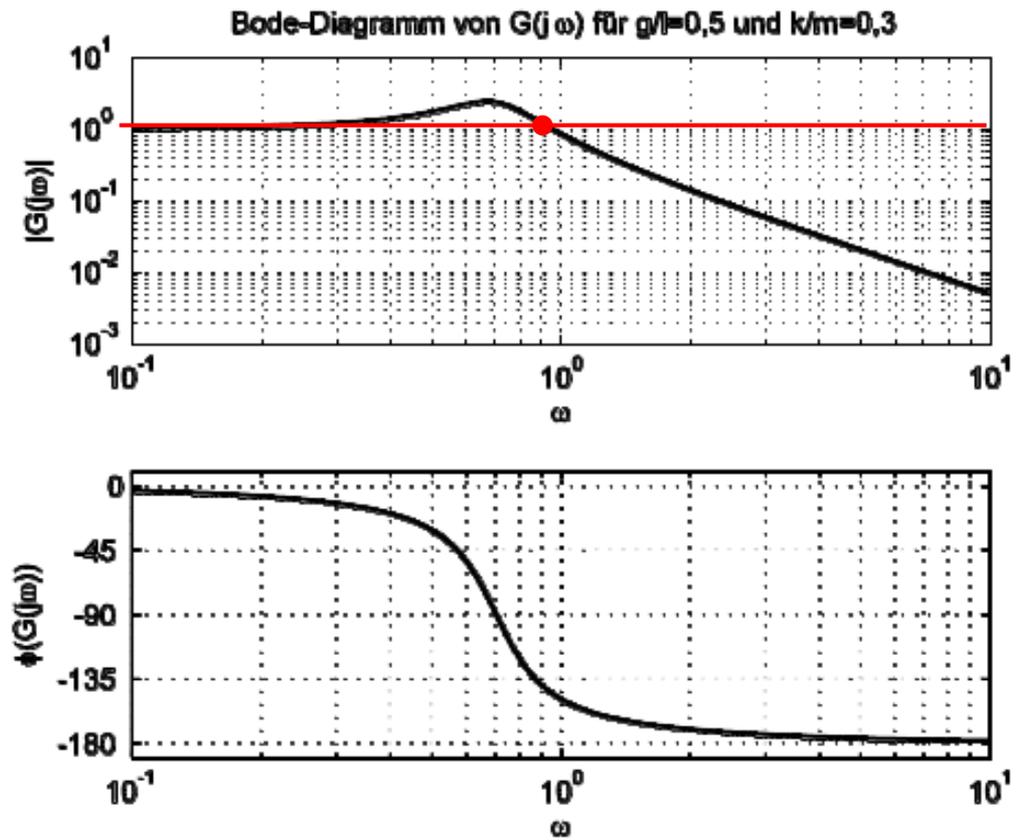
1. Finde die Frequenz, für die der Amplitudengang durch die 10^0 -Linie tritt (10^0 entspricht gerade Verstärkungsfaktor 1)
2. Ist der Phasengang für diese Frequenz oberhalb von -180° ? Wenn ja, ist der geschlossene Regelkreis stabil. (Abstand $\Delta\varphi$ von -180° -Linie heißt „Phasenrand“ oder „Phasenreserve“)



Phasenrandkriterium

Die Forderung von Nyquist lässt sich auch anhand des Bode-Diagramms des offenen Regelkreises überprüfen. Man spricht dann auch vom „Phasenrandkriterium“:

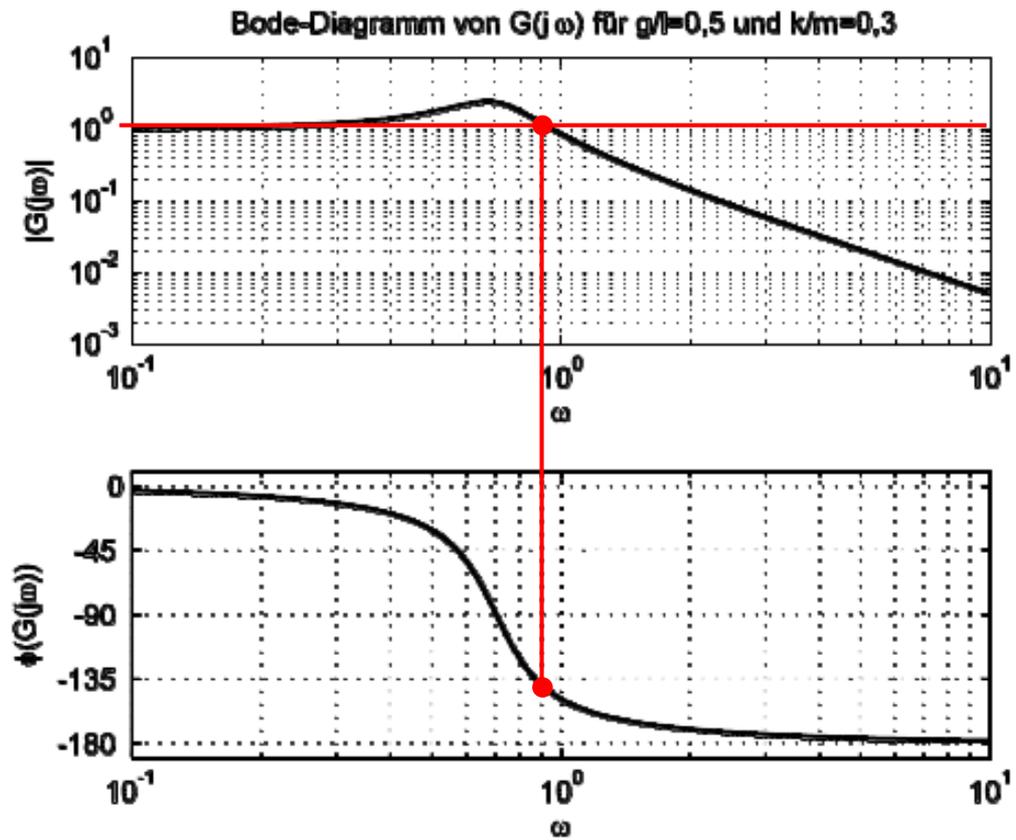
1. Finde die Frequenz, für die der Amplitudengang durch die 10^0 -Linie tritt (10^0 entspricht gerade Verstärkungsfaktor 1)
2. Ist der Phasengang für diese Frequenz oberhalb von -180° ? Wenn ja, ist der geschlossene Regelkreis stabil. (Abstand $\Delta\varphi$ von -180° -Linie heißt „Phasenrand“ oder „Phasenreserve“)



Phasenrandkriterium

Die Forderung von Nyquist lässt sich auch anhand des Bode-Diagramms des offenen Regelkreises überprüfen. Man spricht dann auch vom „Phasenrandkriterium“:

1. Finde die Frequenz, für die der Amplitudengang durch die 10^0 -Linie tritt (10^0 entspricht gerade Verstärkungsfaktor 1)
2. Ist der Phasengang für diese Frequenz oberhalb von -180° ? Wenn ja, ist der geschlossene Regelkreis stabil. (Abstand $\Delta\varphi$ von -180° -Linie heißt „Phasenrand“ oder „Phasenreserve“)



Phasenrandkriterium

Die Forderung von Nyquist lässt sich auch anhand des Bode-Diagramms des offenen Regelkreises überprüfen. Man spricht dann auch vom „Phasenrandkriterium“:

1. Finde die Frequenz, für die der Amplitudengang durch die 10^0 -Linie tritt (10^0 entspricht gerade Verstärkungsfaktor 1)
2. Ist der Phasengang für diese Frequenz oberhalb von -180° ? Wenn ja, ist der geschlossene Regelkreis stabil. (Abstand $\Delta\varphi$ von -180° -Linie heißt „Phasenrand“ oder „Phasenreserve“)

