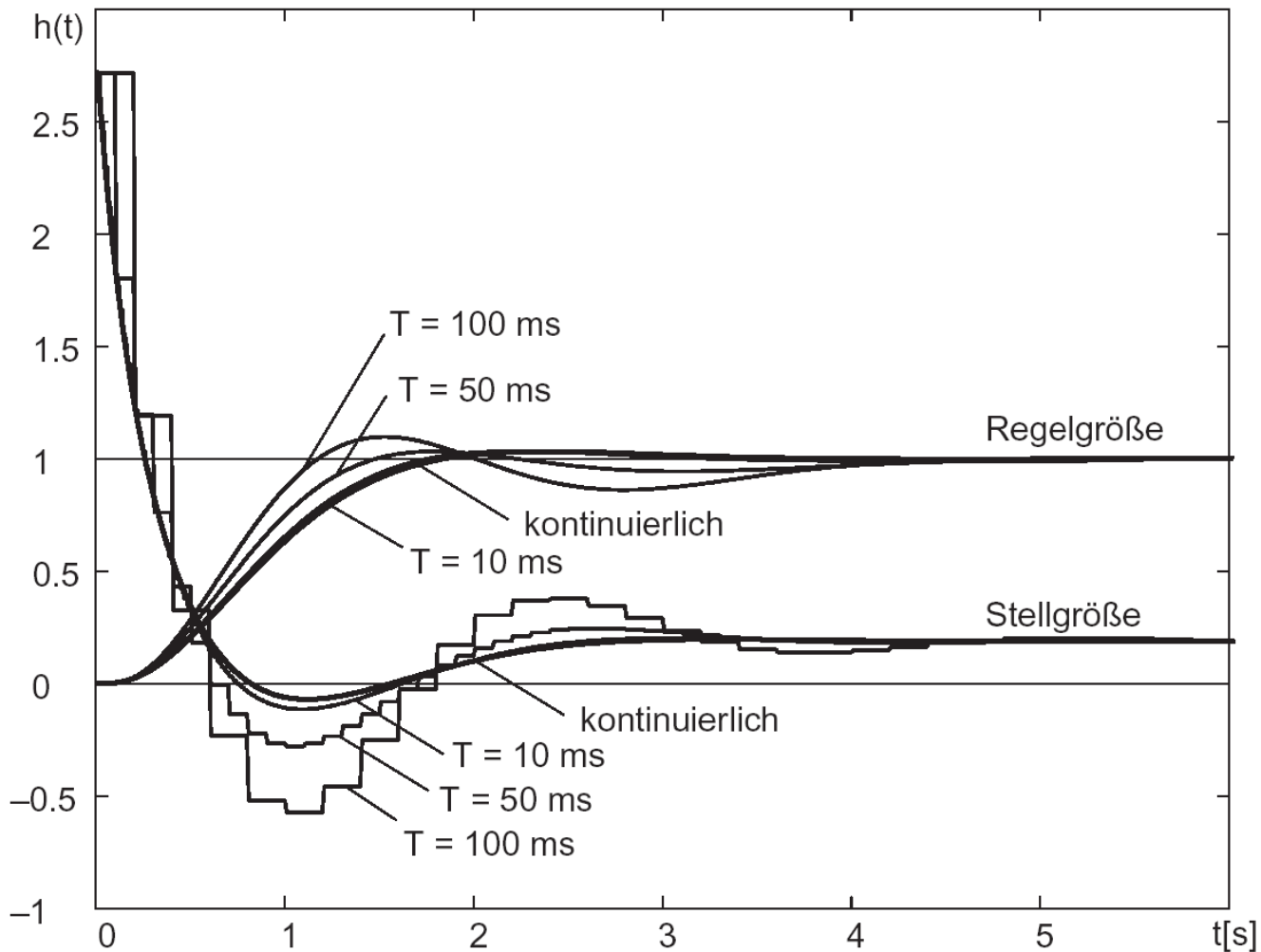


Kapitel 7

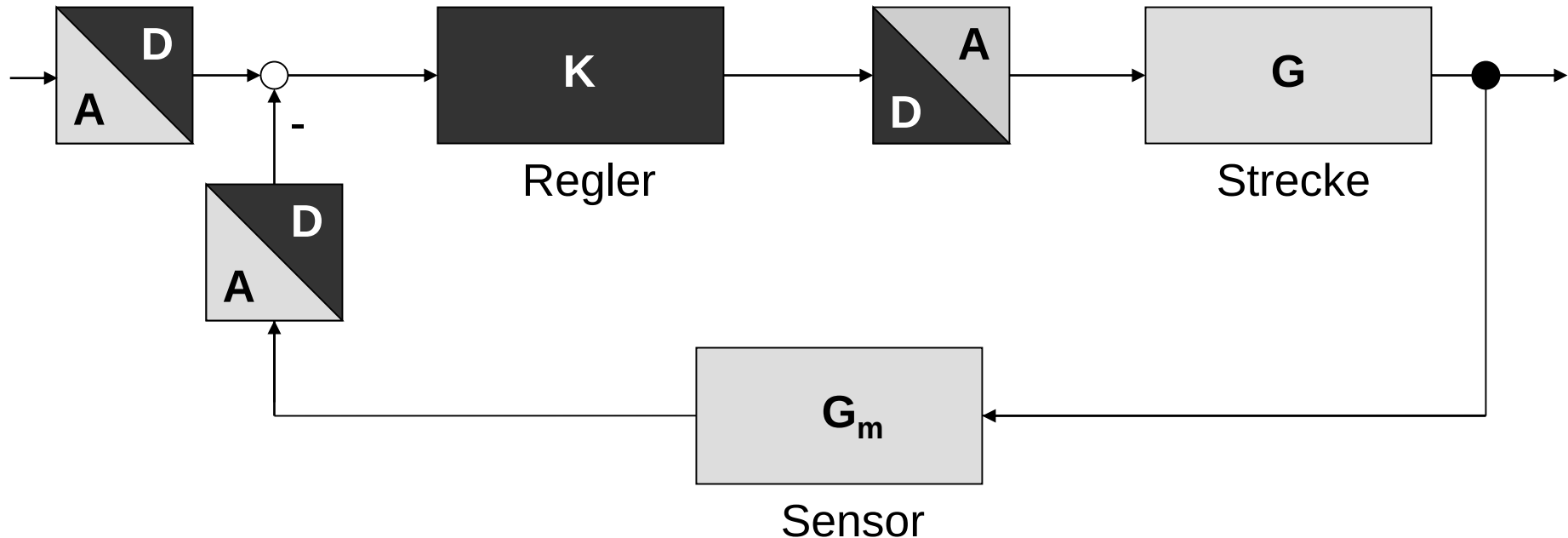
Regelungstechnik für Echtzeitsysteme in der Automatisierung

- **Zeitkontinuierliche Regelung:**
 - Gütekriterien
 - Vom offenen zum geschlossenen Regelkreis
 - PID-Regler
 - Beispiele für fortgeschrittene Regelverfahren
- **Zeitdiskrete Regelung:**
 - Warum zeitdiskrete Regelung?
 - Abtastung von Signalen
 - Shannon-Theorem & Alias-Effekt

Zeitdiskretes Signal



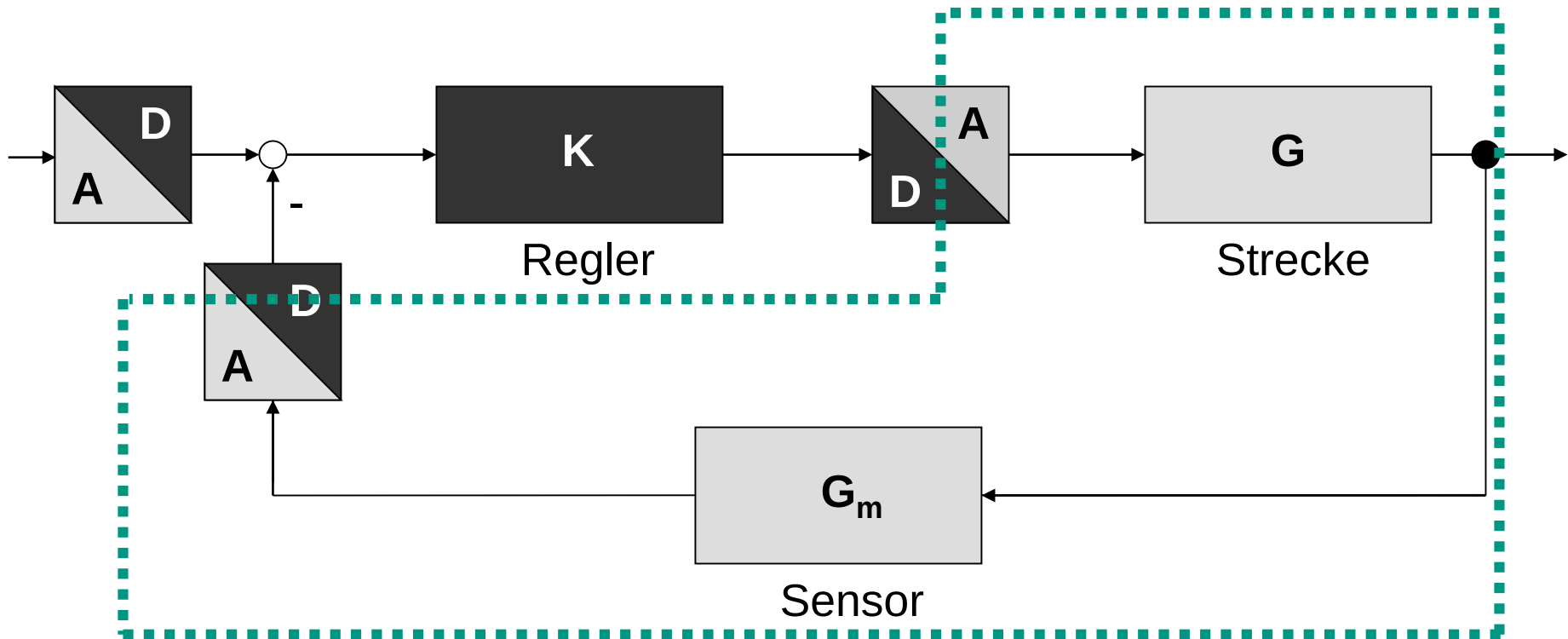
Regelkreis mit disk. Regler und kont. Strecke



diskret

kontinuierlich

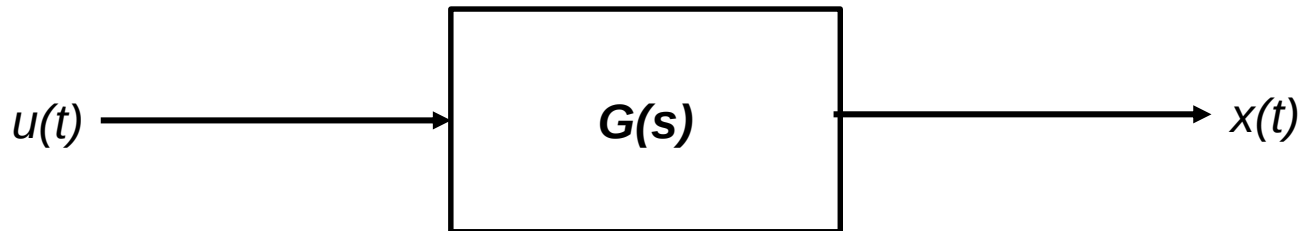
Regelkreis mit disk. Regler und kont. Strecke



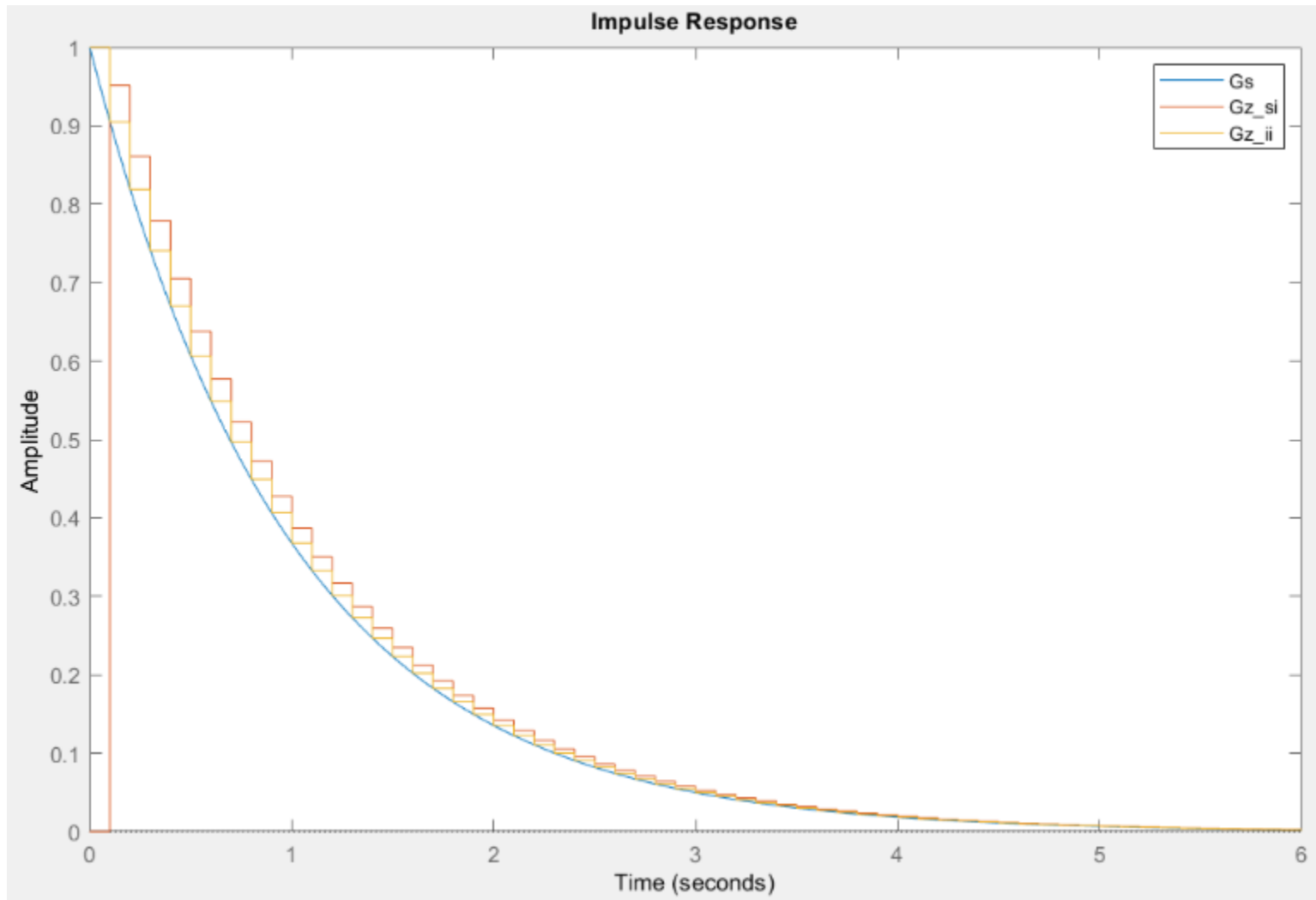
Was “sieht” der Regler?
→ zeitdiskrete Ersatzregelstrecke

Zeitdiskrete Ersatzregelstrecke $G(z)$

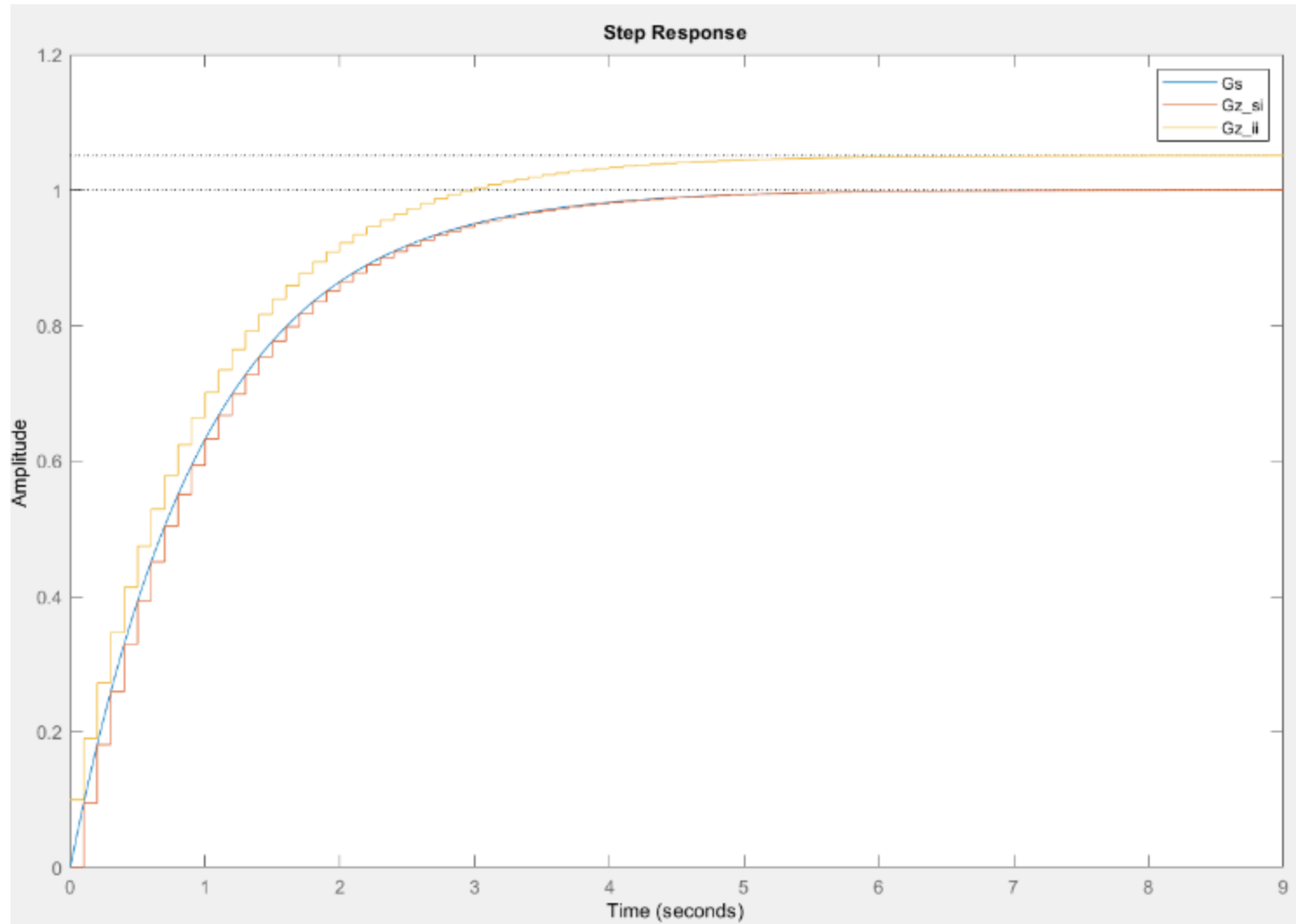
Überführung der zeitkontinuierlichen Regelstrecke
in eine zeitdiskrete Regelstrecke: Impulsantwort



Beispiel: Impulsantwort Ersatzregelstrecke

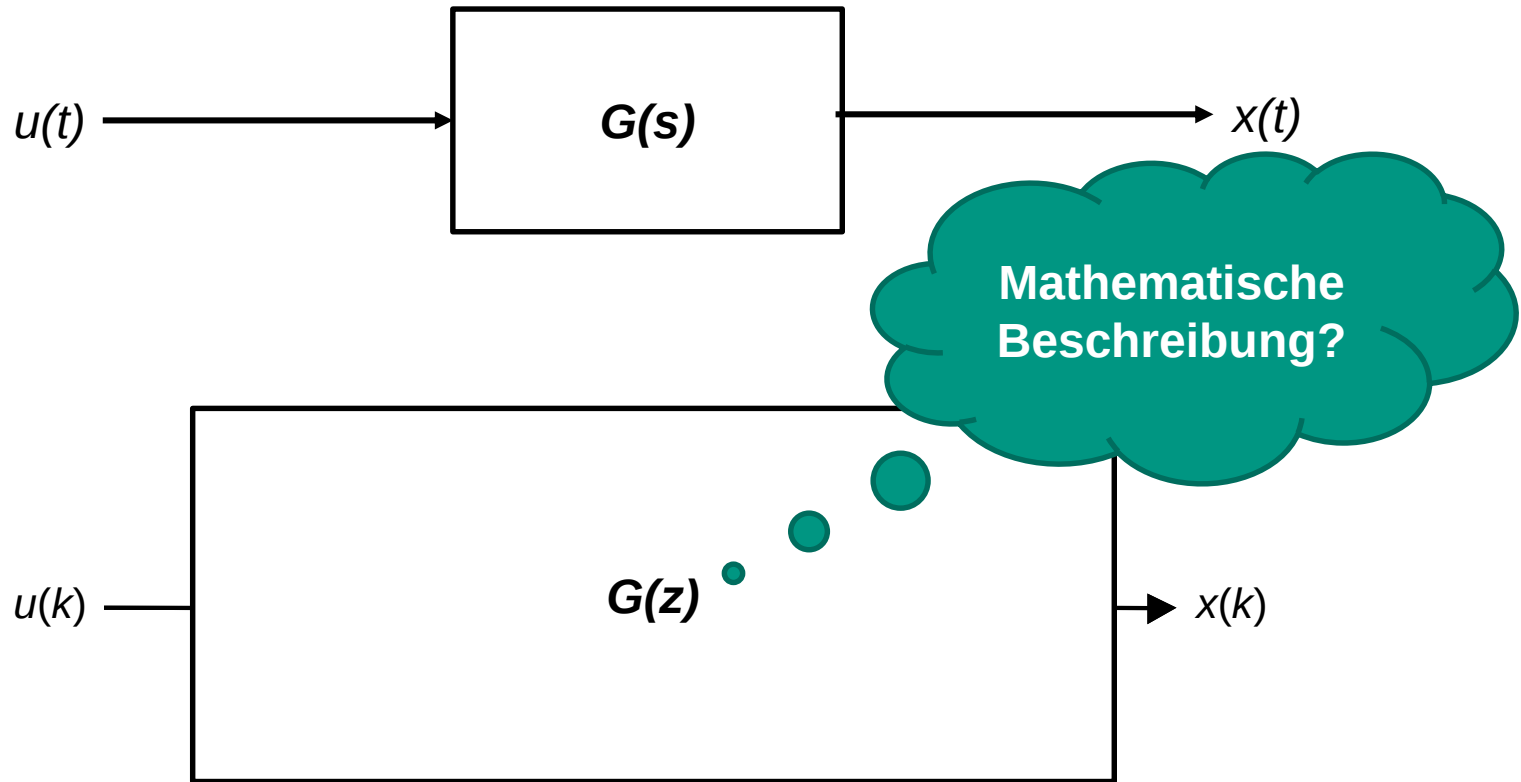


Beispiel: Sprungantwort Ersatzregelstrecke



Zeitdiskrete Ersatzregelstrecke $G(z)$

Überführung der zeitkontinuierlichen Regelstrecke
in eine zeitdiskrete Regelstrecke: Impulsantwort



	Zeitbereich	Frequenzbereich
Kontinuierlich	DGLs	Laplace-Trafo
Diskret	Differenzengleichungen	Z-Trafo

Von der DGL zur Differenzengleichung

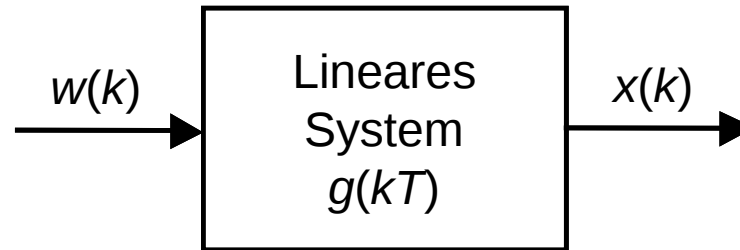
$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 w(t)$$



$$a_2 \frac{x(k) - 2x(k-1) + x(k-2)}{T_A^2} + a_1 \frac{x(k) - x(k-1)}{T_A} + a_0 x(k) = b_0 w(k);$$

$$a_2 \frac{x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}}{T_A^2} + a_1 \frac{x_k - x_{k-1}}{T_A} + a_0 x_k = b_0 w_k;$$

$$\left(\frac{a_2}{T_A^2} + \frac{a_1}{T_A} + a_0 \right) x_k + \left(\frac{-2a_2}{T_A^2} - \frac{a_1}{T_A} \right) x_{k-1} + \frac{a_2}{T_A^2} x_{k-2} = b_0 w_k;$$



$$x_{k+n} + a_1 x_{k+n-1} + \dots + a_{n-1} x_{k+1} + a_n x_k = b_0 u_{k+m} + b_1 u_{k+m-1} + \dots + b_{m-1} u_{k+1} + b_m u_k$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$x(t=0) = x_0; \quad x(t=T) = x_1; \dots, x(t=(n-1)T) = x_{n-1}$$

wobei $u_k = u(kT)$: Eingangsvariable

$x_k = x(kT)$: Ausgangsvariable

$t = t_k = kT \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$: Diskrete Zeitwerte

T : Abtastperiode

Existenzbedingung (Kausalität): $m \leq n$

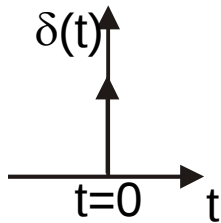
Mit $k \Rightarrow k-n,$
 $m = n$:

$$x_k = -a_1 x_{k-1} - \dots - a_{n-1} x_{k-n+1} - a_n x_{k-n} + b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_{n-1} u_{k-n+1} + b_n u_{k-n}$$

	Zeitbereich	Frequenzbereich
Kontinuierlich	DGLs	Laplace-Trafo
Diskret	Differenzengleichungen	Z-Trafo

Ein δ -Impuls ist folgendermaßen definiert:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$



und besitzt die Fläche

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Tastet man das Signal $x(t)$ ab, so erhält man als Ausgang des Abtasters eine Impulsfolge

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT)$$

Wendet man auf diese Impulsfolge die Laplace-Transformation an, so erhält man:

$$x^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{-kTs}$$

$$z = e^{Ts}$$

Ersetzt man nun den Ausdruck $e^{Ts} = z$, so wird aus der komplexen Funktion $x^*(s)$ eine Potenzreihe in z :

$$x_z(z) = [L\{x^*(t)\}]_{e^{Ts}=z} = [x^*(s)]_{e^{Ts}=z} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$$

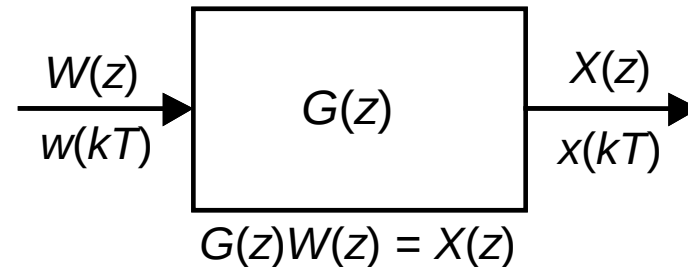
Eigenschaften der Z-Transformation

	Bezeichnung	Eigenschaft
1	Linearität	$Z\{c_1 f_1(kT) + c_2 f_2(kT)\} = c_1 F_1(z) + c_2 F_2(z)$
2	Ähnlichkeit	$Z\{a^{-k} f(kT)\} = F(a \cdot z)$
3	Dämpfung	$Z\{e^{-a k T} f(kT)\} = F(e^{a T} \cdot z)$
4	Rechtsverschiebung	$Z\{f(kT - nT)\} = z^{-n} \cdot Z\{f(kT)\} = z^{-n} \cdot F(z)$
5	Linksverschiebung	$Z\{f(kT + nT)\} = z^n \left(F(z) - \sum_{j=0}^{n-1} f(jT) z^{-j} \right)$
6	Faltung	$Z\{f_1(kT) \otimes f_2(kT)\} = Z\left\{ \sum_{j=0}^k f_1(kT - jT) \cdot f_2(jT) \right\} = F_1(z) \cdot F_2(z)$
7	Grenzwerte	$f(0+) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} \{F(z)\}$ Ausgangswert $f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \{(z-1) \cdot F(z)\}$ Endwert

Die Z-Übertragungsfunktion

$$x_{k+n} + a_1 x_{k+n-1} + \dots + a_{n-1} x_{k+1} + a_n x_k = b_0 u_{k+m} + b_1 u_{k+m-1} + \dots + b_{m-1} u_{k+1} + b_m u_k$$

Die Z-Übertragungsfunktion



Differenzengleichung:

$$x_{k+n} + a_1 x_{k+n-1} + \dots + a_{n-1} x_{k+1} + a_n x_k = b_0 w_{k+m} + b_1 w_{k+m-1} + \dots + b_{m-1} w_{k+1} + b_m w_k$$

Die Z-Transformierte der Differenzengleichung mit $X(z) = Z\{x_k\}$:

$$(z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n) X(z) = (b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m) W(z)$$

Z-Übertragungsfunktion $G(z)$:

$$G(z) = \frac{X(z)}{W(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}$$

Linksverschiebung

$$Z\{f(kT + nT)\} = z^n \left(F(z) - \sum_{j=0}^{n-1} f(jT) z^{-j} \right)$$

Blockschaltbild-Algebra möglich wie im Bildbereich bei zeitkontinuierlichen Systemen:

$$X(z) = G(z) \cdot W(z)$$

Laplace- und Z-Transformierte von analytischen Zeitfunktionen (1)

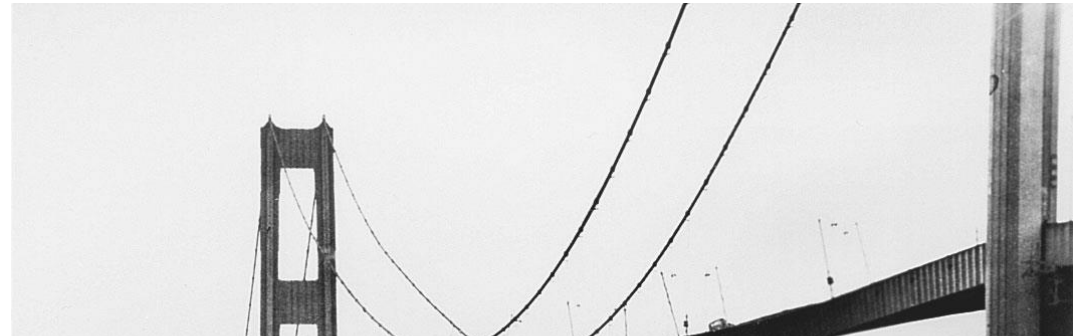
	$f(t) \equiv f(kT)$	$L\{f(t)\}$	$Z\{f(kT)\}$
1	Impuls $\delta(t)$	1	1
2	Sprungfunktion $\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
4	t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{T^2 z \cdot (z+1)}{(z-1)^3}$
5	t^3	$\frac{6}{s^4}$	$\frac{T^3 z \cdot (z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^4}$
6	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\partial^n}{\partial a^n} \left\{ \frac{z}{z - e^{aT}} \right\}$
7	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$

Stabilität

Stabilität ist eine der wichtigsten Systemeigenschaften in der Regelungstechnik. Instabile Systeme können im Realeinsatz ernste Probleme verursachen.

Instabile Systeme neigen zum “aufzuschwingen”. Dies kann bis zur Zerstörung des Systems führen.

Ein bekanntest Beispiel ist der durch Schwingungen verursachte Einsturz der Tacoma Bridge.



Heute: Stabilität für zeitdiskrete Systeme!



[File:Tacoma-narrows-bridge-collapse.jpg](#) - Wikimedia Commons

Rückblick: Stabilität bei zeitkont. Systemen

Definition BIBO-Stabilität:

Ein System ist BIBO-stabil, wenn es auf eine **beschränkte Eingangsgröße** immer mit einer **beschränkten Ausgangsgröße** antwortet
(“Bounded Input, Bounded Output → BIBO)

Wiederholung: Kriterium für Systempole im zeitkontinuierlichen Fall:

$$\operatorname{Re}\{s_i\} < 0$$

Stabilität bei zeitdiskreten Systemen

$$s = \sigma + j\omega; \operatorname{Re}\{s\} < 0$$

$$z = e^{Ts}$$

Z-Trafo

Frage: Welchem Kriterium entspricht dies im zeitdiskreten Fall?

Pole und Nullstellen der Z-Übertragungsfunktion

Die Z-Übertragungsfunktion kann auch als Quotient der Produkte ihrer Nullstellen und ihrer Pole beschrieben werden:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} = b_0 \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)}$$

Die Stabilitätsbedingung des entsprechenden zeitdiskreten Systems ist $|z| < 1$

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + i\omega)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{i\omega T}$$

$$|z| = |e^{\sigma T}| \cdot |e^{i\omega T}| = |e^{\sigma T}| \cdot 1$$

Dann gilt

$$|z| < 1 \quad \text{wenn} \quad \sigma < 0$$

Ein zeitdiskretes System ist dann asymptotisch stabil, wenn die Beträge aller seiner Pole kleiner als 1 sind

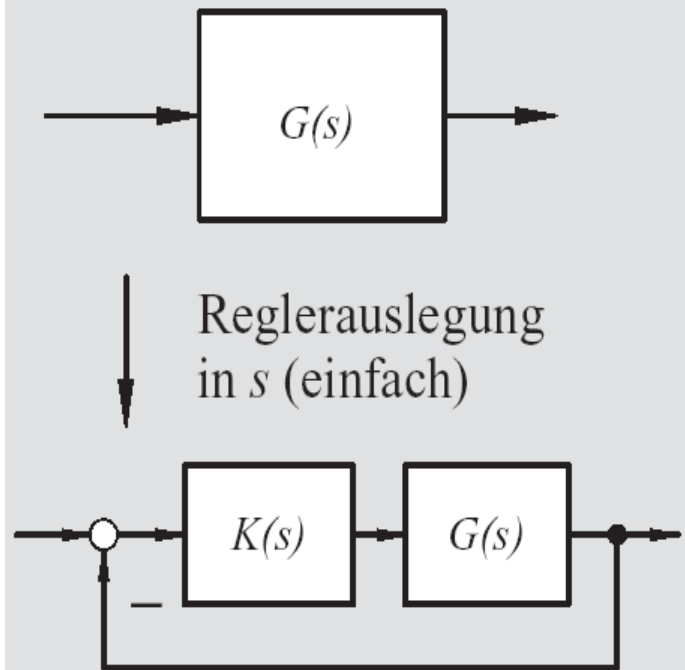
$$|p_j| = \sqrt{x_j^2 + y_j^2} < 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{und } p_j = x_j + iy_j$$

Zeitkontinuierliche Regler

Reglerentwurf erfolgt i.d.R. im **kontinuierlichen** Bereich (einfacher).
Die entstehenden Regler werden dann **diskretisiert** (s. Beispiel nächste Folie).
Es gibt auch Verfahren, um Regler direct im zeitdiskreten zu entwerfen, diese werden in der Praxis jedoch eher selten angewandt.

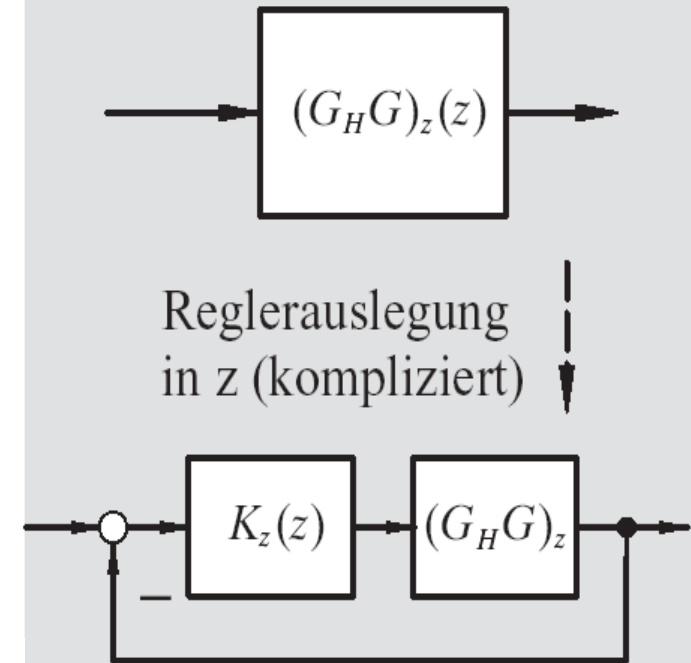
kontinuierlich



**z-Transformation
des Reglers**



zeitdiskret



Diskretisierung des PID-Reglers

PID Regler Gleichung:

$$u = K_p \left(e + \frac{1}{T_N} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_v \dot{e} \right),$$

T_N = Nachstellzeit

T_v = Vorhaltzeit

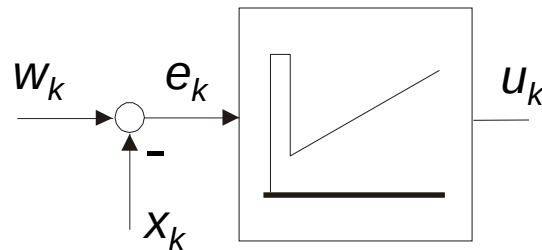
K_p = Übertragungsbeiwert

Der diskretisierte proportionale, integrierende und differenzierende Anteil bilden folgende Reglerfunktionen:

$$u_k = K_P \left[e_k + \frac{T}{T_N} \sum_{v=0}^{k-1} e_v + \frac{T_v}{T} (e_k - e_{k-1}) \right];$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Für eine konkrete Implementierung im Rechner ist ein rekursiver Algorithmus jedoch brauchbarer.



$$u_k = u_{k-1} + \Delta u$$

$$\Delta u = K_P \left[\left(1 + \frac{T_v}{T} \right) e_k + \left(-1 + \frac{T}{T_N} - 2 \frac{T_v}{T} \right) e_{k-1} + \frac{T_v}{T} e_{k-2} \right]$$

Z-Übertragungsfunktion des zeitdiskreten PID-Reglers

Die Z-Übertragungsfunktion des **PID-Reglers**

P-Anteil: $R_P(z) = K_P$

I-Anteil $u_k = K_P \frac{T}{T_N} \sum_{v=0}^{k-1} e_v$ **oder rekursiv:** $u_k = u_{k-1} + K_P \frac{T}{T_N} e_{k-1}$

$$U(z) = z^{-1}U(z) + K_P \frac{T}{T_N} z^{-1}E(z) \Rightarrow U(z) = K_P \frac{T}{T_N} \frac{1}{z-1} E(z)$$

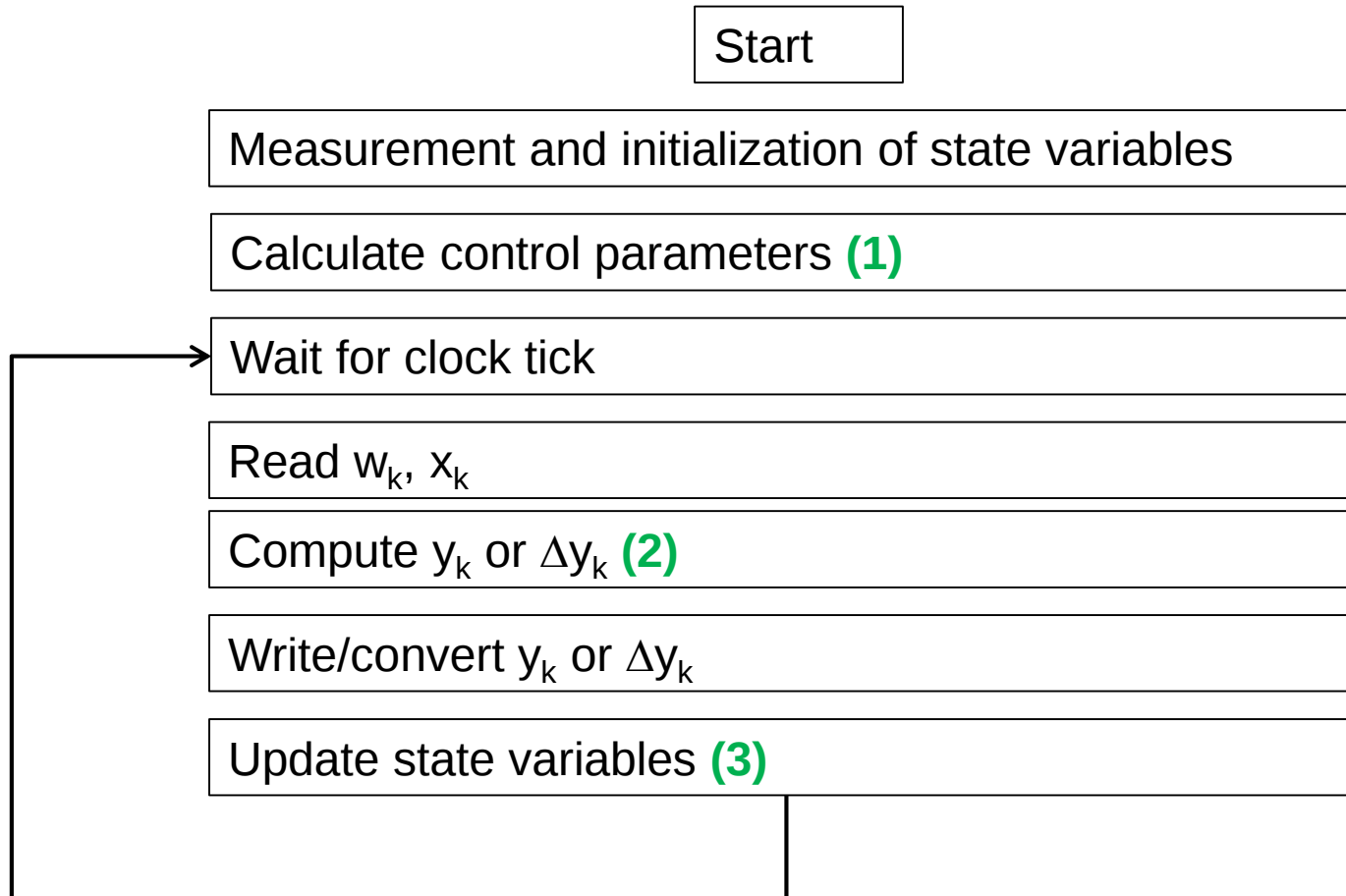
$$R_1(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_P \frac{T}{T_N} \frac{1}{z-1}$$

D-Anteil $u_k = K_P \frac{T_V}{T} (e_k - e_{k-1})$, $R_D(z) = K_P \frac{T_V}{T} \frac{z-1}{z}$

die Z-Übertragungsfunktion des gesamten PID-Reglers

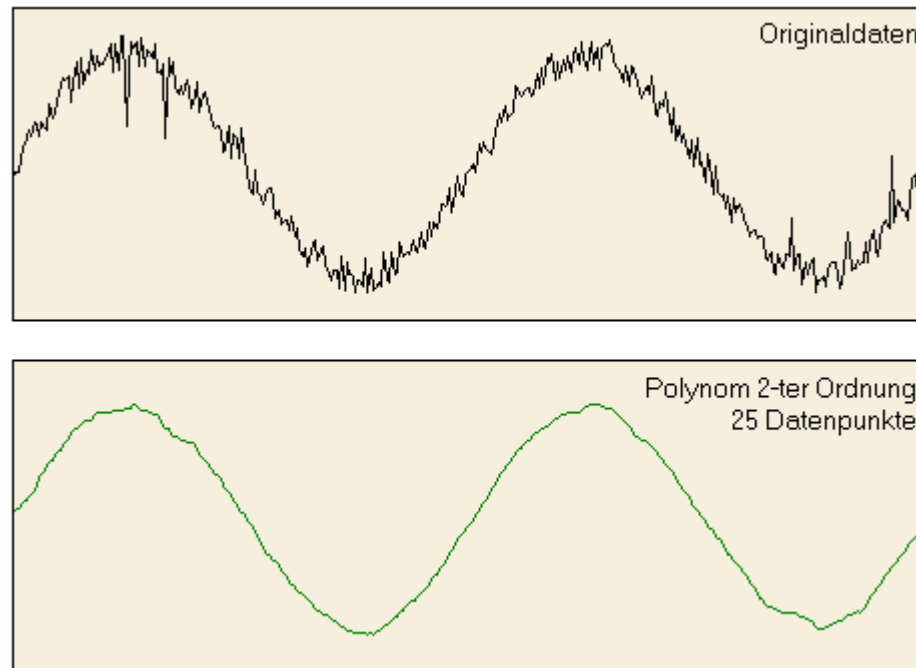
$$R_{PID}(z) = R_P(z) + R_I(z) + R_D(z) = K_P \frac{\left(1 + \frac{T_V}{T}\right)z^2 + \left(\frac{T}{T_N} - 2\frac{T_V}{T} - 1\right)z + \frac{T_V}{T}}{z^2 - z}$$

Praktische Umsetzung auf einem Mikrocontroller



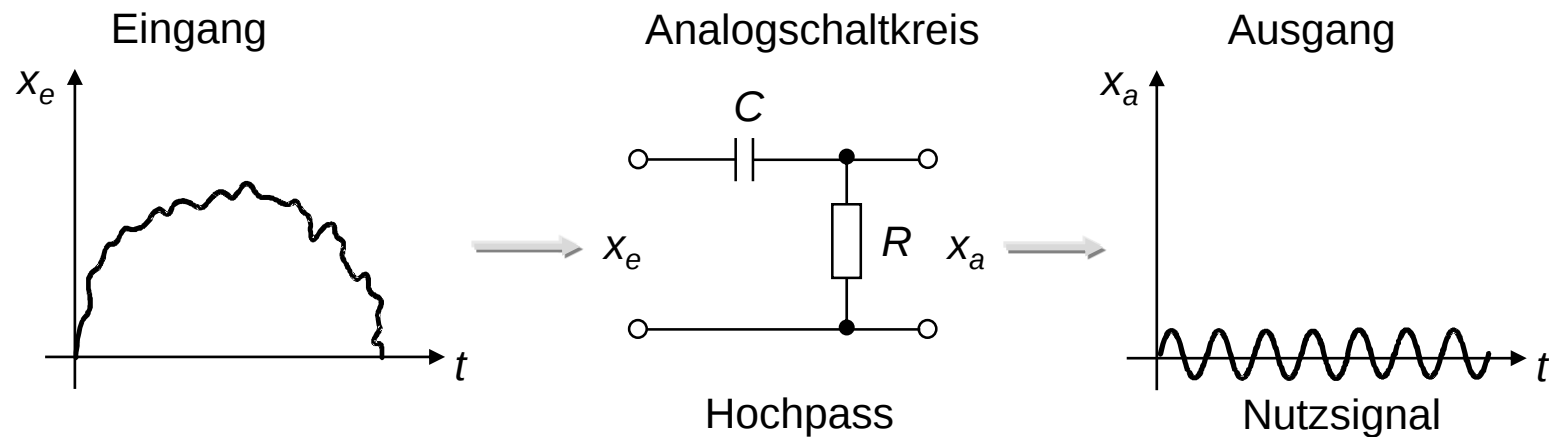
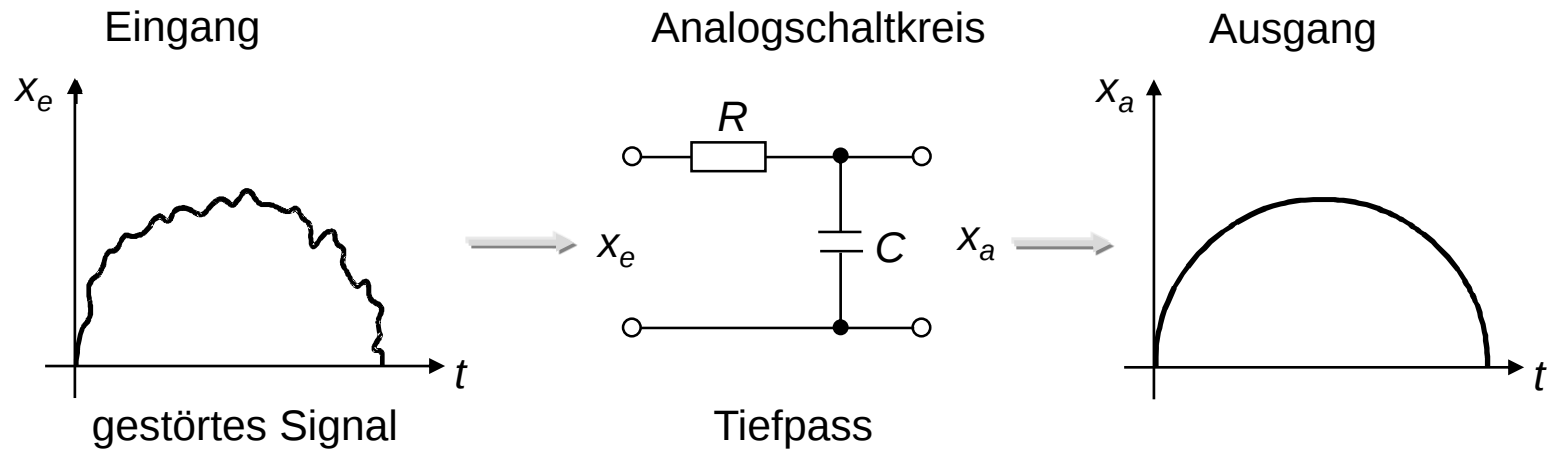
Digitale Filter können (wie auch Regler und Regelstrecken) mittels Differenzengleichungen und Z-Übertragungsfunktionen beschrieben werden.

Im Unterschied zu Reglern werden sie aber nicht zur Regelung, sondern zur Aufbereitung von Signalen genutzt (z.B. Glättung, Entfernung von Störungen)

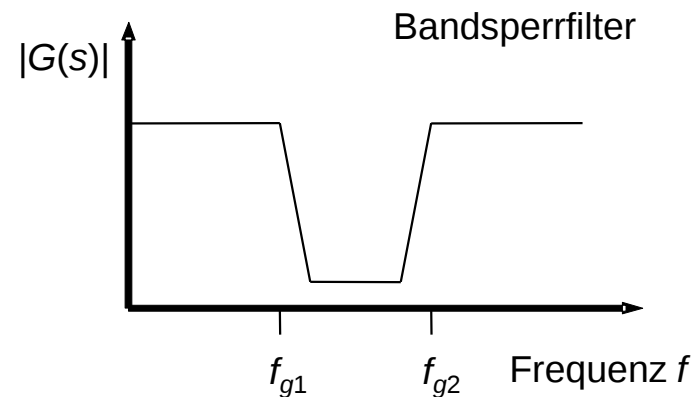
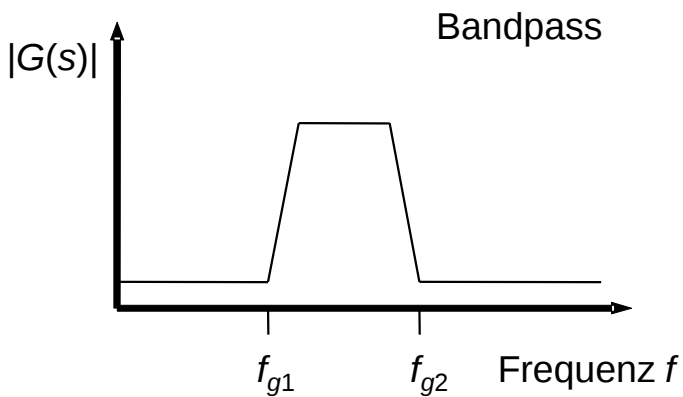
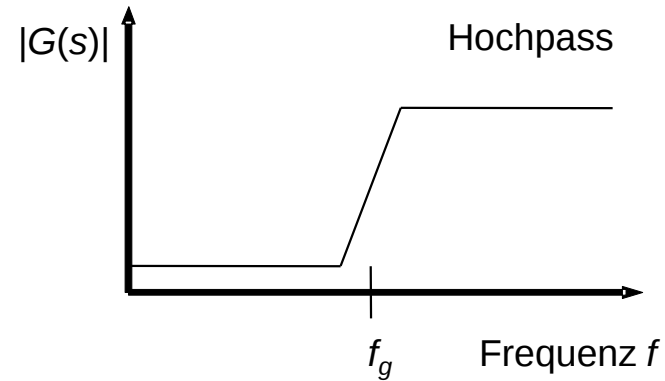
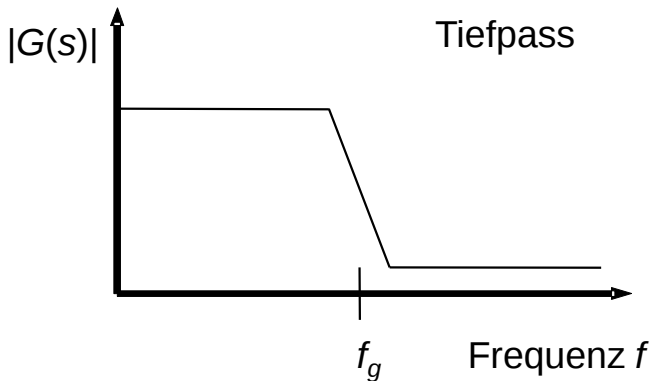


Bildquelle: http://www.statistics4u.info/fundstat_germ/cc_filter_savgolay.html

Tiefpass- und Hochpassfilter



Übersicht Filtertypen



Digitales Tiefpassfilter

$$RC \cdot \dot{x}_a + x_a = x_e, \quad \frac{dx_a}{dt} = \dot{x}_a$$

$$T \cdot \dot{x}_a + x_a = x_e, \quad (\text{mit } T = RC)$$

$$T \cdot \frac{\Delta x_a}{\Delta t} + x_a = x_e$$

$$\text{mit } \Delta x_a = x_{a,k} - x_{a,k-1}, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$T \cdot \frac{x_{a,k} - x_{a,k-1}}{T_a} + x_{a,k} = x_{e,k}$$

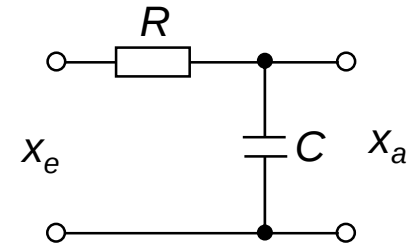
$$\text{mit } T_a = \text{Abtastperiode}, A = \frac{T}{T_a},$$

$$Ax_{a,k} - Ax_{a,k-1} + x_{a,k} - x_{a,k-1} + x_{a,k-1} = x_{e,k},$$

$$(1 + A)x_{a,k} = (1 + A)x_{a,k-1} + x_{e,k} - x_{a,k-1}$$

Der erwünschte Filteralgorithmus ist somit:

$$x_{a,k} = x_{a,k-1} + \frac{x_{e,k} - x_{a,k-1}}{1 + A}$$



$$I_c = C \frac{dU_c}{dt} = C \cdot \dot{x}_a$$

$$U_e = x_e = R \cdot C \cdot \dot{x}_a + x_a$$

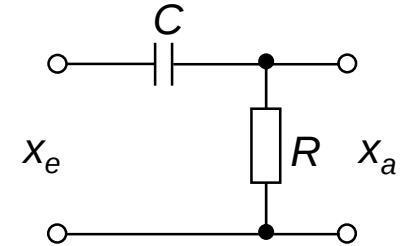
Digitales Hochpassfilter

Differentialgleichung für den Hochpassfilter:

$$T \cdot \dot{x}_a + x_a = \dot{x}_e$$

Der Filteralgorithmus:

$$x_{a,k} = \frac{T}{T + T_a} x_{a,k-1} + \frac{1}{T + T_a} (x_{e,k} - x_{e,k-1})$$



$$U_e = U_C + U_A$$

$$\dot{U}_e = \dot{U}_C + \dot{U}_A$$

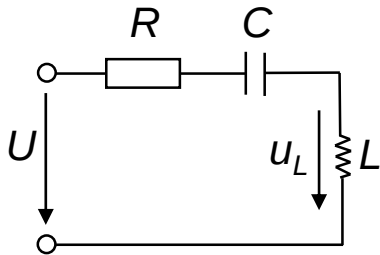
$$i = C \cdot \dot{U}_C = \frac{U_A}{R} \Rightarrow \dot{U}_C = \frac{U_A}{R \cdot C}$$

$$\dot{U}_e = \frac{U_A}{R \cdot C} + \dot{U}_A$$

Digitales Bandpassfilter I

Differentialgleichung für
das Bandpassfilter:

Herleitung des
Filteralgorithmus:



$$U = RC \frac{dU_c}{dt} + U_c + LC \frac{d^2 U_c}{dt^2}$$

$$I_c = C \frac{dU_c}{dt}$$

$$U_L = L \frac{dI}{dt}$$

$$x_a + T_1 \cdot \dot{x}_a + T_2^2 \cdot \ddot{x}_a = x_e$$

$$x_a + T_1 \cdot \frac{\Delta x_a}{\Delta t} + T_2^2 \cdot \frac{\Delta \left(\frac{\Delta x_a}{\Delta t} \right)}{\Delta t} = x_e,$$

$$x_{a,k} + T_1 \cdot \frac{x_{a,k} - x_{a,k-1}}{T_a} + T_2^2 \cdot \frac{\Delta \left(\frac{x_{a,k} - x_{a,k-1}}{T_a} \right)}{\Delta t} = x_{e,k},$$

$$x_{a,k} + T_1 \cdot \frac{x_{a,k} - x_{a,k-1}}{T_a} + T_2^2 \cdot \frac{\left(\frac{x_{a,k} - x_{a,k-1}}{T_a} \right) - \left(\frac{x_{a,k-1} - x_{a,k-2}}{T_a} \right)}{T_a} = x_{e,k},$$

$$x_{a,k} + T_1 \cdot \frac{x_{a,k} - x_{a,k-1}}{T_a} + T_2^2 \cdot \frac{x_{a,k} - 2x_{a,k-1} + x_{a,k-2}}{T_a^2} = x_{e,k}$$

$$x_{a,k} = K_0 \cdot (x_{e,k} + K_1 \cdot x_{a,k-1} + K_2 \cdot x_{a,k-2})$$

mit

$$K_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{T_1}{T_a} + \frac{T_2^2}{T_a^2}\right)}, \quad K_1 = \frac{T_1}{T_a} + \frac{2T_2^2}{T_a^2}, \quad K_2 = -\frac{T_2^2}{T_a^2}$$