Grundbegriffe der Informatik

Kapitel 3: Mengen, Alphabete, Abbildungen

Mattias Ulbrich
(basierend auf Folien von Thomas Worsch)

KIT · Institut für Theoretische Informatik

Wintersemester 2023/2024

Themen dieses Kapitels

Wo sind wir?

Karlsruher Institut für Technologie

Mengen

Alphabete

Relationen und Abbildungen

Mehr zu Mengen

Was ist denn eine Menge?

Karlsruher Institut für Technologie

Menge

Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterscheidbaren Objecten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Georg Cantor: *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*;
in: Mathematische Annalen (1895)

Menge — eine „Zusammenfassung“ von „Objekten“

Karlsruher Institut für Technologie

- Beispiel: die Menge, die
  - die Zahlen 1, 2 und 3 enthält
  - und nichts sonst
- Eine bestimmte Menge kann ein bestimmtes Objekt enthalten oder nicht.
  - hier wird nicht weiter hinterfragt oder erklärt
- Die Menge, die genau die Zahlen 1 und $2/2$ enthält,
  - enthält genau 1 Element
  - da 1 und $2/2$ nicht unterscheidbar sind.

Namen — als Abkürzungen und Variablen

Abkürzung

- *„Es bezeichne A die Menge, die*
  - *die Zahlen* $1, 2$ *und* 3 *enthält*
  - *und nichts sonst."*
- A nun *eine ganz bestimmte* Menge
  - $A = \{1, 2, 3\}$
- erlaubt Formulierungen wie
  - „In A ist die 42 nicht enthalten."

Namen — als Abkürzungen und Variablen

Abkürzung

- *„Es bezeichne A die Menge, die*
  - *die Zahlen* 1, 2 *und* 3 *enthält*
  - *und nichts sonst.“*
- A nun *eine ganz bestimmte* Menge
  - $A = \{1, 2, 3\}$
- erlaubt Formulierungen wie
  - „In A ist die 42 nicht enthalten.“

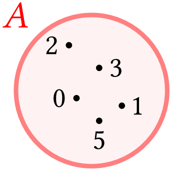
Variable

- *„Es sei x ein Objekt, das in A enthalten ist.“*
- x *kein* bestimmtes Objekt
  - Bedeutung etwa

    „Wir nehmen jetzt ein beliebiges Objekt her, das in A enthalten ist.
    Es ist gleichgültig, welches es ist.
    Wir nennen es x.“
- „x“ Platzhalter, durch jedes konkrete Objekt ersetzbar, das in A ist.

Eine Menge ist durch ihre Elemente festgelegt.

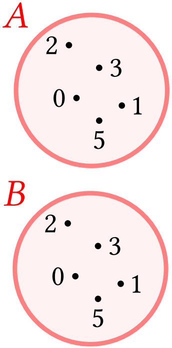
Karlsruher Institut für Technologie



- Es sei A eine Menge und x ein Objekt.
- x ist Element von A, wenn es in A enthalten ist.
  - geschrieben $x \in A$
  - Gegenteil $x \notin A$
- „Es sei x ein Element der Menge A"
  - kurz: „Es sei $x \in A$."
- Menge *eindeutig* bestimmt durch die enthaltenen Elemente:
  - es seien A und B zwei Mengen
  - $A = B$, wenn für jedes Objekt x gilt:

$$\text{wenn } x \in A, \text{ dann } x \in B \quad \text{und} \quad \text{wenn } x \in B, \text{ dann } x \in A\,.$$

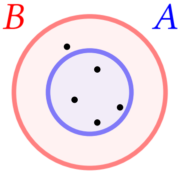
Eine Menge ist durch ihre Elemente festgelegt.



- Es sei A eine Menge und x ein Objekt.
- x ist Element von A, wenn es in A enthalten ist.
  - geschrieben $x \in A$
  - Gegenteil $x \notin A$
- „Es sei x ein Element der Menge A“
  - kurz: „Es sei $x \in A$.“
- Menge *eindeutig* bestimmt durch die enthaltenen Elemente:
  - es seien A und B zwei Mengen
  - $A = B$, wenn für jedes Objekt x gilt:

$$\text{wenn } x \in A, \text{ dann } x \in B \quad \text{und} \quad \text{wenn } x \in B, \text{ dann } x \in A\,.$$

Teilmengen



- es seien A und B zwei Mengen
- A Teilmenge von B und B Obermenge von A
  - geschrieben $A \subseteq B$ oder $B \supseteq A$
  - wenn jedes Element von A auch Element von B
- folglich:
  $A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$
- A *echte Teilmenge* von B, wenn $A \subseteq B$, aber $A \neq B$
  - Schreibweisen: $A \subsetneqq B$, $A \subsetneq B$ (oder gar $A \subset B$)

Notation „kleiner“ endlicher Mengen

- kleine Mengen:
  Aufzählung aller Elemente in geschweiften Klammern
  - $\{1, 2, 3, 4, 5, 42, \mathtt{A}, \mathtt{B}\}$
- leere Menge: gar keine Elemente
  - $\{\ \}$ oder $\emptyset$ oder $\varnothing$
- Achtung
  - $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 3, 3, 3\}$

Notation „großer“ Mengen

- ohne explizite Definition
  - $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ und $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
  - Pünktchen?
- *set comprehension, (einschränkende) Klassenterme*
  - es sei $P(x)$ eine Aussage
  - für jedes Objekt x wahr oder falsch
  - $\{x \in M \mid P(x)\}$ enthält genau die $y \in M$, für die $P(y)$ wahr ist
  - $\{x \mid P(x)\}$ falls das auch noch verständlich

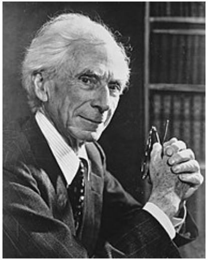
  - Beispiel: $\{x \in \mathbb{N}_+ \mid x \text{ ist ohne Rest durch 2 teilbar}\}$

Notation „großer“ Mengen

- ohne explizite Definition
  - $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ und $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
  - Pünktchen?
- *set comprehension, (einschränkende) Klassenterme*
  - es sei $P(x)$ eine Aussage
  - für jedes Objekt x wahr oder falsch
  - $\{x \in M \mid P(x)\}$ enthält genau die $y \in M$, für die $P(y)$ wahr ist
  - $\{x \mid P(x)\}$ falls das auch noch verständlich
  - Beispiel: $\{x \in \mathbb{N}_+ \mid x \text{ ist ohne Rest durch 2 teilbar}\}$
  - Vorsicht: nur «harmlose» Aussagen P nutzen …

Vorsicht!

Russells Paradoxon



Vereinigung und Durchschnitt zweier Mengen

- Es seien A und B zwei Mengen.
- Vereinigung $A \cup B$
  - Für jedes Objekt x gilt
    $x \in A \cup B$ genau dann, wenn $x \in A$ oder $x \in B$.
  - Beispiel $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Was ist, wenn eine der Mengen leer ist?

Vereinigung und Durchschnitt zweier Mengen

- Es seien A und B zwei Mengen.
- Vereinigung $A \cup B$
  - Für jedes Objekt x gilt
    $x \in A \cup B$ genau dann, wenn $x \in A$ oder $x \in B$.
    - das „oder“ ist ein „einschließendes oder“
  - Beispiel $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- Was ist, wenn eine der Mengen leer ist?

Vereinigung und Durchschnitt zweier Mengen

- Es seien A und B zwei Mengen.
- Vereinigung $A \cup B$
  - Für jedes Objekt x gilt
    $x \in A \cup B$ genau dann, wenn $x \in A$ oder $x \in B$.
    - das „oder" ist ein „einschließendes oder"
  - Beispiel $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Durchschnitt $A \cap B$
  - Für jedes Objekt x gilt
    $x \in A \cap B$ genau dann, wenn $x \in A$ und $x \in B$.
  - Beispiel $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$
  - disjunkte Mengen: $A \cap B = \{\}$
- Was ist, wenn eine der Mengen leer ist?

Eigenschaften von Vereinigung und Durchschnitt

Karlsruher Institut für Technologie

- Für alle Mengen A, B und C gilt:
  - $A \cup A = A$ und $A \cap A = A$
    Idempotenz von $\cup$ und $\cap$
  - $A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$
    Kommutativgesetze für $\cup$ und $\cap$
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ und $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
    Assoziativgesetze für $\cup$ und $\cap$
  - $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ und $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
    Distributivgesetze für $\cup$ und $\cap$
  - $A \subseteq A \cup B$ und $A \cap B \subseteq A$
- Das kann man alles beweisen.
  - tun wir es in einem Fall …

Beweis der Idempotenz von $\cup$

- Es sei A eine Menge.
- Zeige: $A = A \cup A$
- Wann sind diese beiden Mengen gleich? Wenn
  1. $A \subseteq A \cup A$
     - Jedes Element $x \in A$ ist auch Element von $A \cup A$.
  2. $A \cup A \subseteq A$
     - Jedes Element $x \in A \cup A$ ist auch Element von A.

Beweis der Idempotenz von $\cup$

- Es sei A eine Menge.
- Zeige: $A = A \cup A$
- Wann sind diese beiden Mengen gleich? Wenn
  1. $A \subseteq A \cup A$
     - Jedes Element $x \in A$ ist auch Element von $A \cup A$.
  2. $A \cup A \subseteq A$
     - Jedes Element $x \in A \cup A$ ist auch Element von A.
- Beweis von 1.

Beweis der Idempotenz von $\cup$

Karlsruher Institut für Technologie

- Es sei A eine Menge.
- Zeige: $A = A \cup A$
- Wann sind diese beiden Mengen gleich? Wenn
  1. $A \subseteq A \cup A$
     - Jedes Element $x \in A$ ist auch Element von $A \cup A$.
  2. $A \cup A \subseteq A$
     - Jedes Element $x \in A \cup A$ ist auch Element von A.
- Beweis von 1.
  - *Es sei $x \in A$.* beginne mit Voraussetzung

Beweis der Idempotenz von ∪

- Es sei A eine Menge.
- Zeige: $A = A \cup A$
- Wann sind diese beiden Mengen gleich? Wenn
  1. $A \subseteq A \cup A$
     - Jedes Element $x \in A$ ist auch Element von $A \cup A$.
  2. $A \cup A \subseteq A$
     - Jedes Element $x \in A \cup A$ ist auch Element von A.
- Beweis von 1.
  - *Es sei $x \in A$.* beginne mit Voraussetzung
  - *Also ist $x \in A \cup A$.*

Beweis der Idempotenz von $\cup$

Karlsruher Institut für Technologie

- Es sei A eine Menge.
- Zeige: $A = A \cup A$
- Wann sind diese beiden Mengen gleich? Wenn
  1. $A \subseteq A \cup A$
     - Jedes Element $x \in A$ ist auch Element von $A \cup A$.
  2. $A \cup A \subseteq A$
     - Jedes Element $x \in A \cup A$ ist auch Element von A.
- Beweis von 1.

Es sei $x \in A$.	beginne mit Voraussetzung
Dann ist $x \in A$ oder $x \in A$.	einfache logische Schlussfolgerung
Also ist $x \in A \cup A$.	nach Definition von $\cup$

Beweis der Idempotenz von $\cup$

- Es sei A eine Menge.
- Zeige: $A = A \cup A$
- Wann sind diese beiden Mengen gleich? Wenn
  1. $A \subseteq A \cup A$
     - Jedes Element $x \in A$ ist auch Element von $A \cup A$.
  2. $A \cup A \subseteq A$
     - Jedes Element $x \in A \cup A$ ist auch Element von A.
- Beweis von 2.

Beweis der Idempotenz von $\cup$

- Es sei A eine Menge.
- Zeige: $A = A \cup A$
- Wann sind diese beiden Mengen gleich? Wenn
  1. $A \subseteq A \cup A$
     - Jedes Element $x \in A$ ist auch Element von $A \cup A$.
  2. $A \cup A \subseteq A$
     - Jedes Element $x \in A \cup A$ ist auch Element von A.
- Beweis von 2.
  - *Es sei $x \in A \cup A$.* beginne mit Voraussetzung

Beweis der Idempotenz von $\cup$

- Es sei A eine Menge.
- Zeige: $A = A \cup A$
- Wann sind diese beiden Mengen gleich? Wenn
  1. $A \subseteq A \cup A$
     - Jedes Element $x \in A$ ist auch Element von $A \cup A$.
  2. $A \cup A \subseteq A$
     - Jedes Element $x \in A \cup A$ ist auch Element von A.
- Beweis von 2.
  - *Es sei $x \in A \cup A$.* beginne mit Voraussetzung
  - *Also ist $x \in A$.*

Beweis der Idempotenz von $\cup$

- Es sei A eine Menge.
- Zeige: $A = A \cup A$
- Wann sind diese beiden Mengen gleich? Wenn
  1. $A \subseteq A \cup A$
     - Jedes Element $x \in A$ ist auch Element von $A \cup A$.
  2. $A \cup A \subseteq A$
     - Jedes Element $x \in A \cup A$ ist auch Element von A.
- Beweis von 2.
  - *Es sei* $x \in A \cup A$. — beginne mit Voraussetzung
  - *Dann ist* $x \in A$ *oder* $x \in A$. — nach Definition von $\cup$
  - *Also ist* $x \in A$.

Beweis der Idempotenz von $\cup$

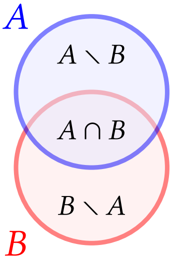
Karlsruher Institut für Technologie

- Es sei A eine Menge.
- Zeige: $A = A \cup A$
- Wann sind diese beiden Mengen gleich? Wenn
  1. $A \subseteq A \cup A$
     - Jedes Element $x \in A$ ist auch Element von $A \cup A$.
  2. $A \cup A \subseteq A$
     - Jedes Element $x \in A \cup A$ ist auch Element von A.
- Beweis von 2.
  - *Es sei $x \in A \cup A$.* — beginne mit Voraussetzung
  - *Dann ist $x \in A$ oder $x \in A$.* — nach Definition von $\cup$
  - *Also ist $x \in A$.* — einfache logische Schlussfolgerung

Mengendifferenz

- Es seien A und B zwei Mengen.
- Mengendifferenz $A \setminus B$ gelesen «A ohne B»
  - $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$
  - Beispiel $\{1, 2, 3\} \setminus \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$

Mengendifferenz



- Es seien A und B zwei Mengen.
- Mengendifferenz $A \setminus B$ gelesen «A ohne B»
  - $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$
  - Beispiel $\{1, 2, 3\} \setminus \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$

Kardinalität einer Menge — ihre „Größe“

Karlsruher Institut für Technologie

- Kardinalität einer Menge A
  - die Anzahl ihrer Elemente
  - hier nur für endliche Mengen definiert
  - notiert als $|A|$ (evtl. $\operatorname{card} A$ oder $\#A$)
- Beachte, dass zum Beispiel
  - $|\{1,2\}| + |\{2,3\}| = 2 + 2 = 4 \neq 3 = |\{1,2,3\}| = |\{1,2\} \cup \{2,3\}|$
- Für endliche Menge A ist $|A|$ eine nichtnegative ganze Zahl.
- Bei unendlichen Mengen reden *wir hier* nicht über ihre Kardinalität.
  - (Man kann das aber ordentlich definieren!)
- Alternativer Name: *Mächtigkeit*

Wo sind wir?

Mengen

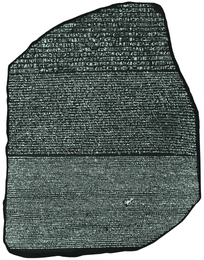
Alphabete

Relationen und Abbildungen

Mehr zu Mengen

Entschlüsselung der Hieroglyphen

Entschlüsselung der Hieroglyphen



Rosetta-Stein
196 v. Chr.
in drei Schriften

- Hieroglyphen
- Demotisch
- Griechisch

die *gleiche* Information

commons.wikimedia.org/wiki/File:Rosetta_Stone_BW.jpeg

Jean-François Champollion
1790 – 1832
wesentliche Beiträge zur Entzifferung der ägyptischen Hieroglyphen

en.wikipedia.org/wiki/Image:Jean-Francois_Champollion_2.jpg

Alphabet — eine endliche nichtleere Menge von Zeichen oder Symbolen

- Was ist ein „Zeichen“?
  - das hinterfragen wir nicht weiter …
  - elementare Bausteine für Inschriften
- Beispiele:
  - das deutsche Alphabet (lateinische Buchstaben)
  - $A = \{\mathtt{|}\}$, $\quad A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$, $\quad \ldots$
  - $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}, \mathtt{3}, \mathtt{4}, \mathtt{5}, \mathtt{6}, \mathtt{7}, \mathtt{8}, \mathtt{9}, \mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \mathtt{D}, \mathtt{E}, \mathtt{F}\}$
  - etwas kreativer: $A = \{\mathtt{1}, \mathtt{0}, \rotatebox{180}{\texttt{1}}\}$
- gelegentlich etwas abstrakter
  - jeder „Kasten“ *ein* Zeichen:
    $\boxed{\texttt{int}}\ \boxed{\texttt{adams}}\ \boxed{\texttt{=}}\ \boxed{\texttt{42}}\ \boxed{\texttt{;}}$

ASCII-Zeichensatz und Unicode — zwei wichtige Alphabete in der Informatik

- ASCII: *American Standard Code for Information Interchange*
  - u. a. 94 „druckbare“ und ein „unsichtbares“ Zeichen
  - es fehlen
    - z. B. ä, ç, è, ğ, ñ, œ, ß, ů, …
    - Kyrillisch, Japanisch, …
- Unicode: `http://www.unicode.org/charts/`
  - *ein sehr großes* Alphabet: ≈ 100 000 Zeichen
  - außerdem u. a.
    - Namen für Zeichen, z. B. „LATIN SMALL LETTER C WITH CEDILLA“ für ç
    - Sortierreihenfolge von Buchstaben (sprachabhängig)
    - Zuordnung Großbuchstaben ↔ Kleinbuchstaben
    - Schreibrichtung

ASCII-Zeichensatz

		40	(	50	2	60	<	70	F
		41	)	51	3	61	=	71	G
32	␣	42	*	52	4	62	>	72	H
33	!	43	+	53	5	63	?	73	I
34	"	44	,	54	6	64	@	74	J
35	#	45	-	55	7	65	A	75	K
⋮									⋮
84	T	94	^	104	h	114	r	124	|
85	U	95	_	105	i	115	s	125	}
86	V	96	‘	106	j	116	t	126	~
87	W	97	a	107	k	117	u		
88	X	98	b	108	l	118	v		
89	Y	99	c	109	m	119	w		

- jedes Zeichen hat Nummer
- „druckbare“ Zeichen zwischen 32 und 126
- „Leerzeichen“ ␣

Wo sind wir?

Mengen

Alphabete

Relationen und Abbildungen

Mehr zu Mengen

Paare — anders als Mengen

- Es seien A und B zwei Mengen und $a \in A$ und $b \in B$
- Paar (a, b) hat
  - erste Komponente a und
  - zweite Komponente b
- die beiden Komponenten dürfen gleich sein
  - $(1, 1)$ ist ein Paar
- Paare (a, b) und (x, y) genau dann gleich, wenn $a = x$ und $b = y$
  - also $(1, 2) \neq (2, 1)$

Kartesisches Produkt zweier Mengen

- Es seien A und B zwei Mengen.
- kartesisches Produkt $A \times B$
  $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$

Kartesisches Produkt zweier Mengen

- Es seien A und B zwei Mengen.
- kartesisches Produkt $A \times B$
  $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$
- Verallgemeinerung mit mehr Mengen, z. B.
  $M_1 \times M_2 \times M_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in M_1 \text{ und } x_2 \in M_2 \text{ und } x_3 \in M_3\}$
- mehrere gleiche Mengen: Schreibweise
  - M^2 statt $M \times M$
  - M^3 statt $M \times M \times M$

Allquantor und Existenzquantor

damit man nicht so viel schreiben muss …

- gleich zum ersten Mal:
  viele Formulierungen der Art
  - «Für jedes Element $x \in A$ gilt φ.»
  - «Es gibt ein Element $x \in A$, für das φ gilt.»

Empfehlung: Außerhalb logischer Formeln lieber ausschreiben!

Allquantor und Existenzquantor

damit man nicht so viel schreiben muss …

- gleich zum ersten Mal:
  viele Formulierungen der Art

$$\forall\, x \in A : \ \varphi$$

- «Für jedes Element $x \in A$ gilt φ.»
- «Es gibt ein Element $x \in A$, für das φ gilt.»

Empfehlung: Außerhalb logischer Formeln lieber ausschreiben!

Allquantor und Existenzquantor

damit man nicht so viel schreiben muss …

- gleich zum ersten Mal:
  viele Formulierungen der Art

$$\forall\, x \in A : \ \varphi$$

- «Für jedes Element $x \in A$ gilt φ.»

$$\exists\, x \in A : \ \varphi$$

- «Es gibt ein Element $x \in A$, für das φ gilt.»

  gemeint ist: «*mindestens* ein»

Empfehlung: Außerhalb logischer Formeln lieber ausschreiben!

Allquantor und Existenzquantor

damit man nicht so viel schreiben muss …

- gleich zum ersten Mal:
  viele Formulierungen der Art

$\forall\, x \in A : \;\varphi$

- «Für jedes Element $x \in A$ gilt φ.»

$\exists\, x \in A : \;\varphi$

- «Es gibt ein Element $x \in A$, für das φ gilt.»

  gemeint ist: «*mindestens* ein»

- weitere Abkürzungen wie
  - $\forall\, x, y \in A$ statt $\forall\, x \in A\; \forall\, y \in A$
  - weglassen von «$\in A$», wenn A klar ist
- mehr im Kapitel «Prädikatenlogik»

Empfehlung: Außerhalb logischer Formeln lieber ausschreiben!

Relationen — Paare in Beziehung stehender Elemente

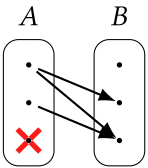
Karlsruher Institut für Technologie

- *Relation R*: Teilmenge $R \subseteq A \times B$
  - genauer *binäre Relation* von A in B
  - Beispiele:

$$(\mathtt{A}, 65) \in U \qquad \text{aber} \qquad (\mathtt{B}, 4711) \notin U$$

  - $(a, b) \in R$ auch gelesen: «a steht in Relation R zu b»
  - manchmal auch aRb
  - **Bsp:** $\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Wir schreiben $23 \leq 42$ nicht $(23, 42) \in \leq$.

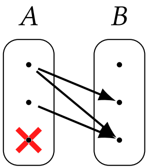
Abbildungen als spezielle Relationen



Unicoderelation $U \subseteq A_U \times \mathbb{N}_0$ hat „schöne“ Eigenschaften:

- Für jedes $a \in A_U$ existiert (mindestens) ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $(a, n) \in U$.
- $R \subseteq A \times B$ heißt *linkstotal*, wenn
  für jedes $a \in A$ ein $b \in B$ existiert mit $(a, b) \in R$.
- Für kein $a \in A_U$ gibt es mehrere $n \in \mathbb{N}_0$ mit $(a, n) \in U$.
- $R \subseteq A \times B$ heißt *rechtseindeutig*, wenn
  es für kein $a \in A$ zwei $b_1 \in B$ und $b_2 \in B$ mit $b_1 \neq b_2$ gibt, so dass sowohl $(a, b_1) \in R$ als auch $(a, b_2) \in R$ ist.
- Relationen, die linkstotal und rechtseindeutig sind, heißen *Abbildungen* oder *Funktionen*. Schreibweise $R : A \longrightarrow B$
  - A *Definitionsbereich* $\quad$ B *Zielbereich*
  - $(a, b) \in R$ schreibt man $R(a) = b$
  - b heißt *Funktionswert* an der Stelle a
- gelegentlich *partielle Funktionen:* rechtseindeutig, aber nicht notwendigerweise linkstotal **(‼ Diese Formulierung nachträglich geändert ‼)**

Abbildungen als spezielle Relationen



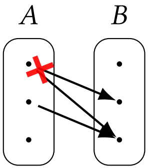
Unicoderelation $U \subseteq A_U \times \mathbb{N}_0$ hat „schöne" Eigenschaften:

- Für jedes $a \in A_U$ existiert (mindestens) ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $(a, n) \in U$.
- $R \subseteq A \times B$ heißt *linkstotal*, wenn
  $\forall\, a \in A \;\; \exists\, b \in B : (a, b) \in R$
- Für kein $a \in A_U$ gibt es mehrere $n \in \mathbb{N}_0$ mit $(a, n) \in U$.
- $R \subseteq A \times B$ heißt *rechtseindeutig*, wenn
  es für kein $a \in A$ zwei $b_1 \in B$ und $b_2 \in B$ mit $b_1 \neq b_2$ gibt, so dass sowohl $(a, b_1) \in R$ als auch $(a, b_2) \in R$ ist.
- Relationen, die linkstotal und rechtseindeutig sind, heißen *Abbildungen* oder *Funktionen*. Schreibweise $R : A \longrightarrow B$
  - A *Definitionsbereich* $\qquad B$ *Zielbereich*
  - $(a, b) \in R$ schreibt man $R(a) = b$
  - b heißt *Funktionswert* an der Stelle a
- gelegentlich *partielle Funktionen:* rechtseindeutig, aber nicht notwendigerweise linkstotal **(!! Diese Formulierung nachträglich geändert !!)**

Abbildungen als spezielle Relationen

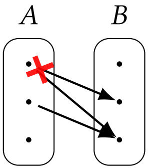
Unicoderelation $U \subseteq A_U \times \mathbb{N}_0$ hat „schöne“ Eigenschaften:

- Für jedes $a \in A_U$ existiert (mindestens) ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $(a, n) \in U$.
- $R \subseteq A \times B$ heißt *linkstotal*, wenn
  $\forall\, a \in A \;\; \exists\, b \in B : (a, b) \in R$



- Für kein $a \in A_U$ gibt es mehrere $n \in \mathbb{N}_0$ mit $(a, n) \in U$.
- $R \subseteq A \times B$ heißt *rechtseindeutig*, wenn
  es für kein $a \in A$ zwei $b_1 \in B$ und $b_2 \in B$ mit $b_1 \neq b_2$ gibt, so dass sowohl $(a, b_1) \in R$ als auch $(a, b_2) \in R$ ist.
- Relationen, die linkstotal und rechtseindeutig sind, heißen *Abbildungen* oder *Funktionen*. Schreibweise $R : A \longrightarrow B$
  - A *Definitionsbereich* $\qquad$ B *Zielbereich*
  - $(a, b) \in R$ schreibt man $R(a) = b$
  - b heißt *Funktionswert* an der Stelle a
- gelegentlich *partielle Funktionen:* rechtseindeutig, aber nicht notwendigerweise linkstotal **(!! Diese Formulierung nachträglich geändert !!)**

Abbildungen als spezielle Relationen



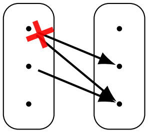
Unicoderelation $U \subseteq A_U \times \mathbb{N}_0$ hat „schöne“ Eigenschaften:

- Für jedes $a \in A_U$ existiert (mindestens) ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $(a, n) \in U$.
- $R \subseteq A \times B$ heißt *linkstotal*, wenn
  $\forall\, a \in A \;\; \exists\, b \in B : (a, b) \in R$
- Für kein $a \in A_U$ gibt es mehrere $n \in \mathbb{N}_0$ mit $(a, n) \in U$.
- $R \subseteq A \times B$ heißt *rechtseindeutig*, wenn
  nicht $\exists a \in A\ \exists b_1 \in B\ \exists b_2 \in B : b_1 \neq b_2$ und $(a, b_1) \in R$ und $(a, b_2) \in R$.
- Relationen, die linkstotal und rechtseindeutig sind, heißen *Abbildungen* oder *Funktionen*. Schreibweise $R : A \longrightarrow B$
  - A *Definitionsbereich* $\qquad B$ *Zielbereich*
  - $(a, b) \in R$ schreibt man $R(a) = b$
  - b heißt *Funktionswert* an der Stelle a
- gelegentlich *partielle Funktionen:* rechtseindeutig, aber nicht notwendigerweise linkstotal **(‼ Diese Formulierung nachträglich geändert ‼)**

Abbildungen als spezielle Relationen

Unicoderelation $U \subseteq A_U \times \mathbb{N}_0$ hat „schöne“ Eigenschaften:

- Für jedes $a \in A_U$ existiert (mindestens) ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $(a, n) \in U$.
- $R \subseteq A \times B$ heißt *linkstotal*, wenn
  $\forall\, a \in A \;\; \exists\, b \in B : (a, b) \in R$

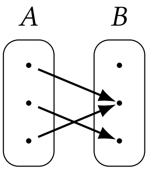


- Für kein $a \in A_U$ gibt es mehrere $n \in \mathbb{N}_0$ mit $(a, n) \in U$.
- $R \subseteq A \times B$ heißt *rechtseindeutig*, wenn
  $\forall a \in A\, \forall b_1 \in B\, \forall b_2 \in B :$ wenn $(a, b_1) \in R$ und $(a, b_2) \in R$, dann $b_1 = b_2$
- Relationen, die linkstotal und rechtseindeutig sind, heißen *Abbildungen* oder *Funktionen*. Schreibweise $R : A \longrightarrow B$
  - A *Definitionsbereich* $\qquad$ B *Zielbereich*
  - $(a, b) \in R$ schreibt man $R(a) = b$
  - b heißt *Funktionswert* an der Stelle a
- gelegentlich *partielle Funktionen:* rechtseindeutig, aber nicht notwendigerweise linkstotal **(‼ Diese Formulierung nachträglich geändert ‼)**

Abbildungen als spezielle Relationen

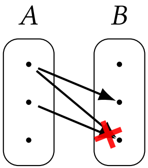
Unicoderelation $U \subseteq A_U \times \mathbb{N}_0$ hat „schöne“ Eigenschaften:

- Für jedes $a \in A_U$ existiert (mindestens) ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $(a, n) \in U$.
- $R \subseteq A \times B$ heißt *linkstotal*, wenn
  $\forall\, a \in A \ \ \exists\, b \in B : (a, b) \in R$
- Für kein $a \in A_U$ gibt es mehrere $n \in \mathbb{N}_0$ mit $(a, n) \in U$.
- $R \subseteq A \times B$ heißt *rechtseindeutig*, wenn
  $\forall a \in A\ \forall b_1 \in B\ \forall b_2 \in B :$ wenn $(a, b_1) \in R$ und $(a, b_2) \in R$, dann $b_1 = b_2$



- Relationen, die linkstotal und rechtseindeutig sind, heißen *Abbildungen* oder *Funktionen*. Schreibweise $R : A \longrightarrow B$
  - A *Definitionsbereich* B *Zielbereich*
  - $(a, b) \in R$ schreibt man $R(a) = b$
  - b heißt *Funktionswert* an der Stelle a
- gelegentlich *partielle Funktionen:* rechtseindeutig, aber nicht notwendigerweise linkstotal **(‼ Diese Formulierung nachträglich geändert ‼)**

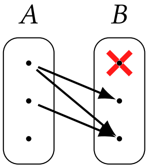
Spezielle Eigenschaften von Abbildungen — injektiv, surjektiv, bijektiv



- Verschiedene Unicodezeichen a_1, a_2 haben immer verschiedene Code Points n_1, n_2
- $R \subseteq A \times B$ heißt *linkseindeutig*, wenn
  $\forall (a_1, b_1) \in R \;\; \forall (a_2, b_2) \in R : \text{wenn } a_1 \neq a_2, \text{ dann } b_1 \neq b_2$.
- Eine Abbildung, die linkseindeutig ist, heißt *injektiv*.
- $R \subseteq A \times B$ heißt *rechtstotal*, wenn
  $\forall b \in B \; \exists \, a \in A : (a, b) \in R$
- Eine Abbildung, die rechtstotal ist, heißt *surjektiv*.
- Abbildung *bijektiv*, wenn sowohl injektiv als auch surjektiv

Spezielle Eigenschaften von Abbildungen — injektiv, surjektiv, bijektiv

- Verschiedene Unicodezeichen a_1, a_2 haben immer verschiedene Code Points n_1, n_2
- $R \subseteq A \times B$ heißt *linkseindeutig*, wenn
  $\forall (a_1, b_1) \in R \ \ \forall (a_2, b_2) \in R : \text{wenn } a_1 \neq a_2, \text{ dann } b_1 \neq b_2$.
- Eine Abbildung, die linkseindeutig ist, heißt *injektiv*.

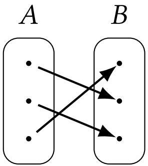


- $R \subseteq A \times B$ heißt *rechtstotal*, wenn
  $\forall b \in B \ \exists \ a \in A : (a, b) \in R$
- Eine Abbildung, die rechtstotal ist, heißt *surjektiv*.

- Abbildung *bijektiv*, wenn sowohl injektiv als auch surjektiv

Spezielle Eigenschaften von Abbildungen — injektiv, surjektiv, bijektiv

- Verschiedene Unicodezeichen a_1, a_2 haben immer verschiedene Code Points n_1, n_2
- $R \subseteq A \times B$ heißt *linkseindeutig*, wenn
  $\forall (a_1, b_1) \in R \;\; \forall (a_2, b_2) \in R :$ wenn $a_1 \neq a_2$, dann $b_1 \neq b_2$.
- Eine Abbildung, die linkseindeutig ist, heißt *injektiv*.



- $R \subseteq A \times B$ heißt *rechtstotal*, wenn
  $\forall b \in B \; \exists \, a \in A : (a, b) \in R$
- Eine Abbildung, die rechtstotal ist, heißt *surjektiv*.
- Abbildung *bijektiv*, wenn sowohl injektiv als auch surjektiv

Definition von Abbildungen

- immer Definitions- und Zielbereich angeben
  - $f\colon A \longrightarrow B$
- Spezifikation von Funktionswerten z. B. so

$$x \longmapsto \text{Ausdruck, in dem } x \text{ vorkommen darf}$$

  - Name (hier x) für den Wert, auf den Abbildung angewendet wird.
- oder z. B. so

$$(x, y) \longmapsto \text{Ausdruck, in dem } x \text{ und } y \text{ vorkommen dürfen}$$

  - Abbildung wird auf Paar angewendet
  - Namen (x und y) für seine „Bestandteile“

Definition von Abbildungen: Beispiel

- $$f\colon \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0,\ n \mapsto \begin{cases} n/2, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 3n+1, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

- Namen sind irrelevant
  das ist die gleiche Abbildung:

  $$g\colon \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0,\ x \mapsto \begin{cases} 3x+1, & \text{falls } x \text{ ungerade,} \\ x/2, & \text{falls } x \text{ gerade.} \end{cases}$$

Definition von Abbildungen: Beispiel

- $$f\colon \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0,\ n \mapsto \begin{cases} n/2, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 3n+1, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

→„Collatz“

- Namen sind irrelevant
  das ist die gleiche Abbildung:

$$g\colon \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0,\ x \mapsto \begin{cases} 3x+1, & \text{falls } x \text{ ungerade,} \\ x/2, & \text{falls } x \text{ gerade.} \end{cases}$$

Zu jeder Abbildung gehören Definitions- und Zielbereich

Karlsruher Institut für Technologie

$\mathbb{R}_0^+$: die reellen Zahlen ≥ 0

- Um die Injektivität von $f : A \to B$ beurteilen zu können, muss man A kennen:
  - $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto x^2$ ist injektiv, aber
  - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv
- Um die Surjektivität von $f : A \to B$ beurteilen zu können, muss man B kennen:
  - $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto x^2$ ist surjektiv, aber
  - $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist nicht surjektiv
- Zu einer Abbildung gehören
  - der Definitionsbereich A und
  - der Zielbereich B
  - die Abbildungsvorschrift
  - analog für Relationen

noch ein kleines bisschen Notation

- Es sei $f: A \to B$ und $M \subseteq A$

$$f(M) = \{b \in B \mid \text{ es gibt ein } a \in M \text{ mit } f(a) = b\}$$

- Abkürzung bei set comprehensions

  statt $\{b \in B \mid \text{es gibt ein } a \text{ mit } f(a) = b \text{ und } P(a)\}$

  kurz $\{f(a) \mid P(a)\}$

- damit $f(M) = \{f(a) \mid a \in M\}$
- bei Relationen $R \subseteq A \times B$ manchmal
  $R(a)$ für $R(a) = \{ b \mid (a, b) \in R\}$
- manchmal auch $R[a] = \{ b \mid (a, b) \in R\}$
  (um von Anwendung einer Funktion zu unterscheiden)

Wo sind wir?

Mengen

Alphabete

Relationen und Abbildungen

Mehr zu Mengen

Die Elemente einer Menge können selbst Mengen sein

- Diese Menge enthält *sieben* Elemente:

$$M = \{\ 1,\ \ \{2,3\},\ \ 4,\ \ 5,\ \ 6,\ \ \{7,8,9\},\ \ \{\}\ \}$$

- Die Menge $\{\ \{\}\ \}$ enthält *ein* Element.

Menge aller Funktionen von A nach B

- für Mengen A und B schreibe

$$B^A = \{f \mid f \text{ ist Funktion } f\colon A \to B\}$$

- für endliche Mengen gilt: $|B^A| = |B|^{|A|}$

- Setze als Mengen (Konstruktion nach John von Neumann)

$$\begin{aligned} 0 &= \{\} & 2 &= \{0,1\} \\ 1 &= \{0\} & 3 &= \{0,1,2\} = 2 \cup \{2\} \end{aligned} \qquad \text{usw.}$$

- $B^2 = B^{\{0,1\}} = \{f \mid f : \{0,1\} \to B\}$
  $p \in B^2$ ist damit eine Funktion und $p(0)$ und $p(1)$ die Komponenten.

Potenzmenge einer Menge M — alle Teilmengen

- Es sei M eine Menge.
- Potenzmenge von M

$$\mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$$

- andere Notation 2^M oder $\mathfrak{P}(M)$
- Beispiel $M = \{1\}$

$$\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(\{1\}) = \{\ \{\}, \{1\}\ \}$$

- Beispiel $M = \{1, 2, 3\}$.

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\{\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1, 2\},\ \{1, 3\},\ \{2, 3\},\ \{1, 2, 3\}\}$$

- $A \in \mathcal{P}(M)$ äquivalent zu $A \subseteq M$

Wie kommt es zur Notation 2^M für die Potenzmenge?

- Was bedeutet 2^M? Wie kann die Zahl 2 eine Menge sein?
- Erinnerung: Neumann-Konstruktion $2 = \{0, 1\}$
- Damit ist 2^M das gleiche wie $\{0, 1\}^M$ und das wiederum gleich der Menge der Funktionen $\chi : M \longrightarrow \{0, 1\}$.
- Sei $A \subseteq M$. Die Funktion $\chi_A : M \longrightarrow \{0, 1\}$ wird dann auch **charakteristische Funktion** von A (bezüglich M) genannt und ist definiert durch

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

„Große“ Vereinigungen und Durchschnitte

- Es seien I und M zwei Mengen und $f : I \longrightarrow 2^M$.
- z. B. $I = \{1, 2\}$ oder $I = \mathbb{N}_0$ oder ...
- schreibe M_i statt $f(i)$
- definiere

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \mid \text{es gibt ein } i \in I \text{ so, dass } x \in M_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} M_i = \{x \mid \text{für jedes } i \in I \text{ ist } x \in M_i\}$$

- für $I = \{1, 2\}$ ist
  - $\bigcup_{i \in I} M_i = M_1 \cup M_2$
  - $\bigcap_{i \in I} M_i = M_1 \cap M_2$

Was ist wichtig

Karlsruher Institut für Technologie

- Das sollten Sie mitnehmen:
  - *Alphabete*
    - ASCII und Unicode sind wichtige Beispiele
  - *binäre Relationen*
  - *Abbildungen*
    - Spezialfälle: injektiv, surjektiv, bijektiv, partiell

- Das sollten Sie üben:
  - Benutzung der Begriffe Alphabet, Relation, Abbildung
  - „Rechnen“ mit Mengen
  - einfaches Argumentieren