Grundbegriffe der Informatik

Kapitel 6: Induktives Vorgehen

Mattias Ulbrich
(basierend auf Folien von Thomas Worsch)

KIT · Institut für Theoretische Informatik

Wintersemester 2023/2024

Themen dieses Kapitels

Vollständige Induktion ist ein Beweisprinzip, das auf einer fundamentalen Eigenschaft der natürlichen Zahlen fußt.

Wegen einer Reihe hilfreicher **Varianten** wird Induktion oft angewendet.

Induktive Definitionen haben ihren Namen daher, dass man oft mit vollständiger Induktion nachweisen kann, dass eine solche Definition „lückenlos“ ist.

Wo sind wir?

Vollständige Induktion

Varianten vollständiger Induktion

Induktive Definitionen

Eine Erinnerung

- *Potenzen von Wörtern* wurden so definiert für jedes Wort $w \in A^*$:

$$\begin{aligned} w^0 &= \varepsilon \\ \text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0 : \quad w^{n+1} &= w^n \cdot w \end{aligned}$$

- Lemma. Für jedes Wort $w \in A^*$ gilt: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $|w^n| = n \cdot |w|$.
- Wie beweist man das?

Induktive Definitionen kann man zu Rechnen benutzen

- Definition

$$w^0 = \varepsilon$$
$$\text{für alle } n \in \mathbb{N}_0: \; w^{n+1} = w^n \cdot w$$

- Was ist w^1 ?

$$w^1 = w^{0+1} = w^0 \cdot w = \varepsilon \cdot w = w$$

- Was ist w^2 ?

$$w^2 = w^{1+1} = w^1 \cdot w = w \cdot w$$

- Was ist w^3 ?

$$w^3 = w^{2+1} = w^2 \cdot w = (w \cdot w) \cdot w$$

Das Lemma über Wortlängen — einfache Fälle

- $n = 0$: Das ist einfach: $|w^0| = |\varepsilon| = 0 = 0 \cdot |w|$.
- $n = 1$: Man kann ähnlich rechnen wie bei $w^1 = w$:

$$\begin{aligned} |w^1| = |w^{0+1}| = |w^0 \cdot w| &= |w^0| + |w| \\ &= 0|w| + |w| && \text{siehe Fall } n = 0 \\ &= 1|w| \end{aligned}$$

  weil für $n = 0$ richtig auch für $n = 1$ beweisbar

- $n = 2$: Wir gehen analog zu eben vor:

$$\begin{aligned} |w^2| = |w^{1+1}| = |w^1 \cdot w| &= |w^1| + |w| \\ &= 1|w| + |w| && \text{siehe Fall } n = 1 \\ &= 2|w| \end{aligned}$$

  weil für $n = 1$ richtig auch für $n = 2$ beweisbar

Vollständige Induktion — Peano-Axiome

Karlsruher Institut für Technologie

Teil der üblichen Definition von $\mathbb{N}_0$

Die folgenden Aussagen charakterisieren die natürlichen Zahlen vollständig:

1. 0 ist eine natürliche Zahl.

Peano Axiome

2. Der Nachfolger $n+1$ einer natürlichen Zahl n ist eine natürliche Zahl.
3. Keine natürliche Zahl hat die 0 als Nachfolger.
4. Haben zwei natürliche Zahlen n und m denselben Nachfolger, dann sind sie dieselbe Zahl.
5. Wenn eine Menge M von natürlichen Zahlen die 0 enthält und für jede Zahl n in M auch ihr Nachfolger $n+1$ in M liegt, so ist M die Menge aller natürlichen Zahlen.

Vollständige Induktion — Peano-Axiome

Teil der üblichen Definition von $\mathbb{N}_0$

Die folgenden Aussagen charakterisieren die natürlichen Zahlen vollständig:

1. $0 \in \mathbb{N}_0$

Peano Axiome

2. Der Nachfolger $n+1$ einer natürlichen Zahl n ist eine natürliche Zahl.
3. Keine natürliche Zahl hat die 0 als Nachfolger.
4. Haben zwei natürliche Zahlen n und m denselben Nachfolger, dann sind sie dieselbe Zahl.
5. Wenn eine Menge M von natürlichen Zahlen die 0 enthält und für jede Zahl n in M auch ihr Nachfolger $n+1$ in M liegt, so ist M die Menge aller natürlichen Zahlen.

Vollständige Induktion — Peano-Axiome

Teil der üblichen Definition von $\mathbb{N}_0$

Die folgenden Aussagen charakterisieren die natürlichen Zahlen vollständig:

Peano Axiome

1. $0 \in \mathbb{N}_0$
2. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $n+1 \in \mathbb{N}_0$
3. Keine natürliche Zahl hat die 0 als Nachfolger.
4. Haben zwei natürliche Zahlen n und m denselben Nachfolger, dann sind sie dieselbe Zahl.
5. Wenn eine Menge M von natürlichen Zahlen die 0 enthält und für jede Zahl n in M auch ihr Nachfolger $n+1$ in M liegt, so ist M die Menge aller natürlichen Zahlen.

Vollständige Induktion — Peano-Axiome

Teil der üblichen Definition von $\mathbb{N}_0$

Peano Axiome

Die folgenden Aussagen charakterisieren die natürlichen Zahlen vollständig:

1. $0 \in \mathbb{N}_0$
2. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $n + 1 \in \mathbb{N}_0$
3. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $n + 1 \neq 0$
4. Haben zwei natürliche Zahlen n und m denselben Nachfolger, dann sind sie dieselbe Zahl.
5. Wenn eine Menge M von natürlichen Zahlen die 0 enthält und für jede Zahl n in M auch ihr Nachfolger $n + 1$ in M liegt, so ist M die Menge aller natürlichen Zahlen.

Vollständige Induktion — Peano-Axiome

Teil der üblichen Definition von $\mathbb{N}_0$

Die folgenden Aussagen charakterisieren die natürlichen Zahlen vollständig:

1. $0 \in \mathbb{N}_0$

Peano Axiome

2. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $n+1 \in \mathbb{N}_0$
3. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $n+1 \neq 0$
4. Für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $n+1 = m+1 \implies n = m$
5. Wenn eine Menge M von natürlichen Zahlen die 0 enthält und für jede Zahl n in M auch ihr Nachfolger $n+1$ in M liegt, so ist M die Menge aller natürlichen Zahlen.

Vollständige Induktion — Peano-Axiome

Karlsruher Institut für Technologie

Teil der üblichen Definition von $\mathbb{N}_0$

Die folgenden Aussagen charakterisieren die natürlichen Zahlen vollständig:

1. $0 \in \mathbb{N}_0$

Peano Axiome

2. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $n + 1 \in \mathbb{N}_0$
3. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $n + 1 \neq 0$
4. Für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $n + 1 = m + 1 \implies n = m$
5. Für alle $M \subseteq \mathbb{N}_0$ gilt: Wenn $0 \in M$ und für jedes $n \in M$ gilt $n + 1 \in M$, dann ist $M = \mathbb{N}_0$

Vollständige Induktion — Peano-Axiome

Teil der üblichen Definition von $\mathbb{N}_0$

Die folgenden Aussagen charakterisieren die natürlichen Zahlen vollständig:

1. $0 \in \mathbb{N}_0$

Peano Axiome

2. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $n + 1 \in \mathbb{N}_0$
3. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $n + 1 \neq 0$
4. Für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $n + 1 = m + 1 \implies n = m$
5. Für alle $M \subseteq \mathbb{N}_0$ gilt: Wenn $0 \in M$ und für jedes $n \in M$ gilt $n + 1 \in M$, dann ist $M = \mathbb{N}_0$

Benannt nach Giuseppe Peano

Vollständige Induktion — die Grundlage

Teil der üblichen Definition von $\mathbb{N}_0$

Peano Axiome

Benannt nach Giuseppe Peano

Wenn eine Menge M

- nur Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ enthält,
- $0 \in M$ ist und
- für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: wenn $n \in M$, dann $n+1 \in M$

dann ist $M = \mathbb{N}_0$.

Vollständige Induktion — das Prinzip

- es sei für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Aussage $\mathcal{A}_n$ festgelegt
- Ziel: Beweis, dass „für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Aussage $\mathcal{A}_n$ wahr ist."
- Plan: zeige, dass für $M = \{n \mid \mathcal{A}_n \text{ ist wahr}\}$ gilt: $M = \mathbb{N}_0$

Vollständige Induktion — das Prinzip

- es sei für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Aussage $\mathcal{A}_n$ festgelegt
- Ziel: Beweis, dass „für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Aussage $\mathcal{A}_n$ wahr ist."
- Plan: zeige, dass für $M = \{n \mid \mathcal{A}_n \text{ ist wahr}\}$ gilt: $M = \mathbb{N}_0$
- zeige
  - $0 \in M$ und
  - für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: wenn $n \in M$, dann $n + 1 \in M$

Vollständige Induktion — das Prinzip

- es sei für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Aussage $\mathcal{A}_n$ festgelegt
- Ziel: Beweis, dass „für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Aussage $\mathcal{A}_n$ wahr ist.“
- Plan: zeige, dass für $M = \{n \mid \mathcal{A}_n \text{ ist wahr}\}$ gilt: $M = \mathbb{N}_0$
- zeige
  - $0 \in M$ und
  - für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: wenn $n \in M$, dann $n + 1 \in M$
- also ist zu zeigen:

Prinzip $\left\{ \right.$
  - $\mathcal{A}_0$ ist wahr und
  - für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: wenn $\mathcal{A}_n$ wahr, dann $\mathcal{A}_{n+1}$ wahr

Vollständige Induktion — Beweisstruktur

- für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Aussage $\mathcal{A}_n$
- zeige
  - $\mathcal{A}_0$ ist wahr und
  - für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: wenn $\mathcal{A}_n$ wahr, dann $\mathcal{A}_{n+1}$ wahr

Vollständige Induktion — Beweisstruktur

- für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Aussage $\mathcal{A}_n$
- zeige
  - Induktionsanfang:
    $\mathcal{A}_0$ ist wahr und
  -
    für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: wenn $\mathcal{A}_n$ wahr, dann $\mathcal{A}_{n+1}$ wahr

Vollständige Induktion — Beweisstruktur

- für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Aussage $\mathcal{A}_n$
- zeige
  - Induktionsanfang:
    $\mathcal{A}_0$ ist wahr und
  -
    es sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig;
    zeige: wenn $\mathcal{A}_n$ wahr, dann $\mathcal{A}_{n+1}$ wahr

Vollständige Induktion — Beweisstruktur

- für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Aussage $\mathcal{A}_n$
- zeige
  - Induktionsanfang:
    $\mathcal{A}_0$ ist wahr und
  - Induktionsschritt:
    es sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig;
    zeige: wenn $\mathcal{A}_n$ wahr, dann $\mathcal{A}_{n+1}$ wahr

Vollständige Induktion — Beweisstruktur

- für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Aussage $\mathcal{A}_n$
- zeige
  - Induktionsanfang:
    $\mathcal{A}_0$ ist wahr und
  - Induktionsschritt:
    es sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig;
    zeige: wenn $\mathcal{A}_n$ wahr, dann $\mathcal{A}_{n+1}$ wahr
    - $\mathcal{A}_n$ heißt Induktionsvoraussetzung
    - $\mathcal{A}_{n+1}$ heißt Induktionsbehauptung

Vollständige Induktion — Beweis des Lemmas

- es sei $w \in A^*$ ein beliebiges Wort
  Idee:
  - es sei $M \subseteq \mathbb{N}_0$ die Menge aller $n \in \mathbb{N}_0$ mit $|w^n| = n|w|$
  - zeige: $M = \mathbb{N}_0$
  - $\mathcal{A}_n$ ist die Aussage $|w^n| = n|w|$
- Induktionsanfang $n = 0$: Zu zeigen: $|w^0| = 0 \cdot |w|$.

$$\begin{aligned} |w^0| &= |\varepsilon| && \text{nach Defintion von } w^0 \\ &= 0 = 0 \cdot |w| \ . \end{aligned}$$

Vollständige Induktion — Beweis des Lemmas

- es sei $w \in A^*$ ein beliebiges Wort
  Idee:
  - es sei $M \subseteq \mathbb{N}_0$ die Menge aller $n \in \mathbb{N}_0$ mit $|w^n| = n|w|$
  - zeige: $M = \mathbb{N}_0$
  - $\mathcal{A}_n$ ist die Aussage $|w^n| = n|w|$
- Induktionsanfang $n = 0$: Zu zeigen: $|w^0| = 0 \cdot |w|$.

$$\begin{aligned} |w^0| &= |\varepsilon| && \text{nach Defintion von } w^0 \\ &= 0 = 0 \cdot |w| \ . \end{aligned}$$

- Induktionsschritt $n \longrightarrow n+1$:
  - Zeige: für jedes n gilt:
    wenn $|w^n| = n|w|$, dann $|w^{n+1}| = (n+1)|w|$.

Vollständige Induktion — Beweis des Lemmas

Karlsruher Institut für Technologie

Induktionsschritt

- es sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig
- zeige: wenn $\mathcal{A}_n$ wahr, dann $\mathcal{A}_{n+1}$ wahr
  - Induktionsvoraussetzung: $\mathcal{A}_n$ ist wahr, also $|w^n| = n|w|$.
  - zu zeigen: $\mathcal{A}_{n+1}$ ist wahr, also $|w^{n+1}| = (n+1)|w|$.

$$
\begin{aligned}
|w^{n+1}| &= |w^n \cdot w| \\
&= |w^n| + |w| \\
&= n|w| + |w| && \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
&= (n+1)|w|
\end{aligned}
$$

Vollständige Induktion als Schlussregel

vgl. Kapitel 5
(Aussagenlogik)

$$\frac{\mathcal{A}_0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 : \ \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{A}_{n+1}}{\text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 : \ \mathcal{A}_n}$$

Vollständige Induktion als Schlussregel

vgl. Kapitel 5
(Aussagenlogik)

$$\frac{\mathcal{A}_0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 : \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{A}_{n+1}}{\forall n \in \mathbb{N}_0 : \mathcal{A}_n}$$

Vollständige Induktion als Schlussregel

vgl. Kapitel 5
(Aussagenlogik)

$$\frac{\mathcal{A}_0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 : \; \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{A}_{n+1}}{\forall n \in \mathbb{N}_0 : \; \mathcal{A}_n}$$

Textuelles Schema:

Zu zeigen ist: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\mathcal{A}_n$.
Beweis durch vollständige Induktion.

1. *Induktionsanfang: Zu zeigen: $\mathcal{A}$ für $n = 0$.*
   $\ldots$ *‹Hier kommt der Beweis für $\mathcal{A}_0$ ›*
2. *Induktionsschritt: Zu zeigen: Aus $\mathcal{A}_n$ folgt $\mathcal{A}_{n+1}$ (oder kurz $n \rightsquigarrow n+1$)*
   Induktionsvoraussetzung (IV): $\mathcal{A}_n$
   Induktionsbehauptung (IB): $\mathcal{A}_{n+1}$
   $\ldots$ *‹Hier kommt der Beweis für $\mathcal{A}_{n+1}$, in dem IV benutzt werden darf.›*

Wo sind wir?

Vollständige Induktion

Varianten vollständiger Induktion

Induktive Definitionen

Vollständige Induktion: Varianten

Folgende Varianten passen alle in das Originalschema:

- Induktionsanfang an „anderer“ Stelle, z. B. für jedes $n \geq 1$: $\mathcal{A}_n$
  - Induktionsanfang: zeige $\mathcal{A}_1$
  - Induktionsschritt: zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ gilt: wenn $\mathcal{A}_n$ wahr, dann auch $\mathcal{A}_{n+1}$
- im Induktionsschritt Benutzung nicht nur von $\mathcal{A}_n$, sondern auch „mehrerer früherer“ Aussagen
  - z. B. $\mathcal{A}_{n-1}$ (falls n groß genug!)
  - z. B. *alle* Aussagen $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ sog. starke Induktion
- manchmal „mehrere Induktionsanfänge“, z. B.
  - Induktionsanfang: zeige $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ sind wahr

Verallgemeinerung vollständiger Induktion — mit Rückgriff auf viele frühere Formeln

- gegeben: für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathcal{B}_n$ eine Aussage
- wollen beweisen: für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathcal{B}_n$ wahr
- Problem: manchmal ist der Induktionsschritt $\mathcal{B}_n \longrightarrow \mathcal{B}_{n+1}$ „zu schwer“, „klappt nicht“

Verallgemeinerung vollständiger Induktion — mit Rückgriff auf viele frühere Formeln

- gegeben: für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathcal{B}_n$ eine Aussage
- wollen beweisen: für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathcal{B}_n$ wahr
- Problem: manchmal ist der Induktionsschritt $\mathcal{B}_n \longrightarrow \mathcal{B}_{n+1}$ „zu schwer“, „klappt nicht“
- Ausweg: andere Aussagen „mit mehr expliziter Information in IV“

Verallgemeinerung vollständiger Induktion — mit Rückgriff auf viele frühere Formeln

- gegeben: für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathcal{B}_n$ eine Aussage
- wollen beweisen: für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathcal{B}_n$ wahr
- Problem: manchmal ist der Induktionsschritt $\mathcal{B}_n \longrightarrow \mathcal{B}_{n+1}$ „zu schwer", „klappt nicht"
- Ausweg: andere Aussagen „mit mehr expliziter Information in IV"
- definiere Aussagen $\mathcal{A}_n$ so: „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ ist $\mathcal{B}_i$ wahr."

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &\equiv \mathcal{B}_0 \\
\mathcal{A}_1 &\equiv \mathcal{B}_0 \wedge \mathcal{B}_1 \\
\mathcal{A}_2 &\equiv \mathcal{B}_0 \wedge \mathcal{B}_1 \wedge \mathcal{B}_2 \\
&\vdots \\
\mathcal{A}_{n+1} &\equiv \mathcal{A}_n \wedge \mathcal{B}_{n+1}
\end{aligned}
$$

Verallgemeinerung vollständiger Induktion — mit Rückgriff auf viele frühere Formeln

$$\mathcal{A}_0 \equiv \mathcal{B}_0$$
$$\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{B}_0 \wedge \mathcal{B}_1$$
$$\mathcal{A}_2 \equiv \mathcal{B}_0 \wedge \mathcal{B}_1 \wedge \mathcal{B}_2$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{A}_{n+1} \equiv \mathcal{A}_n \wedge \mathcal{B}_{n+1}$$

- gegeben: für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathcal{B}_n$ eine Aussage
- wollen beweisen: für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathcal{B}_n$ wahr
- Problem: manchmal ist der Induktionsschritt $\mathcal{B}_n \longrightarrow \mathcal{B}_{n+1}$ „zu schwer", „klappt nicht"
- Ausweg: andere Aussagen „mit mehr expliziter Information in IV"
- definiere Aussagen $\mathcal{A}_n$ so: „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ ist $\mathcal{B}_i$ wahr."
- beweise: für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathcal{A}_n$ wahr
  - das reicht: aus $\mathcal{A}_n$ folgt $\mathcal{B}_n$
  - das ist nicht stärker, denn wenn alle $\mathcal{B}_n$ wahr sind, dann auch alle $\mathcal{A}_n$.

Eine Verallgemeinerung vollständiger Induktion

- für $n \in \mathbb{N}_0$ Aussagen $\mathcal{B}_n$ und
  $\mathcal{A}_n$: „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ ist $\mathcal{B}_i$ wahr."
- Induktionsbeweis für „Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathcal{A}_n$ wahr."

  Induktionsanfang $n = 0$: müssen zeigen:

  $\mathcal{A}_0$ ist wahr, also: $\mathcal{B}_0$ ist wahr.

  Induktionsschritt $n \leadsto n+1$: es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und die

  Induktionsvoraussetzung

  $\mathcal{A}_n$, also „für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ gilt $\mathcal{B}_i$" ist wahr

  zeige: $\mathcal{A}_{n+1}$, also „für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n+1$ gilt $\mathcal{B}_i$" ist wahr

Eine Verallgemeinerung vollständiger Induktion

Induktionsschritt $n \rightsquigarrow n+1$ im Detail

- Induktionsvoraussetzung (IV):
  $\mathcal{A}_n$ ist wahr, also „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ gilt $\mathcal{B}_i$."
- zu zeigen: $\mathcal{A}_{n+1}$ ist wahr, also „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n+1$ gilt $\mathcal{B}_i$."
- $\mathcal{A}_{n+1}$ kann man so ausdrücken:
  „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ gilt $\mathcal{B}_i$ und es gilt $\mathcal{B}_{n+1}$."

  zwei Dinge zu zeigen:
  - „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ gilt $\mathcal{B}_i$.":
  - $\mathcal{B}_{n+1}$:

Eine Verallgemeinerung vollständiger Induktion

Induktionsschritt $n \rightsquigarrow n+1$ im Detail

- Induktionsvoraussetzung (IV):
  $\mathcal{A}_n$ ist wahr, also „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ gilt $\mathcal{B}_i$."
- zu zeigen: $\mathcal{A}_{n+1}$ ist wahr, also „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n+1$ gilt $\mathcal{B}_i$."
- $\mathcal{A}_{n+1}$ kann man so ausdrücken:
  „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ gilt $\mathcal{B}_i$ und es gilt $\mathcal{B}_{n+1}$."

  zwei Dinge zu zeigen:
  - „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ gilt $\mathcal{B}_i$.": geschenkt, gilt nach IV
  - $\mathcal{B}_{n+1}$:

Eine Verallgemeinerung vollständiger Induktion

Induktionsschritt $n \rightsquigarrow n+1$ im Detail

- Induktionsvoraussetzung (IV):
  $\mathcal{A}_n$ ist wahr, also „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ gilt $\mathcal{B}_i$."
- zu zeigen: $\mathcal{A}_{n+1}$ ist wahr, also „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n+1$ gilt $\mathcal{B}_i$."
- $\mathcal{A}_{n+1}$ kann man so ausdrücken:
  „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ gilt $\mathcal{B}_i$ und es gilt $\mathcal{B}_{n+1}$."

  zwei Dinge zu zeigen:
  - „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ gilt $\mathcal{B}_i$.": geschenkt, gilt nach IV
  - $\mathcal{B}_{n+1}$: Arbeit, *aber man darf die IV benutzen:*
    „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ gilt $\mathcal{B}_i$."
    salopp: man darf $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ benutzen (nicht nur $\mathcal{B}_n$ alleine)

Vollständige Induktion — Ein Beispiel aus der Arithmetik

- Sei $n \in \mathbb{N}_1$ beliebig. Zeige: 2^{n+2} ist ein Teiler von $3^{2^n} - 1$.

Vollständige Induktion — Ein Beispiel aus der Arithmetik

- Sei $n \in \mathbb{N}_1$ beliebig. Zeige: 2^{n+2} ist ein Teiler von $3^{2^n} - 1$.
  $\mathcal{A}_n$ ist hier also die Aussage $2^{n+2} \mid 3^{2^n} - 1$.

Vollständige Induktion — Ein Beispiel aus der Arithmetik

- Sei $n \in \mathbb{N}_1$ beliebig. Zeige: 2^{n+2} ist ein Teiler von $3^{2^n} - 1$.
  $\mathcal{A}_n$ ist hier also die Aussage $2^{n+2} \mid 3^{2^n} - 1$.
- Induktionsanfang (n=1): Wir zeigen, dass $\mathcal{A}_1$ gilt, dass also $2^{1+2} \mid 3^{2^1} - 1$.

Vollständige Induktion — Ein Beispiel aus der Arithmetik

- Sei $n \in \mathbb{N}_1$ beliebig. Zeige: 2^{n+2} ist ein Teiler von $3^{2^n} - 1$.
  $\mathcal{A}_n$ ist hier also die Aussage $2^{n+2} \mid 3^{2^n} - 1$.
- Induktionsanfang (n=1): Wir zeigen, dass $\mathcal{A}_1$ gilt, dass also $2^{1+2} \mid 3^{2^1} - 1$.
  Dies gilt offensichtlich, da 8 Teiler von 8.
- Induktionsschritt $n \to n+1$: (falls $\mathcal{A}_n$ gilt, so auch $\mathcal{A}_{n+1}$)

Vollständige Induktion — Ein Beispiel aus der Arithmetik

- Sei $n \in \mathbb{N}_1$ beliebig. Zeige: 2^{n+2} ist ein Teiler von $3^{2^n} - 1$.
  $\mathcal{A}_n$ ist hier also die Aussage $2^{n+2} \mid 3^{2^n} - 1$.
- Induktionsanfang (n=1): Wir zeigen, dass $\mathcal{A}_1$ gilt, dass also $2^{1+2} \mid 3^{2^1} - 1$.
  Dies gilt offensichtlich, da 8 Teiler von 8.
- Induktionsschritt $n \longrightarrow n + 1$: (falls $\mathcal{A}_n$ gilt, so auch $\mathcal{A}_{n+1}$)
  - Induktionsvoraussetzung (I.V.): $\mathcal{A}_n$ ist wahr, d.h. 2^{n+2} teilt $3^{2^n} - 1$.

Vollständige Induktion — Ein Beispiel aus der Arithmetik

- Sei $n \in \mathbb{N}_1$ beliebig. Zeige: 2^{n+2} ist ein Teiler von $3^{2^n} - 1$.
  $\mathcal{A}_n$ ist hier also die Aussage $2^{n+2} \mid 3^{2^n} - 1$.
- Induktionsanfang (n=1): Wir zeigen, dass $\mathcal{A}_1$ gilt, dass also $2^{1+2} \mid 3^{2^1} - 1$.
  Dies gilt offensichtlich, da 8 Teiler von 8.
- Induktionsschritt $n \longrightarrow n + 1$: (falls $\mathcal{A}_n$ gilt, so auch $\mathcal{A}_{n+1}$)
  - Induktionsvoraussetzung (I.V.): $\mathcal{A}_n$ ist wahr, d.h. 2^{n+2} teilt $3^{2^n} - 1$.
  - Zu zeigen: $\mathcal{A}_{n+1}$ ist wahr, d.h. 2^{n+3} teilt $3^{2^{n+1}} - 1$.

Vollständige Induktion — Ein Beispiel aus der Arithmetik

- Sei $n \in \mathbb{N}_1$ beliebig. Zeige: 2^{n+2} ist ein Teiler von $3^{2^n} - 1$.
  $\mathcal{A}_n$ ist hier also die Aussage $2^{n+2} \mid 3^{2^n} - 1$.
- Induktionsanfang (n=1): Wir zeigen, dass $\mathcal{A}_1$ gilt, dass also $2^{1+2} \mid 3^{2^1} - 1$.
  Dies gilt offensichtlich, da 8 Teiler von 8.
- Induktionsschritt $n \longrightarrow n+1$: (falls $\mathcal{A}_n$ gilt, so auch $\mathcal{A}_{n+1}$)
  - Induktionsvoraussetzung (I.V.): $\mathcal{A}_n$ ist wahr, d.h. 2^{n+2} teilt $3^{2^n} - 1$.
  - Zu zeigen: $\mathcal{A}_{n+1}$ ist wahr, d.h. 2^{n+3} teilt $3^{2^{n+1}} - 1$.

$$3^{2^{n+1}} - 1 = 3^{2 \cdot 2^n} - 1 = (3^{2^n})^2 - 1$$

Vollständige Induktion — Ein Beispiel aus der Arithmetik

- Sei $n \in \mathbb{N}_1$ beliebig. Zeige: 2^{n+2} ist ein Teiler von $3^{2^n} - 1$.
  $\mathcal{A}_n$ ist hier also die Aussage $2^{n+2} \mid 3^{2^n} - 1$.
- Induktionsanfang (n=1): Wir zeigen, dass $\mathcal{A}_1$ gilt, dass also $2^{1+2} \mid 3^{2^1} - 1$.
  Dies gilt offensichtlich, da 8 Teiler von 8.
- Induktionsschritt $n \longrightarrow n+1$: (falls $\mathcal{A}_n$ gilt, so auch $\mathcal{A}_{n+1}$)
  - Induktionsvoraussetzung (I.V.): $\mathcal{A}_n$ ist wahr, d.h. 2^{n+2} teilt $3^{2^n} - 1$.
  - Zu zeigen: $\mathcal{A}_{n+1}$ ist wahr, d.h. 2^{n+3} teilt $3^{2^{n+1}} - 1$.

$$\begin{aligned} 3^{2^{n+1}} - 1 &= 3^{2 \cdot 2^n} - 1 = (3^{2^n})^2 - 1 \\ &= \underbrace{(3^{2^n} - 1)}_{f_1} \underbrace{(3^{2^n} + 1)}_{f_2} \qquad \textbf{da } a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \end{aligned}$$

Vollständige Induktion — Ein Beispiel aus der Arithmetik

- Sei $n \in \mathbb{N}_1$ beliebig. Zeige: 2^{n+2} ist ein Teiler von $3^{2^n} - 1$.
  $\mathcal{A}_n$ ist hier also die Aussage $2^{n+2} \mid 3^{2^n} - 1$.
- Induktionsanfang (n=1): Wir zeigen, dass $\mathcal{A}_1$ gilt, dass also $2^{1+2} \mid 3^{2^1} - 1$.
  Dies gilt offensichtlich, da 8 Teiler von 8.
- Induktionsschritt $n \longrightarrow n+1$: (falls $\mathcal{A}_n$ gilt, so auch $\mathcal{A}_{n+1}$)
  - Induktionsvoraussetzung (I.V.): $\mathcal{A}_n$ ist wahr, d.h. 2^{n+2} teilt $3^{2^n} - 1$.
  - Zu zeigen: $\mathcal{A}_{n+1}$ ist wahr, d.h. 2^{n+3} teilt $3^{2^{n+1}} - 1$.

$$
\begin{aligned}
3^{2^{n+1}} - 1 &= 3^{2\cdot 2^n} - 1 = (3^{2^n})^2 - 1 \\
&= \underbrace{(3^{2^n} - 1)}_{f_1}\underbrace{(3^{2^n} + 1)}_{f_2} \qquad \textbf{da } a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)
\end{aligned}
$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist 2^{n+2} Teiler von f_1. Außerdem gilt $2|f_2$, da f_2 gerade.

Vollständige Induktion — Ein Beispiel aus der Arithmetik

- Sei $n \in \mathbb{N}_1$ beliebig. Zeige: 2^{n+2} ist ein Teiler von $3^{2^n} - 1$.
  $\mathcal{A}_n$ ist hier also die Aussage $2^{n+2} \mid 3^{2^n} - 1$.
- Induktionsanfang (n=1): Wir zeigen, dass $\mathcal{A}_1$ gilt, dass also $2^{1+2} \mid 3^{2^1} - 1$.
  Dies gilt offensichtlich, da 8 Teiler von 8.
- Induktionsschritt $n \longrightarrow n+1$: (falls $\mathcal{A}_n$ gilt, so auch $\mathcal{A}_{n+1}$)
  - Induktionsvoraussetzung (I.V.): $\mathcal{A}_n$ ist wahr, d.h. 2^{n+2} teilt $3^{2^n} - 1$.
  - Zu zeigen: $\mathcal{A}_{n+1}$ ist wahr, d.h. 2^{n+3} teilt $3^{2^{n+1}} - 1$.

$$\begin{aligned} 3^{2^{n+1}} - 1 &= 3^{2\cdot 2^n} - 1 = (3^{2^n})^2 - 1 \\ &= \underbrace{(3^{2^n} - 1)}_{f_1}\underbrace{(3^{2^n} + 1)}_{f_2} \qquad \textbf{da } a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist 2^{n+2} Teiler von f_1. Außerdem gilt $2 | f_2$, da f_2 gerade. Daraus folgt $f_1 = 2^{n+2} \cdot u_1$ und $f_2 = 2 \cdot u_2$ für passende $u_1, u_2 \in \mathbb{N}$.

Vollständige Induktion — Ein Beispiel aus der Arithmetik

Karlsruher Institut für Technologie

- Sei $n \in \mathbb{N}_1$ beliebig. Zeige: 2^{n+2} ist ein Teiler von $3^{2^n} - 1$.
  $\mathcal{A}_n$ ist hier also die Aussage $2^{n+2} \mid 3^{2^n} - 1$.
- Induktionsanfang (n=1): Wir zeigen, dass $\mathcal{A}_1$ gilt, dass also $2^{1+2} \mid 3^{2^1} - 1$.
  Dies gilt offensichtlich, da 8 Teiler von 8.
- Induktionsschritt $n \longrightarrow n+1$: (falls $\mathcal{A}_n$ gilt, so auch $\mathcal{A}_{n+1}$)
  - Induktionsvoraussetzung (I.V.): $\mathcal{A}_n$ ist wahr, d.h. 2^{n+2} teilt $3^{2^n} - 1$.
  - Zu zeigen: $\mathcal{A}_{n+1}$ ist wahr, d.h. 2^{n+3} teilt $3^{2^{n+1}} - 1$.

$$
\begin{aligned}
3^{2^{n+1}} - 1 = 3^{2 \cdot 2^n} - 1 &= (3^{2^n})^2 - 1 \\
&= \underbrace{(3^{2^n} - 1)}_{f_1}\underbrace{(3^{2^n} + 1)}_{f_2} \qquad \textbf{da } a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)
\end{aligned}
$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist 2^{n+2} Teiler von f_1. Außerdem gilt $2|f_2$, da f_2 gerade. Daraus folgt $f_1 = 2^{n+2} \cdot u_1$ und $f_2 = 2 \cdot u_2$ für passende $u_1, u_2 \in \mathbb{N}$. Insgesamt also $3^{2^{n+1}} - 1 = f_1 \cdot f_2 = 2^{n+2} \cdot 2 \cdot u_1 \cdot u_2$, also $2^{n+3} \mid 3^{2^{n+1}} - 1$.

Wo sind wir?

Vollständige Induktion

Varianten vollständiger Induktion

Induktive Definitionen

Funktionen „mit sich selbst definieren“

Sind diese (teilweisen) Definition sinnvoll?

- Für $f_1 : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ sei $f_1(n+1) = 2 \cdot f_1(n)$ für $n \geq 0$
- Für $f_2 : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ sei $f_2(n) = f_2(n)$ für $n \geq 0$
- Für $f_3 : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ sei $f_3(n) = f_3(n) + 1$ für $n \geq 0$.

Funktionen „mit sich selbst definieren"

Sind diese (teilweisen) Definition sinnvoll?

- Für $f_1 : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ sei $f_1(n+1) = 2 \cdot f_1(n)$ für $n \geq 0$
- Für $f_2 : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ sei $f_2(n) = f_2(n)$ für $n \geq 0$
- Für $f_3 : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ sei $f_3(n) = f_3(n) + 1$ für $n \geq 0$.

Eine Definition von f, die selbst f benutzt, kann

- genau eine Funktion (f_1, wenn man noch $f(0) = 1$ setzt z.B.),
- uneindeutig mehr als eine Funktion (f_2), oder
- gar keine Funktion

beschreiben. Frage: Wann ist denn Eindeutigkeit gegeben?

Induktive Funktionsdefinitionen

Satz: Induktive Definition über $\mathbb{N}_0$

Sei K eine Menge und $f : \mathbb{N}_0 \to K$ eine Funktion. Sei ferner $T \in K$ und $G : K \to K$.

Wenn für f

- der Startwert $f(0) = T$ und
- die Berechnungsvorschrift $f(n+1) = G(f(n))$ für den Nachfolger

gegeben sind, so wird damit f eindeutig definiert.

Dieser Satz nutzt wieder das Peano-Axiom

$$(0 \in M \text{ und für alle n: } (n \in M \implies n+1 \in M)) \implies M = \mathbb{N}_0$$

auf dem vollst. Induktion beruht, und macht aus der Beweistechnik eine Definitionstechnik.

Beispiel — noch mal Potenzen von Wörtern

Definition:

$$w^0 = \varepsilon$$

$$\text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0: \ w^{n+1} = w^n \cdot w$$

Beispiel — noch mal Potenzen von Wörtern

Definition:

$$\begin{aligned} pot_w(0) &= \varepsilon \\ \text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0: \; pot_w(n+1) &= pot_w(n) \cdot w \end{aligned}$$

Beispiel — noch mal Potenzen von Wörtern

Karlsruher Institut für Technologie

Im Allgemeinen

$f(0) = T$
Startwert T für $n = 0$

$f(n+1) = G(f(n))$
Berechnungsvorschrift G
über dem Vorgänger

Induktive
Definition auf $\mathbb{N}_0$

Definition:

$$pot_w(0) = \varepsilon$$

$$\text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0 : \; pot_w(n+1) = pot_w(n) \cdot w$$

Beispiel — noch mal Potenzen von Wörtern

Im Allgemeinen

$f(0) = T$
Startwert T für $n = 0$

$f(n+1) = G(f(n))$
Berechnungsvorschrift G
über dem Vorgänger

Induktive
Definition auf $\mathbb{N}_0$

Definition:

$$w^0 = \varepsilon$$

$$\text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0 : \; w^{n+1} = w^n \cdot w$$

Beispiel — noch mal Potenzen von Wörtern

Im Allgemeinen

$f(0) = T$
Startwert T für $n = 0$

$f(n+1) = G(f(n))$
Berechnungsvorschrift G über dem Vorgänger

Induktive Definition auf $\mathbb{N}_0$

Definition:

$$w^0 = \varepsilon$$
$$\text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0: \quad w^{n+1} = w^n \cdot w$$

Nach Satz der letzten Folie: Dies ist eine eindeutig festgelegte Funktion.

Weitere Beispiele:

Beispiel — noch mal Potenzen von Wörtern

Im Allgemeinen

$f(0) = T$
Startwert T für $n = 0$

$f(n+1) = G(f(n))$
Berechnungsvorschrift G über dem Vorgänger

Induktive Definition auf $\mathbb{N}_0$

Definition:

$$w^0 = \varepsilon$$
$$\text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0 : \; w^{n+1} = w^n \cdot w$$

Nach Satz der letzten Folie: Dies ist eine eindeutig festgelegte Funktion.

Weitere Beispiele:

- $M_0 = Var_{AL}, \quad M_{n+1} = Ver(M_n) \cup M_n$
  (Syntax der Aussagenlogik, s. Kapitel 5)

Beispiel — noch mal Potenzen von Wörtern

Im Allgemeinen

$f(0) = T$
Startwert T für $n = 0$

$f(n+1) = G(f(n))$
Berechnungsvorschrift G über dem Vorgänger

Induktive Definition auf $\mathbb{N}_0$

Definition:

$$w^0 = \varepsilon$$
$$\text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0 : \; w^{n+1} = w^n \cdot w$$

Nach Satz der letzten Folie: Dies ist eine eindeutig festgelegte Funktion.

Weitere Beispiele:

- $M_0 = Var_{AL}, \quad M_{n+1} = Ver(M_n) \cup M_n$
  (Syntax der Aussagenlogik, s. Kapitel 5)
- $plus_m(0) = m, \quad plus_m(n+1) = plus_m(n) + 1$
  (Addition $plus_m(n) = n + m$ auf natürlichen Zahlen)

Beispiel — noch mal Potenzen von Wörtern

Im Allgemeinen

$f(0) = T$
Startwert T für $n = 0$

$f(n+1) = G(f(n))$
Berechnungsvorschrift G über dem Vorgänger

Induktive Definition auf $\mathbb{N}_0$

Definition:

$$w^0 = \varepsilon$$
$$\text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0: \; w^{n+1} = w^n \cdot w$$

Nach Satz der letzten Folie: Dies ist eine eindeutig festgelegte Funktion.

Weitere Beispiele:

- $M_0 = Var_{AL}, \quad M_{n+1} = Ver(M_n) \cup M_n$
  (Syntax der Aussagenlogik, s. Kapitel 5)
- $plus_m(0) = m, \quad plus_m(n+1) = plus_m(n) + 1$
  (Addition $plus_m(n) = n + m$ auf natürlichen Zahlen)
- $mult_m(0) = 0, \quad mult_m(n+1) = mult_m(n) + m$
  (Multiplikation $mult_m(n) = n \cdot m$ auf natürlichen Zahlen)

Beispiel — noch mal Potenzen von Wörtern

Im Allgemeinen

$f(0) = T$
Startwert T für $n = 0$

$f(n+1) = G(f(n))$
Berechnungsvorschrift G über dem Vorgänger

Induktive Definition auf $\mathbb{N}_0$

(Dies sind auch Peano-Axiome)

Definition:

$$w^0 = \varepsilon$$

$$\text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0 : \; w^{n+1} = w^n \cdot w$$

Nach Satz der letzten Folie: Dies ist eine eindeutig festgelegte Funktion.

Weitere Beispiele:

- $M_0 = Var_{AL}, \quad M_{n+1} = Ver(M_n) \cup M_n$
  (Syntax der Aussagenlogik, s. Kapitel 5)
- $plus_m(0) = m, \quad plus_m(n+1) = plus_m(n) + 1$
  (Addition $plus_m(n) = n + m$ auf natürlichen Zahlen)
- $mult_m(0) = 0, \quad mult_m(n+1) = mult_m(n) + m$
  (Multiplikation $mult_m(n) = n \cdot m$ auf natürlichen Zahlen)

Was ist wichtig

- Das sollten Sie mitnehmen:
  - *vollständige Induktion*
    - Methode, um etwas „für alle $n \in \mathbb{N}_0$“ zu beweisen
    - Varianten, insbesondere „starke Induktion“
  - induktive Definitionen

Das sollten Sie üben:

- vollständige Induktionen
- induktive Definitionen