Grundbegriffe der Informatik

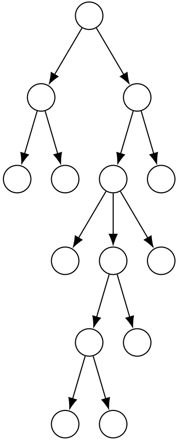
Kapitel 15: Graphen

Mattias Ulbrich
(basierend auf Folien von Thomas Worsch)

KIT · Institut für Theoretische Informatik

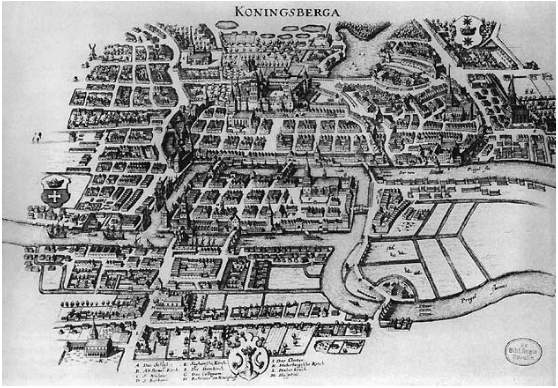
Wintersemester 2023/2024

Darstellung von Zusammenhängen



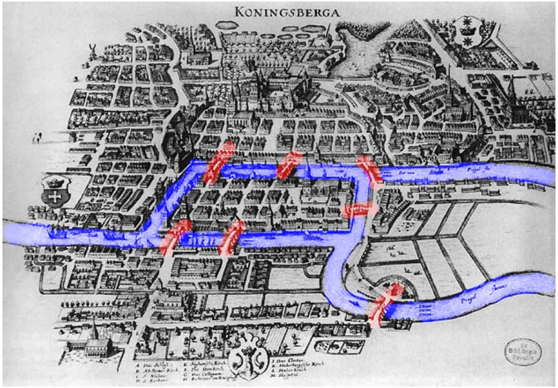
- oft Objekte durch Linien verbunden, z. B.
  - in dieser Vorlesung
  - in der Vorlesung „Programmieren“
  - im realen Leben
- nun allgemein Gegenstand der Betrachtungen

Königsberg, 1652 (heute Kaliningrad)



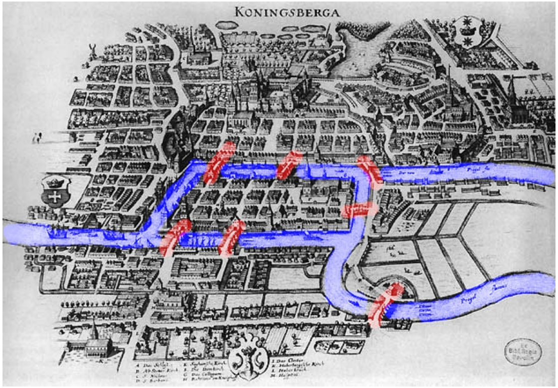
`http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Image-Koenigsberg,_Map_by_Merian-Erben_1652.jpg`, public domain

Königsberg, 1652 (heute Kaliningrad)



`http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Image-Koenigsberg,_Map_by_Merian-Erben_1652.jpg`, public domain

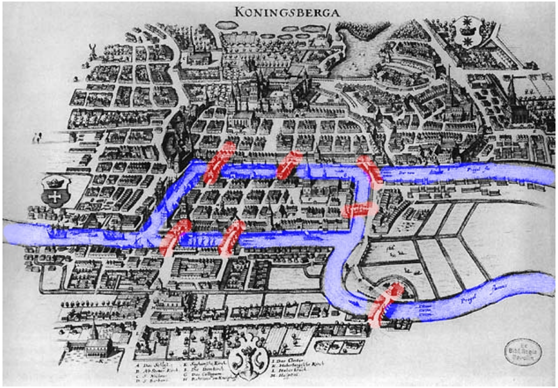
Königsberg, 1652 (heute Kaliningrad)



http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Image-Koenigsberg,_Map_by_Merian-Erben_1652.jpg , public domain

- Leonard Euler (1736):
  Kein Spaziergang führt
  über jede Brücke genau einmal.

Königsberg, 1652 (heute Kaliningrad)



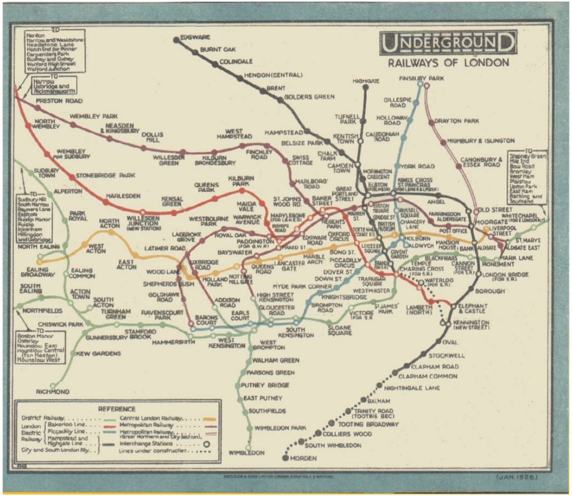
http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Image-Koenigsberg,_Map_by_
Merian-Erben_1652.jpg , public domain

- Leonard Euler (1736):
  Kein Spaziergang führt
  über jede Brücke genau einmal.

- Warum?
  Unter welchen Umständen geht das?

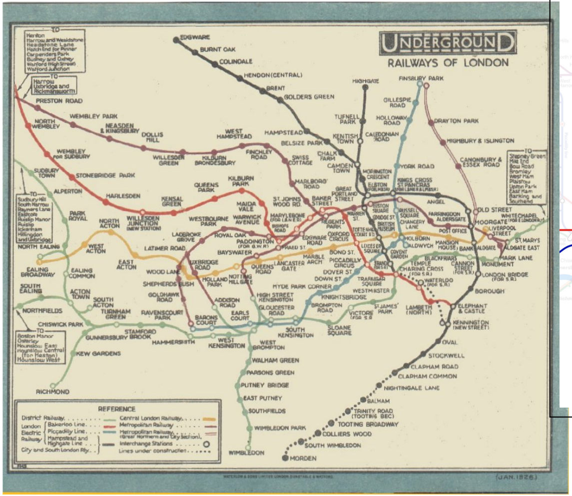
  typische graphentheoretische
  Fragestellung

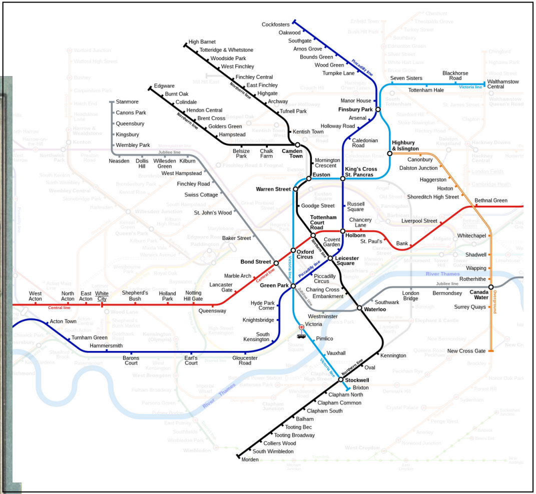
Graphen als Mittel der Abstraktion



Bildrechte: Public domain und “Sameboat”, Ausschnitt, CC-BY 4.0

Graphen als Mittel der Abstraktion





Bildrechte: Public domain und "Sameboat", Ausschnitt, CC-BY 4.0

Überblick

Gerichtete Graphen

- Graphen und Teilgraphen
- Pfade und Erreichbarkeit
- Isomorphie von Graphen
- Ein Blick zurück auf Relationen

Ungerichtete Graphen

- Übertragung der Grundbegriffe aus dem gerichteten Fall
- Eine Anmerkung zu Relationen

Repräsentation von Graphen im Rechner

Wo sind wir?

Gerichtete Graphen

Ungerichtete Graphen

Repräsentation von Graphen im Rechner

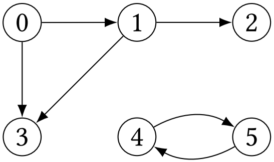
Wo sind wir?

Gerichteter Graph

Karlsruher Institut für Technologie

- Paar $G = (V, E)$
  - Knotenmenge V endlich, nichtleer (Knoten, engl. *vertex*)
  - Kantenmenge $E \subseteq V \times V$ (Kante, engl. *edge*)
    - also auch endlich
    - darf leer sein
- Beispiel
  - $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
  - $E = \{(0, 1), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (4, 5), (5, 4)\}$

Gerichteter Graph



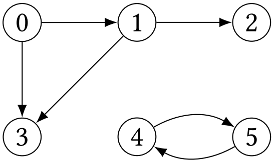
- Paar $G = (V, E)$
  - Knotenmenge V endlich, nichtleer (Knoten, engl. *vertex*)
  - Kantenmenge $E \subseteq V \times V$ (Kante, engl. *edge*)
    - also auch endlich
    - darf leer sein
- Beispiel
  - $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
  - $E = \{(0,1), (0,3), (1,2), (1,3), (4,5), (5,4)\}$

  oder bildlich ...

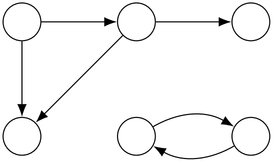
Gerichteter Graph

- Paar $G = (V, E)$
  - Knotenmenge V endlich, nichtleer (Knoten, engl. *vertex*)
  - Kantenmenge $E \subseteq V \times V$ (Kante, engl. *edge*)
    - also auch endlich
    - darf leer sein
- Beispiel
  - $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
  - $E = \{(0, 1), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (4, 5), (5, 4)\}$

  oder bildlich ...

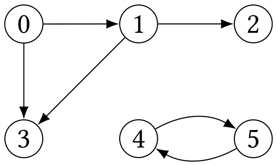


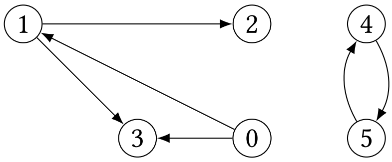
- explizite Knotenangaben manchmal überflüssig



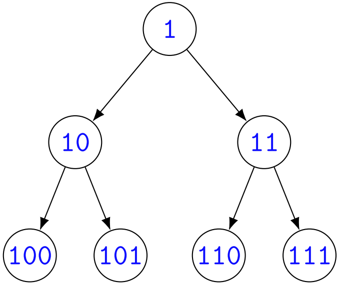
Man kann den gleichen Graphen verschieden hinmalen

- Anordnung der Knoten in der Darstellung irrelevant
- verschiedene Darstellungen *des gleichen Graphen:*





Bäume kamen schon mehrfach vor



- $G = (V, E)$ mit

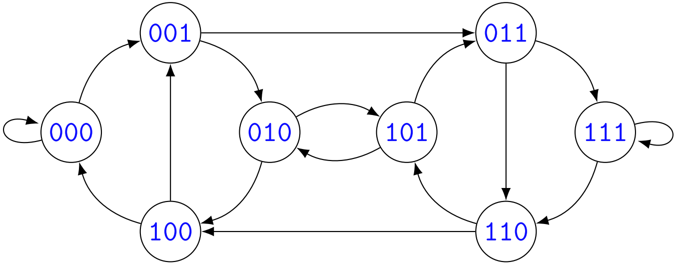
$$V = \{1\} \cdot \left(\bigcup_{i \in \mathbb{Z}_3} \{0, 1\}^i \right)$$

$$= \{1, 10, 11, 100, 101, 110, 111\}$$

$$E = \{(w, wx) \mid x \in \{0, 1\} \wedge w \in V \wedge wx \in V\}$$

$$= \{(1, 10), (1, 11), (10, 100), (10, 101), (11, 110), (11, 111)\}$$

de Bruijn-Graphen — $V = \{0, 1\}^n$ und Kanten (xw, wy)

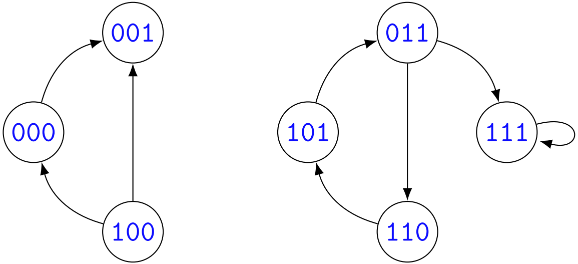
- Beispiel $n = 3$:
  - $V = \{0, 1\}^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$
  - $E = \{(xw, wy) \mid x, y \in \{0, 1\} \wedge w \in \{0, 1\}^2\} =$ $\{(000, 000), \ldots, (010, 101), \ldots\}$
- 

- *Schlinge:* $(x, x) \in E$
  schlingenfrei: ohne Schlingen

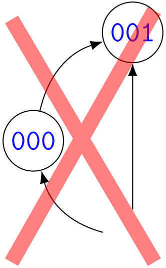
Teilgraph

- $G' = (V', E')$ ist ein Teilgraph von $G = (V, E)$, wenn
  - $\{\} \neq V' \subseteq V$
  - $E' \subseteq E \cap V' \times V'$,

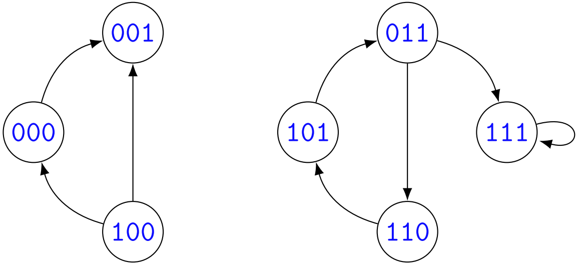
- Teilgraph des de Bruijn-Graphen



Teilgraph



- $G' = (V', E')$ ist ein Teilgraph von $G = (V, E)$, wenn
  - $\{\} \neq V' \subseteq V$
  - $E' \subseteq E \cap V' \times V'$,
    - Endpunkte von Kanten in E' müssen in V' sein
- Teilgraph des de Bruijn-Graphen



Wo sind wir?

Pfade können über mehrere Kanten führen

- *$V^{(+)}$:* Menge der nichtleeren Listen von Elementen aus V
- $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^{(+)}$ ist *Pfad*
  - wenn für jedes $i \in \mathbb{Z}_n$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- *Länge eines Pfades:* Anzahl n der Kanten (!)
- v_n von v_0 *erreichbar*, wenn Pfad $p = (v_0, \ldots, v_n)$ existiert
- Länge 0 für Pfade erlaubt: $p = (v_0)$

Jeder Pfad induziert einen Teilgraphen

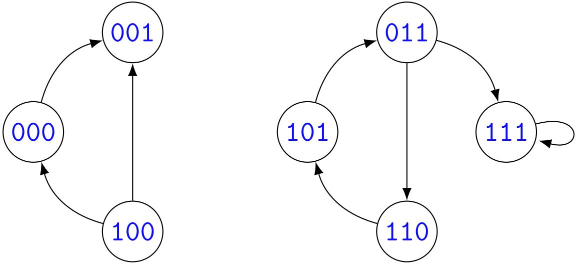
- Wenn $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^{(+)}$ ein Pfad in $G = (V, E)$ ist
  - also für jedes $i \in \mathbb{Z}_n$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- dann «induziert» das einen Teilgraphen:
  - $V(p) = \{v_i \mid 0 \le i \le n\}$ ist eine Knotenmenge
  - $E(p) = \{(v_i, v_{i+1}) \mid 0 \le i < n\}$ ist eine Kantenmenge
  - und wegen $E(p) \subseteq V(p) \times V(p)$ ist $(V(p), E(p))$ sogar Teilgraph von G

Zyklen führen zum Ausgangspunkt zurück

Karlsruher Institut für Technologie

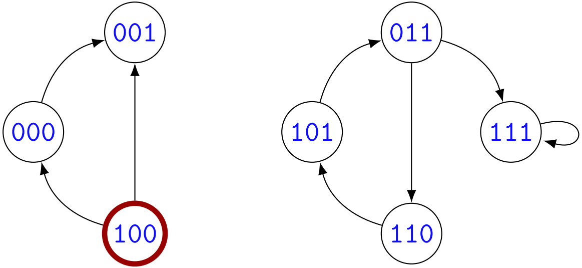
- Pfad mit $v_0 = v_n$ heißt *geschlossen*
- geschlossenener Pfad heißt *Zyklus*, wenn $n \geq 1$ ist.
- Pfad $(v_0, \ldots, v_n)$ *wiederholungsfrei*, wenn
  - Knoten $v_0, \ldots, v_{n-1}$ paarweise verschieden und
  - Knoten $v_1, \ldots, v_n$ paarweise verschieden
  - v_0 und v_n dürfen gleich sein
- *einfacher Zyklus:* wiederholungsfreier Zyklus
- *azyklischer Graph:* es gibt darin keinen Zyklus

Beispiele für Pfade



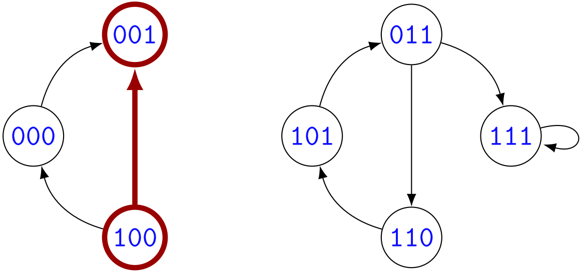
- (100) ist Pfad der Länge 0
- (100, 001) ist Pfad der Länge 1
- (100, 000, 001) ist Pfad der Länge 2
- (110, 101, 011, 111, 111, 111) ist Pfad der Länge 5
- (011, 110, 101, 011) ist einfacher Zyklus der Länge 3.

Beispiele für Pfade



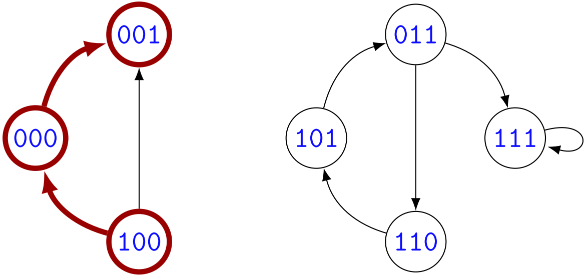
- (100) ist Pfad der Länge 0
- (100, 001) ist Pfad der Länge 1
- (100, 000, 001) ist Pfad der Länge 2
- (110, 101, 011, 111, 111, 111) ist Pfad der Länge 5
- (011, 110, 101, 011) ist einfacher Zyklus der Länge 3.

Beispiele für Pfade



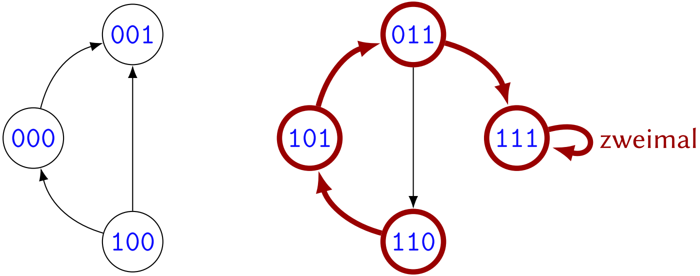
- (100) ist Pfad der Länge 0
- (100, 001) ist Pfad der Länge 1
- (100, 000, 001) ist Pfad der Länge 2
- (110, 101, 011, 111, 111, 111) ist Pfad der Länge 5
- (011, 110, 101, 011) ist einfacher Zyklus der Länge 3.

Beispiele für Pfade



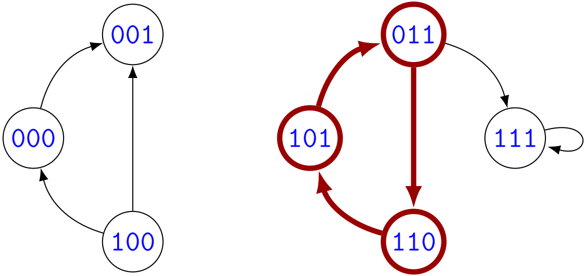
- (100) ist Pfad der Länge 0
- (100, 001) ist Pfad der Länge 1
- (100, 000, 001) ist Pfad der Länge 2
- (110, 101, 011, 111, 111, 111) ist Pfad der Länge 5
- (011, 110, 101, 011) ist einfacher Zyklus der Länge 3.

Beispiele für Pfade



- (100) ist Pfad der Länge 0
- (100, 001) ist Pfad der Länge 1
- (100, 000, 001) ist Pfad der Länge 2
- (110, 101, 011, 111, 111, 111) ist Pfad der Länge 5
- (011, 110, 101, 011) ist einfacher Zyklus der Länge 3.

Beispiele für Pfade



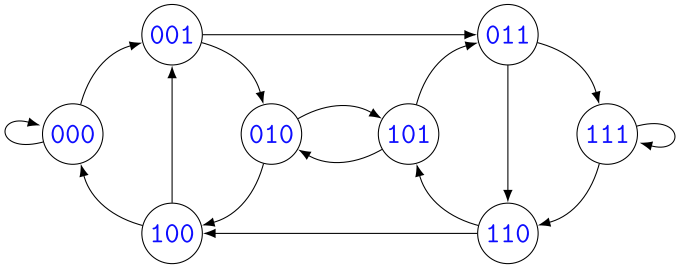
- (100) ist Pfad der Länge 0
- (100, 001) ist Pfad der Länge 1
- (100, 000, 001) ist Pfad der Länge 2
- (110, 101, 011, 111, 111, 111) ist Pfad der Länge 5
- (011, 110, 101, 011) ist einfacher Zyklus der Länge 3.

Teilpfade

- *Teilpfad*
- eines Pfad $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^{(+)}$
- entsteht durch Streiche endlich vieler Knoten
  - am Anfang oder/und am Ende
  - mindestens ein Knoten muss übrig bleiben

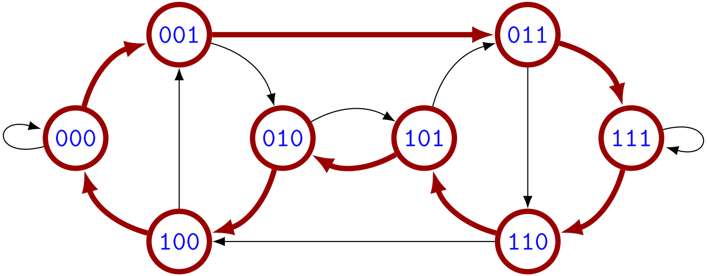
Strenger Zusammenhang

- gerichteter Graph *streng zusammenhängend*
  - für jedes Knotenpaar $(x, y) \in V^2$ existiert Pfad von x nach y
- Beispiel:



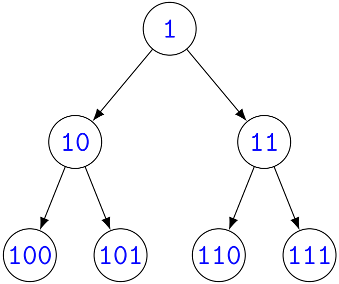
Strenger Zusammenhang

- gerichteter Graph *streng zusammenhängend*
  - für jedes Knotenpaar $(x, y) \in V^2$ existiert Pfad von x nach y
- Beispiel:



- hier existieren sogar einfache Zyklen, die alle Knoten enthalten

Gerichtete Bäume



- es gibt eine *Wurzel* $r \in V$ mit der Eigenschaft
  - *zu jedem Knoten* x existiert *genau ein Pfad*
  - gleich: Wurzel immer eindeutig

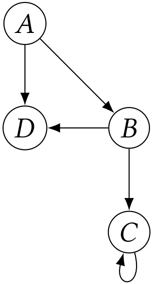
Eindeutigkeit der Wurzel

Lemma Die Wurzel eines gerichteten Baumes ist eindeutig.

Beweis

- Seien r und r' Wurzeln eines Baumes.
- Dann gibt es
  - einen Pfad von r nach r', weil r Wurzel ist, und
  - einen Pfad von r' nach r, weil r' Wurzel ist.
- Wäre $r \neq r'$, hätten diese Pfade Länge > 0 und das «Hintereinanderhängen» ergäbe
  - einen Pfad von r nach r,
  - der vom Pfad (r) verschieden wäre.
- Also wäre der Pfad von r nach r gar nicht eindeutig.

Knotengrad bei gerichteten Graphen



- *Eingangsgrad* eines Knoten y ist

$$d^-(y) = |\{x \mid (x, y) \in E\}|$$

- *Ausgangsgrad* eines Knoten x ist

$$d^+(x) = |\{y \mid (x, y) \in E\}|$$

- *Grad* eines Knotens ist

$$d(x) = d^-(x) + d^+(x)$$

Bäume: Blätter und innere Knoten

- bei einem Baum sind
  - *Blätter* Knoten mit Ausgangsgrad $= 0$
  - *innere Knoten* Knoten mit Ausgangsgrad > 0

Wo sind wir?

Gerichtete Graphen

- Graphen und Teilgraphen
- Pfade und Erreichbarkeit
- Isomorphie von Graphen
- Ein Blick zurück auf Relationen

Ungerichtete Graphen

Repräsentation von Graphen im Rechner

„Struktur“ eines Graphen — was ist das?

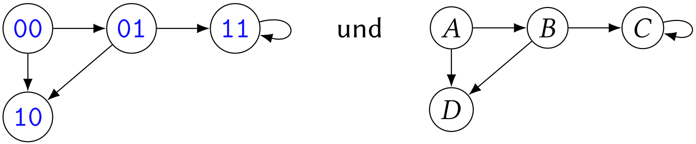
- das, was gleich bleibt, wenn man die Knoten umbenennt

„Struktur“ eines Graphen — was ist das?

- das, was gleich bleibt, wenn man die Knoten umbenennt
- $G_1 = (V_1, E_1)$ *isomorph* zu $G_2 = (V_2, E_2)$, wenn
  - *Bijektion* $f : V_1 \to V_2$ existiert
  - mit der Eigenschaft

$$\forall x \in V_1 : \forall y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \longleftrightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$$

- f heißt dann auch ein *(Graph-)Isomorphismus*
- Beispiel:



„Struktur“ eines Graphen — was ist das?

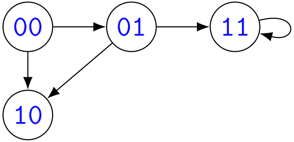
Karlsruher Institut für Technologie

- das, was gleich bleibt, wenn man die Knoten umbenennt
- $G_1 = (V_1, E_1)$ *isomorph* zu $G_2 = (V_2, E_2)$, wenn
  - *Bijektion* $f : V_1 \to V_2$ existiert
  - mit der Eigenschaft

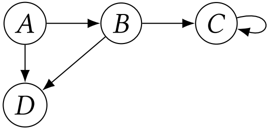
$$\forall x \in V_1 : \forall y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \longleftrightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$$

- f heißt dann auch ein *(Graph-)Isomorphismus*
- Beispiel:

$f(00) = A$
$f(01) = B$
$f(11) = C$
$f(10) = D$



und



Graphisomorphie hat drei wichtige Eigenschaften

- Wenn G_1 isomorph zu G_2, dann auch G_2 isomorph zu G_1:
  - f^{-1} leistet das Gewünschte.

Graphisomorphie hat drei wichtige Eigenschaften

Karlsruher Institut für Technologie

- Wenn G_1 isomorph zu G_2, dann auch G_2 isomorph zu G_1:
  - f^{-1} leistet das Gewünschte.
- Jeder Graph ist isomorph zu sich selbst:
  - wähle $f = \mathrm{I}_V$

Graphisomorphie hat drei wichtige Eigenschaften

- Wenn G_1 isomorph zu G_2, dann auch G_2 isomorph zu G_1:
  - f^{-1} leistet das Gewünschte.
- Jeder Graph ist isomorph zu sich selbst:
  - wähle $f = \mathrm{I}_V$
- Wenn G_1 isomorph zu G_2 (dank f) und
  wenn G_2 isomorph zu G_3 (dank g),
  dann G_1 isomorph zu G_3 (dank $g \circ f$)

Graphisomorphie hat drei wichtige Eigenschaften

symmetrisch

- Wenn G_1 isomorph zu G_2, dann auch G_2 isomorph zu G_1:
  - f^{-1} leistet das Gewünschte.

reflexiv

- Jeder Graph ist isomorph zu sich selbst:
  - wähle $f = \mathrm{I}_V$

transitiv

- Wenn G_1 isomorph zu G_2 (dank f) und wenn G_2 isomorph zu G_3 (dank g), dann G_1 isomorph zu G_3 (dank $g \circ f$)

Wo sind wir?

Graphen sind Relationen —
Welche Bedeutung hat das Relationenprodukt?

- $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$
  - E binäre Relation auf V
- Frage: Bedeutung von $E^2 = E \circ E$?

$$E \circ E = \{(x, z) \in V \times V \mid \exists y \in V : (x, y) \in E \land (y, z) \in E\}$$

- Pfad der Länge 2:
  - Knotenliste $p = (v_0, v_1, v_2)$ mit der Eigenschaft, dass
  - $(v_0, v_1) \in E \land (v_1, v_2) \in E$.

Graphen sind Relationen — Welche Bedeutung hat das Relationenprodukt?

- $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$
  - E binäre Relation auf V
- Frage: Bedeutung von $E^2 = E \circ E$?

$$E \circ E = \{(x, z) \in V \times V \mid \exists y \in V : (x, y) \in E \land (y, z) \in E\}$$

- Pfad der Länge 2:
  - Knotenliste $p = (v_0, v_1, v_2)$ mit der Eigenschaft, dass
  - $(v_0, v_1) \in E \land (v_1, v_2) \in E$.
- also Knotenpaar (x, z)
  - *genau dann* in Relation E^2,
  - *wenn* Pfad (x, y, z) der Länge 2 von x nach z existiert

Graphen sind Relationen — Erreichbarkeit

- $(x, y) \in E^2 \iff$ es existiert Pfad der Länge 2 von x nach y.
- noch leichter
  - $(x, y) \in E^1 \iff$ es existiert Pfad der Länge 1 von x nach y.
  - $(x, y) \in E^0 \iff$ es existiert Pfad der Länge 0 von x nach y.

Graphen sind Relationen — Erreichbarkeit

- $(x, y) \in E^2 \iff$ es existiert Pfad der Länge 2 von x nach y.
- noch leichter
  - $(x, y) \in E^1 \iff$ es existiert Pfad der Länge 1 von x nach y.
  - $(x, y) \in E^0 \iff$ es existiert Pfad der Länge 0 von x nach y.
- vollständige Induktion liefert

Lemma Für jeden gerichteten Graphen $G = (V, E)$
und jedes $i \in \mathbb{N}_0$ gilt:
Knotenpaar (x, y) ist genau dann in der Relation E^i,
wenn in G Pfad der Länge i von x nach y vorhanden

Graphen sind Relationen — Erreichbarkeit

Korollar Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.
Knotenpaar (x, y) ist genau dann in der Relation E^*,
wenn Pfad (evtl. der Länge 0) von x nach y in G existiert.

Graphen sind Relationen — Erreichbarkeit

Korollar Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.
Knotenpaar (x, y) ist genau dann in der Relation E^*,
wenn Pfad (evtl. der Länge 0) von x nach y in G existiert.

Korollar Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ ist genau
dann streng zusammenhängend, wenn $E^* = V \times V$ ist.

Was ist wichtig

- Das sollten Sie mitnehmen:
  - gerichtete Graphen drücken Beziehungen aus (Relationen)
  - Pfade
  - strenger Zusammenhang
  - Bäume
- Das sollten Sie üben:
  - Benutzung der neuen Begriffe beim Reden
  - Malen von Graphen
  - sehen, wann Graphen isomorph sind

Wo sind wir?

Gerichtete Graphen

Ungerichtete Graphen

Repräsentation von Graphen im Rechner

Wo sind wir?

Karlsruher Institut für Technologie

Gerichtete Graphen

Ungerichtete Graphen

- Übertragung der Grundbegriffe aus dem gerichteten Fall
- Eine Anmerkung zu Relationen

Repräsentation von Graphen im Rechner

Ungerichtete Graphen — formal definiert

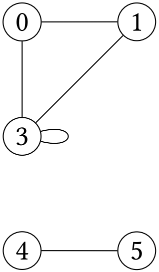
Karlsruher Institut für Technologie

- Ein *ungerichteter Graph* ist eine Struktur $U = (V, E)$ mit
  - V: endliche nichtleere Menge von *Knoten*
  - E: Menge von *Kanten* mit

$$E \subseteq \big\{ \{x, y\} \mid x \in V \land y \in V \big\}$$

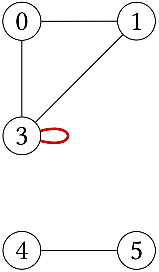
    - *keine* Reihenfolge bei $\{x, y\}$
    - beide Knoten „gleichberechtigt“
  - *adjazente Knoten:* durch eine Kante miteinander verbunden
  - *Schlinge*
    - Kante mit identischen Start- und Zielknoten
    - formal ergibt sich $\{x, y\}$ mit $x = y$, also einfach $\{x\}$
  - Graph ohne Schlingen heißt *schlingenfrei*

Beispiel



- $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\ \{0, 1\}, \{0, 3\}, \{1, 3\}, \{3\}, \{4, 5\}\ \}$

Beispiel



- $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\ \{0, 1\}, \{0, 3\}, \{1, 3\}, \{3\}, \{4, 5\}\ \}$

Teilgraph eines ungerichteten Graphen

- $U' = (V', E')$ ist *Teilgraph* eines ungerichteten Graphen $U = (V, E)$, wenn
  - $\{\} \neq V' \subseteq V$ und
  - $E' \subseteq E \cap \{ \{x, y\} \mid x, y \in V' \}$.
    - Endpunkte jeder Kante von E' müssen zu V' gehören.
- Teilgraphen sind also selbst Graphen

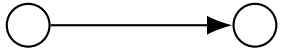
Wege — das ungerichtete Gegenstück zu Pfaden

- $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^{(+)}$ ist *Weg*
  in einem ungerichteten Graphen,
  - wenn für jedes $i \in \mathbb{Z}_n$ gilt: $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$
- *Länge eines Weges:* Anzahl n der Kanten (!)
- v_n von v_0 *erreichbar*, wenn Weg $p = (v_0, \ldots, v_n)$ existiert
- Weg $(v_0, \ldots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
  - Knoten $v_0, \ldots, v_{n-1}$ paarweise verschieden und
  - Knoten $v_1, \ldots, v_n$ paarweise verschieden
  - v_0 und v_n dürfen gleich sein

Kreise — das ungerichtete Gegenstück zu Zyklen

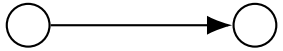
- *geschlossener Weg* oder *Kreis:*
  $p = (v_0, \ldots, v_n)$ mit $v_0 = v_n$
- *einfacher Kreis*
  - wiederholungsfreier Kreis
  - ! *mit mindestens drei verschiedenen Knoten*

Ungerichtete Kanten und Relationen

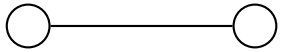


- gerichtete Graphen
  - E binäre Relation auf V
  - E^i und E^* haben anschauliche Bedeutung
- ungerichtete Graphen: E keine binäre Relation, aber

Ungerichtete Kanten und Relationen

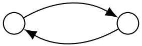


- gerichtete Graphen
  - E binäre Relation auf V
  - E^i und E^* haben anschauliche Bedeutung
- ungerichtete Graphen: E keine binäre Relation, aber



- zu $U = (V, E)$ definiere *Kantenrelation* $E_g \subseteq V \times V$:

$$E_g = \{(x, y) \mid \{x, y\} \in E\}$$

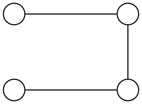


- $G_U = (V, E_g)$ der *zu U gehörende gerichtete Graph*

Zusammenhang in ungerichteten Graphen

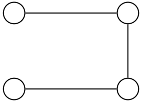
- ungerichteter Graph $U = (V, E)$ *zusammenhängend*,
  wenn zugehöriger gerichteter $G_U = (V, E_g)$ streng zusammenhängend

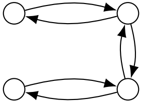
Zusammenhang in ungerichteten Graphen



- ungerichteter Graph $U = (V, E)$ *zusammenhängend*,
  wenn zugehöriger gerichteter $G_U = (V, E_g)$ streng zusammenhängend

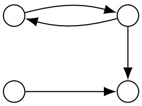
Zusammenhang in ungerichteten Graphen





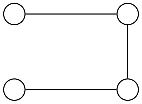
- ungerichteter Graph $U = (V, E)$ *zusammenhängend*, wenn zugehöriger gerichteter $G_U = (V, E_g)$ streng zusammenhängend

Von gerichteten zu ungerichteten Graphen — die umgekehrte Richtung ist auch nützlich



- sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph
- definiere

$$E_u = \{\ \{x, y\} \mid (x, y) \in E\}$$



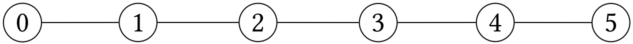
- $U_G = (V, E_u)$ ist der *zu G gehörige ungerichtete Graph*
- U entsteht aus G durch „Entfernen" der Pfeilspitzen

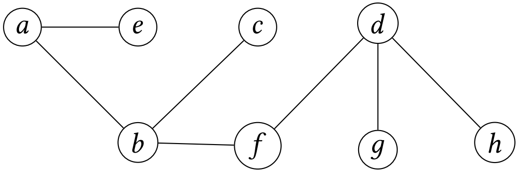
Ungerichtete Bäume

- *ungerichteter Baum:* ungerichteter Graph $U = (V, E)$,
  - zu dem gerichteter Baum $G = (V, E')$ existiert
  - mit $E = E'_u$

Ungerichtete Bäume

- *ungerichteter Baum:* ungerichteter Graph $U = (V, E)$,
  - zu dem gerichteter Baum $G = (V, E')$ existiert
  - mit $E = E'_u$
- Beispiele





Ungerichtete Bäume

- verschiedene gerichtete Bäume können den gleichen ungerichteten Baum induzieren
- Wurzel
  - gerichtet: Wurzel eindeutig zu identifizieren
  - ungerichtet
    - Von jedem Knoten führen Wege zu jedem anderen
    - Wurzel muss explizit angegeben werden

Knotengrad in ungerichteten Graphen — ein heikles Thema

- Was macht man mit Schlingen?
  - in der Literatur: verschiedene Vorgehensweisen
- wir machen das so:
  Grad $d(x)$ des Knotens $x \in V$ in ungerichtetem Graph:

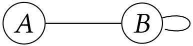
$$d(x) = \left|\{y \mid y \neq x \land \{x, y\} \in E\}\right| + \begin{cases} 2 & \text{falls } \{x, x\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  man zählt die «Kantenenden»

Knotengrad in ungerichteten Graphen — ein heikles Thema

- Was macht man mit Schlingen?
  - in der Literatur: verschiedene Vorgehensweisen
- wir machen das so:
  Grad $d(x)$ des Knotens $x \in V$ in ungerichtetem Graph:

$$d(x) = \left|\{y \mid y \neq x \wedge \{x,y\} \in E\}\right| + \begin{cases} 2 & \text{falls } \{x,x\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



man zählt die «Kantenenden»

- $d(B) = 3$

Wo sind wir?

Gerichtete Graphen

Ungerichtete Graphen

- Übertragung der Grundbegriffe aus dem gerichteten Fall
- Eine Anmerkung zu Relationen

Repräsentation von Graphen im Rechner

Symmetrische Relationen

- Kantenrelation ungerichteter Graphen hat die Eigenschaft: Wenn $(x, y) \in E_g$, dann immer auch $(y, x) \in E_g$.
- so etwas kommt öfter vor
- Relation $R \subseteq M \times M$ *symmetrisch*, wenn gilt:

$$\forall x \in M \; \forall y \in M : (x, y) \in R \longrightarrow (y, x) \in R$$

Äquivalenzrelationen

- Eine Relation, die
  - reflexiv,
  - transitiv und
  - symmetrisch

  ist, heißt *Äquivalenzrelation*.
- Beispiel: Isomorphie von Graphen

Äquivalenzrelationen

- Eine Relation, die
  - reflexiv,
  - transitiv und
  - symmetrisch

  ist, heißt *Äquivalenzrelation*.
- Beispiel: Isomorphie von Graphen
- Beispiel: „Kongruenz modulo m“
  - es sei $m \in \mathbb{N}_+$
  - definiere $\equiv_m$ auf $\mathbb{Z}$ vermöge der Festlegung

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \equiv_m y \quad \text{gdw.} \quad m \text{ teilt } |x - y|$$

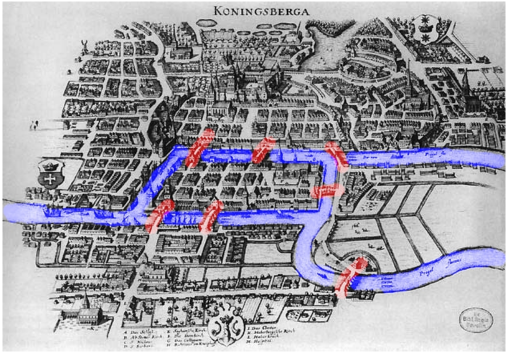
- Nicht-Beispiel: $\leq$ auf $\mathbb{N}_0$: zwar $3 \leq 5$ aber $5 \not\leq 3$.

Was ist wichtig

Karlsruher Institut für Technologie

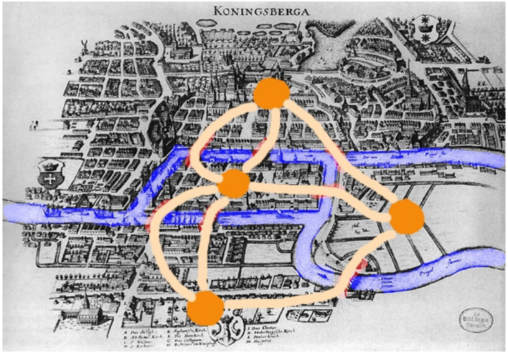
- Das sollten Sie mitnehmen:
  - ungerichtete Graphen:
    - Unterschiede zu gerichteten Graphen
    - Gemeinsamkeiten mit gerichteten Graphen
- Das sollten Sie üben:
  - Benutzung der Begriffe
  - Malen von Graphen, hübsche und hässliche

Eine Grenze der üblichen Formalisierung von Graphen



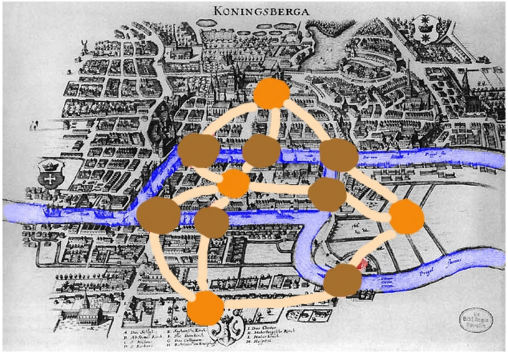
- nicht einfach als Graph formalisierbar

Eine Grenze der üblichen Formalisierung von Graphen



- nicht einfach als Graph formalisierbar
- zwischen Knoten höchstens *eine* Kante !?

Eine Grenze der üblichen Formalisierung von Graphen



- nicht einfach als Graph formalisierbar
- zwischen Knoten höchstens *eine* Kante !?
- Auswege
  - andere Modellierung
  - andere Definition
    - Graph mit Mehrfachkanten

Wo sind wir?

Gerichtete Graphen

Ungerichtete Graphen

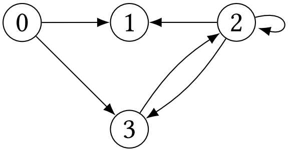
Repräsentation von Graphen im Rechner

Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphen

- $G = (V, E)$ gerichtet mit n Knoten
  $n \times n$-Matrix A mit

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j) \in E \\ 0 & \text{falls } (i, j) \notin E \end{cases}$$

- ungerichtetes $U = (V, E) \rightsquigarrow G = (V, E_g)$
- Beispiel



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Repräsentation von Relationen durch Matrizen

- endliche Menge M mit n Elementen
  - «naheliegend durchnummeriert»
- binäre Relation $R \subseteq M \times M$
- repräsentiert durch $n \times n$-Matrix $A(R)$:

$$(A(R))_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in R \quad \text{also } iRj \\ 0 & \text{falls } (i,j) \notin R \quad \text{also } \neg(iRj) \end{cases}$$

- verschiedene Relationen $\leftrightarrow$ verschiedene Matrizen

Wegematrix eines Graphen

- Erreichbarkeitsrelation E^* als Matrix W

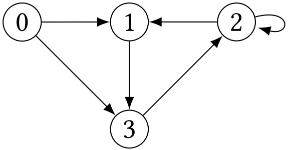
$$W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i,j) \notin E^* \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{falls es in } G \text{ einen Pfad von } i \text{ nach } j \text{ gibt} \\ 0 & \text{falls es in } G \text{ keinen Pfad von } i \text{ nach } j \text{ gibt} \end{cases}$$

- algorithmisches Problem:
  - gegebene Probleminstanz: Adjazenzmatrix eines Graphen
  - gesucht: zugehörige Wegematrix des Graphen

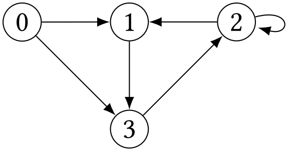
Wegematrix — ein Beispiel

- $W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i, j) \notin E^* \end{cases}$



$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- $W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i, j) \notin E^* \end{cases}$

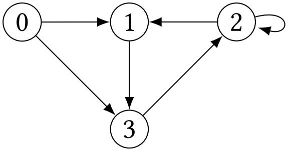


$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- $W = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$

Wegematrix — ein Beispiel

- $W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i,j) \notin E^* \end{cases}$

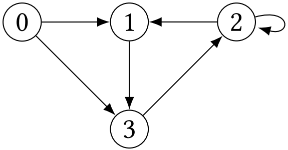


$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- $W = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

Wegematrix — ein Beispiel

- $W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i,j) \notin E^* \end{cases}$

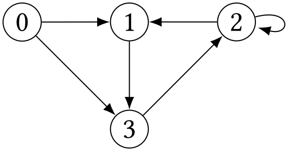


$$A = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- $W = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

Wegematrix — ein Beispiel

- $W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i,j) \notin E^* \end{cases}$

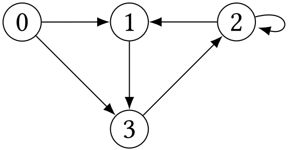


$$A = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- $$W = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Wegematrix — ein Beispiel

- $$W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i,j) \notin E^* \end{cases}$$



$$A = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- $$W = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Was ist wichtig

- Das sollten Sie mitnehmen:
  - Repräsentation von Relationen als Matrizen
  - z. B. Kantenrelation eines Graphen: Adjazenzmatrix
- Das sollten Sie üben:
  - zu gegebenem Graphen die Adjazenzmatrix hinschreiben
  - zu gegebener Adjazenzmatrix den Graphen hinmalen
  - z. B. für irgendwelche «speziellen» Graphen und Matrizen

Zusammenfassung

- gerichtete und ungerichtete Graphen
  - wichtige Begriffe (Pfad, Zyklus, Baum, …)
  - Gemeinsamkeiten und Unterschiede

- Relationen
  - symmetrische Relationen
  - Äquivalenzrelationen