

Grundbegriffe der Informatik

Kapitel 16: Erste Algorithmen in Graphen

Mattias Ulbrich
(basierend auf Folien von Thomas Worsch)

KIT · Institut für Theoretische Informatik

Wintersemester 2023/2024

Repräsentation von Graphen im Rechner

Berechnung der 2-Erreichbarkeitsrelation und Rechnen mit Matrizen

- 2-Erreichbarkeit an einem Beispiel

- Matrizenmultiplikation und Matrizenaddition

Einfache Berechnung der Erreichbarkeitsrelation

- Potenzen der Adjazenzmatrix

- Erste Möglichkeit für die Berechnung der Wegematrix

- Zählen arithmetischer Operationen

- Schnellere Berechnungen der Wegematrix

Wo sind wir?

Repräsentation von Graphen im Rechner

Berechnung der 2-Erreichbarkeitsrelation und Rechnen mit Matrizen

Einfache Berechnung der Erreichbarkeitsrelation

```
class Vertex {  
    String name;  
}
```

«Knoteninhalte» für uns irrelevant

```
class Edge {  
    Vertex start;  
    Vertex end;  
}
```

```
class Graph {  
    Vertex[] vertices;  
    Edge[] edges;  
}
```

mehr als eine Menge
mehr als eine Menge

```
class Vertex {  
    int id;  
}
```

o. B. d. A.: Wertebereich $\mathbb{Z}_{|V|}$

```
class Edge {  
    Vertex start;  
    Vertex end;  
}
```

```
class Graph {  
    Vertex[] vertices;  
    Edge[] edges;  
}
```

mehr als eine Menge
mehr als eine Menge

```
class Vertex {  
    int id;  
}
```

o. B. d. A.: Wertebereich $\mathbb{Z}_{|V|}$

```
class Edge {  
    Vertex start;  
    Vertex end;  
}
```

```
class Graph {  
    Vertex[] vertices;  
    Edge[] edges;  
}
```

mehr als eine Menge
mehr als eine Menge

```
class Vertex {  
    int id;  
}
```

o. B. d. A.: Wertebereich $\mathbb{Z}_{|V|}$

```
class Edge {  
    Vertex start;  
    Vertex end;  
}
```

```
class Graph {  
    Vertex[] vertices;  
    Edge[] edges;  
}
```

mehr als eine Menge
mehr als eine Menge

```
class Vertex {  
    int id;  
    Edge[] incoming;  
    Edge[] outgoing;  
}
```

Feldlänge = Eingangsknotengrad

Feldlänge = Ausgangsknotengrad

```
class Edge {  
    Vertex start;  
    Vertex end;  
}
```

```
class Graph {  
    Vertex[] vertices;  
    Edge[] edges;  
}
```


Adjazenzlisten — eine andere Repräsentation für Graphen

```
class Vertex {  
    int id;  
    Vertex[] neighbors;    Feldlänge = Knotengrad  
}
```

```
class Edge {  
    Vertex start;  
    Vertex end;  
}
```

```
class Graph {  
    Vertex[] vertices;  
    Edge[] edges;  
}
```

Variante von Adjazenzlisten (auf dem Weg zu Matrizen)

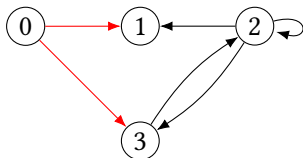
```
class Vertex {  
    int id;  
    boolean[] is_connected_to;  
}
```

Feldlänge = $|V|$
 $u.is_connected_to[v.id]$

$$= \begin{cases} \text{true} & \text{falls } (u, v) \in E \\ \text{false} & \text{falls } (u, v) \notin E \end{cases}$$

```
class Graph {  
    Vertex[] vertices;  
}
```

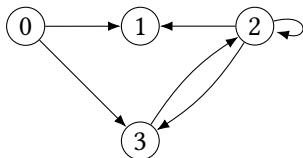
Variante von Adjazenzlisten für einen Beispielgraph



- Objekt u für Knoten 0

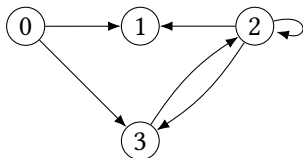
$u.id$	$u.is_connected_to$			
	0	1	2	3
0	false	true	false	true

Variante von Adjazenzlisten für einen Beispielgraph



<i>u.id</i>	<i>u.is_connected_to</i>			
	0	1	2	3
0	false	true	false	true
1	false	false	false	false
2	false	true	true	true
3	false	false	true	false

Variante von Adjazenzlisten für einen Beispielgraph

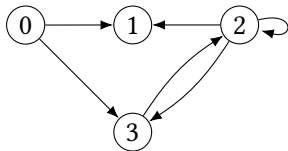


<i>u.id</i>	<i>u.is_connected_to</i>			
	0	1	2	3
0	false	true	false	true
1	false	false	false	false
2	false	true	true	true
3	false	false	true	false

- $G = (V, E)$ gerichtet mit n Knoten
 $n \times n$ -Matrix A mit

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j) \in E \\ 0 & \text{falls } (i, j) \notin E \end{cases}$$

- ungerichtetes $U = (V, E) \rightsquigarrow G = (V, E_g)$
- Beispiel



$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- endliche Menge M mit n Elementen
- binäre Relation $R \subseteq M \times M$
- repräsentiert durch $n \times n$ -Matrix $A(R)$:

$$(A(R))_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j) \in R \quad \text{d. h. also } iRj \\ 0 & \text{falls } (i, j) \notin R \quad \text{d. h. also } \neg(iRj) \end{cases}$$

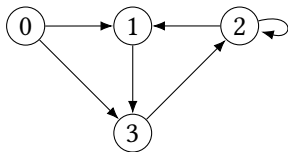
- verschiedene Relationen $\leftrightarrow$ verschiedene Matrizen

- Erreichbarkeitsrelation E^* als Matrix W

$$\begin{aligned} W_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i, j) \notin E^* \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls es in } G \text{ einen Pfad von } i \text{ nach } j \text{ gibt} \\ 0 & \text{falls es in } G \text{ keinen Pfad von } i \text{ nach } j \text{ gibt} \end{cases} \end{aligned}$$

- algorithmisches Problem:
 - gegebene Probleminstanz: Adjazenzmatrix eines Graphen
 - gesucht: zugehörige Wegematrix des Graphen

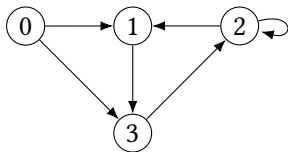
$$\blacksquare W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i, j) \notin E^* \end{cases}$$



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Wegematrix — ein Beispiel

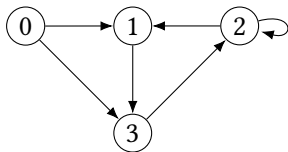
$$\blacksquare W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i, j) \notin E^* \end{cases}$$



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\blacksquare W = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\blacksquare W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i, j) \notin E^* \end{cases}$$

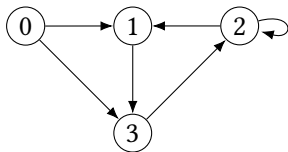


$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\blacksquare W = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Wegematrix — ein Beispiel

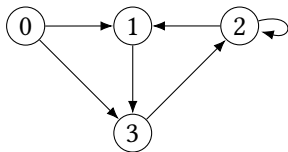
$$\blacksquare W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i, j) \notin E^* \end{cases}$$



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\blacksquare W = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

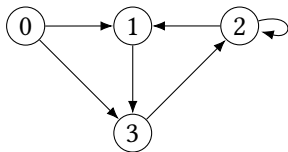
$$\blacksquare W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i, j) \notin E^* \end{cases}$$



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\blacksquare W = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\blacksquare W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i, j) \notin E^* \end{cases}$$



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\blacksquare W = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- **Das sollten Sie mitnehmen:**
 - Repräsentation von Relationen als Matrizen
 - z. B. Kantenrelation eines Graphen: Adjazenzmatrix
- **Das sollten Sie üben:**
 - zu gegebenem Graphen die Adjazenzmatrix hinschreiben
 - zu gegebener Adjazenzmatrix den Graphen hinmalen
 - z. B. für irgendwelche „speziellen“ Graphen und Matrizen

Wo sind wir?

Repräsentation von Graphen im Rechner

Berechnung der 2-Erreichbarkeitsrelation und Rechnen mit Matrizen

Einfache Berechnung der Erreichbarkeitsrelation

Wo sind wir?

Repräsentation von Graphen im Rechner

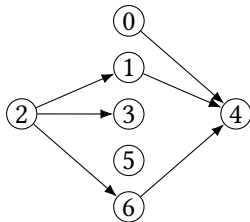
Berechnung der 2-Erreichbarkeitsrelation und Rechnen mit Matrizen

2-Erreichbarkeit an einem Beispiel

Matrizenmultiplikation und Matrizenaddition

Einfache Berechnung der Erreichbarkeitsrelation

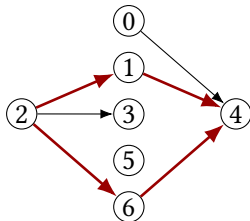
2-Erreichbarkeit an einem Beispiel



	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0
2	0	1	0	1	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0

- gesucht: Pfade der Länge 2
von Knoten 2 zu Knoten 4

2-Erreichbarkeit an einem Beispiel



■

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0
2	0	1	0	1	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0

- gesucht: Pfade der Länge 2
von Knoten 2 zu Knoten 4
- hinsehen: $(2, 1, 4)$ und $(2, 6, 4)$

Systematische Suche nach Pfaden im Beispiel

- alle Pfade?
- prüfe für *alle* Knoten $k \in V$:
 - Ist $(2, k, 4)$ ein Pfad?

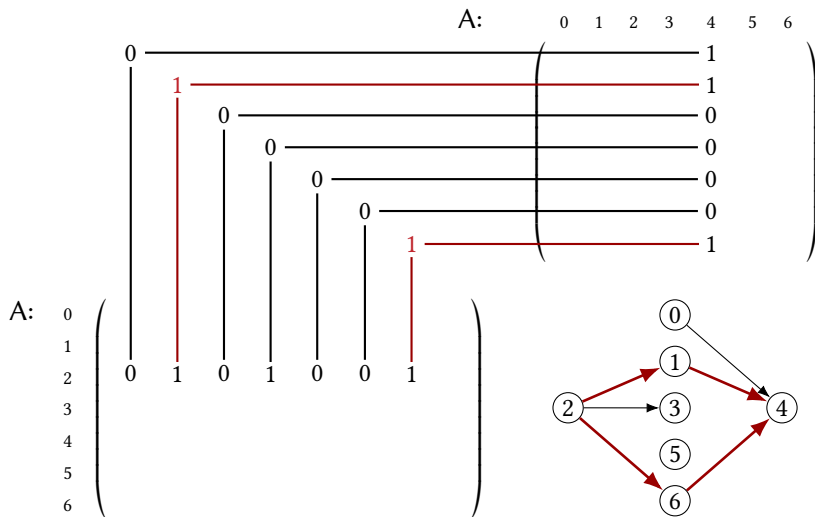
Systematische Suche nach Pfaden im Beispiel

- alle Pfade?
- prüfe für *alle* Knoten $k \in V$:
 - Ist $(2, k, 4)$ ein Pfad?
 - Ist $(2, k) \in E$ und $(k, 4) \in E$?

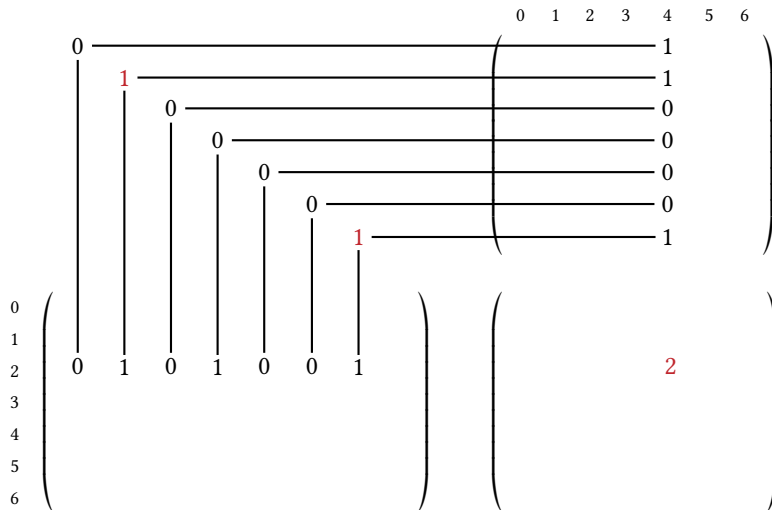
- alle Pfade?
- prüfe für *alle* Knoten $k \in V$:
 - Ist $(2, k, 4)$ ein Pfad?
 - Ist $(2, k) \in E$ und $(k, 4) \in E$?
 - Ist $A_{2k} = 1$ und $A_{k4} = 1$?

- alle Pfade?
- prüfe für *alle* Knoten $k \in V$:
 - Ist $(2, k, 4)$ ein Pfad?
 - Ist $(2, k) \in E$ und $(k, 4) \in E$?
 - Ist $A_{2k} = 1$ und $A_{k4} = 1$?
 - Ist $A_{2k} \cdot A_{k4} = 1$?

- alle Pfade?
- prüfe für *alle* Knoten $k \in V$:
 - Ist $(2, k, 4)$ ein Pfad?
 - Ist $(2, k) \in E$ und $(k, 4) \in E$?
 - Ist $A_{2k} = 1$ und $A_{k4} = 1$?
 - Ist $A_{2k} \cdot A_{k4} = 1$?
- durchlaufe sequenziell für alle k
 - gleichzeitig alle A_{2k} und alle A_{k4} , d. h.
 - *Zeile* für Knoten 2 und *Spalte* für Knoten 4



Zählen der Pfade im Beispiel



Zählen der Pfade im Beispiel (2)

$$P_{24} = \sum_{k=0}^6 A_{2k} \cdot A_{k4}$$

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{pmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{pmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

Repräsentation von Graphen im Rechner

Berechnung der 2-Erreichbarkeitsrelation und Rechnen mit Matrizen

2-Erreichbarkeit an einem Beispiel

Matrizenmultiplikation und Matrizenaddition

Einfache Berechnung der Erreichbarkeitsrelation

- es sei
 - A eine $\ell \times n$ -Matrix
 - B eine $n \times m$ -Matrix
- Produkt $C = A \cdot B$ die $\ell \times m$ -Matrix mit

$$C_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} A_{ik} \cdot B_{kj}$$

- im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$
 - falls überhaupt beides definiert, also $\ell = m$

- zunächst die naheliegende Möglichkeit
bald: es geht auch anders!

ℓ Zeilen
 m Spalten

$$C_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} A_{ik} \cdot B_{kj}$$

```
for  $i \leftarrow 0$  to  $\ell - 1$  do  
  for  $j \leftarrow 0$  to  $m - 1$  do  
     $C_{ij} \leftarrow 0$   
    for  $k \leftarrow 0$  to  $n - 1$  do  
       $C_{ij} \leftarrow C_{ij} + A_{ik} \cdot B_{kj}$   
    od  
  od  
od
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Einheitsmatrix I quadratische Matrix mit

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

- für jede $m \times n$ -Matrix A gilt

$$I \cdot A = A = A \cdot I$$

- linke Einheitsmatrix $m \times m$
- rechte Einheitsmatrix $n \times n$

$$A^0 = I$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : A^{n+1} = A^n \cdot A$$

- A^2 einer Adjazenzmatrix A

$$(A^2)_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} A_{ik}A_{kj}$$

- $A_{ik}A_{kj} = 1$

$$\Leftrightarrow A_{ik} = A_{kj} = 1$$

$\Leftrightarrow$ Kanten von i nach k und von k nach j existieren

$\Leftrightarrow (i, k, j)$ ein Pfad der Länge 2 von i nach j ist.

und 0 sonst.

- für $k_1 \neq k_2$ sind (i, k_1, j) und (i, k_2, j) verschieden
- $(A^2)_{ij}$ ist Anzahl der Pfade der Länge 2 von i nach j

- A^2 einer Adjazenzmatrix A

$$(A^2)_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} A_{ik}A_{kj}$$

- $A_{ik}A_{kj} = 1$

$$\Leftrightarrow A_{ik} = A_{kj} = 1$$

$\Leftrightarrow$ Kanten von i nach k und von k nach j existieren

$\Leftrightarrow (i, k, j)$ ein Pfad der Länge 2 von i nach j ist.

und 0 sonst.

- für $k_1 \neq k_2$ sind (i, k_1, j) und (i, k_2, j) verschieden

- $(A^2)_{ij}$ ist Anzahl der Pfade der Länge 2 von i nach j

- A und B zwei $m \times n$ -Matrizen
- Summe $C = A + B$ ist $m \times n$ -Matrix mit

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

- stets $A + B = B + A$
- neutrales Element: Nullmatrix 0 , überall Nullen
- algorithmisch:

```
for  $i \leftarrow 0$  to  $m - 1$  do  
  for  $j \leftarrow 0$  to  $n - 1$  do  
     $C_{ij} \leftarrow A_{ij} + B_{ij}$   
  od  
od
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ 33 & 44 \end{pmatrix}$$

Wo sind wir?

Repräsentation von Graphen im Rechner

Berechnung der 2-Erreichbarkeitsrelation und Rechnen mit Matrizen

Einfache Berechnung der Erreichbarkeitsrelation

Berechnung von E^* — die naheliegende Idee

- Benutze

$$E^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} E^i$$

um die Wegematrix zu berechnen.

Berechnung von E^* — die naheliegende Idee

- Benutze

$$E^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} E^i$$

um die Wegematrix zu berechnen.

- Probleme:
 - Was kann man gegen das **unendlich** tun?

Berechnung von E^* — die naheliegende Idee

- Benutze

$$E^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} E^i$$

um die Wegematrix zu berechnen.

- Probleme:
 - Was kann man gegen das unendlich tun?
 - Woher kommen die Matrizen für die Relationen E^i ?

- Benutze

$$E^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} E^i$$

um die Wegematrix zu berechnen.

- Probleme:
 - Was kann man gegen das unendlich tun?
 - Woher kommen die Matrizen für die Relationen E^i ?
 - Welcher Matrizen-Operation entspricht die Vereinigung?

- Existiert Pfad in G von Knoten i nach Knoten j ?
- Sei
 - $G = (V, E)$ mit $|V| = n$
 - nur *endlich* viele Knoten
 - $p = (i_0, i_1, \dots, i_k)$ ein Pfad mit $i_0 = i$ und $i_k = j$.

- Existiert Pfad in G von Knoten i nach Knoten j ?
- Sei
 - $G = (V, E)$ mit $|V| = n$
 - nur *endlich* viele Knoten
 - $p = (i_0, i_1, \dots, i_k)$ ein Pfad mit $i_0 = i$ und $i_k = j$.
- wenn $k \geq n$, dann
 - enthält p Zyklus von x nach x
 - Weglassen ergibt kürzeren Pfad von i nach j

- Existiert Pfad in G von Knoten i nach Knoten j ?
- Sei
 - $G = (V, E)$ mit $|V| = n$
 - nur *endlich* viele Knoten
 - $p = (i_0, i_1, \dots, i_k)$ ein Pfad mit $i_0 = i$ und $i_k = j$.
- wenn $k \geq n$, dann
 - enthält p Zyklus von x nach x
 - Weglassen ergibt kürzeren Pfad von i nach j
- wiederhole, solange Pfadlänge $\geq n$
- Ergebnis: Pfad mit Länge $\leq n - 1$ von i nach j

eben begründet:

Lemma

Für jeden gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit n Knoten gilt:

$$E^* = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_n} E^i$$

eben begründet:

Lemma

Für jeden gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit n Knoten gilt:

$$E^* = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_n} E^i$$

längere Pfade schaden nicht:

Lemma

Für jeden gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit n Knoten gilt:

$$\forall k \geq n : E^* = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_k} E^i$$

Wo sind wir?

Repräsentation von Graphen im Rechner

Berechnung der 2-Erreichbarkeitsrelation und Rechnen mit Matrizen

Einfache Berechnung der Erreichbarkeitsrelation

Potenzen der Adjazenzmatrix

Erste Möglichkeit für die Berechnung der Wegematrix

Zählen arithmetischer Operationen

Schnellere Berechnungen der Wegematrix

Lemma

Es sei G ein gerichteter Graph mit Adjazenzmatrix A .

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$(A^k)_{ij}$ ist die Anzahl der Pfade der Länge k in G von i nach j .

Beweis:

- vollständige Induktion
- Induktionsschritt fast wie im Fall $k = 2$

- $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$
- bei Matrizen komponentenweise
- $\text{sgn} : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $(\text{sgn}(M))_{ij} = \text{sgn}(M_{ij})$

Korollar

Es sei G ein gerichteter Graph mit Adjazenzmatrix A .
Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

1.

$$\text{sgn}((A^k)_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{falls in } G \text{ ein Pfad der Länge } k \\ & \text{von } i \text{ nach } j \text{ existiert} \\ 0 & \text{falls in } G \text{ kein Pfad der Länge } k \\ & \text{von } i \text{ nach } j \text{ existiert} \end{cases}$$

2. Matrix $\text{sgn}(A^k)$ repräsentiert die Relation E^k .

Wo sind wir?

Repräsentation von Graphen im Rechner

Berechnung der 2-Erreichbarkeitsrelation und Rechnen mit Matrizen

Einfache Berechnung der Erreichbarkeitsrelation

Potenzen der Adjazenzmatrix

Erste Möglichkeit für die Berechnung der Wegematrix

Zählen arithmetischer Operationen

Schnellere Berechnungen der Wegematrix

- Relationen $R \subseteq M \times M$ und $R' \subseteq M \times M$ repräsentiert durch Matrizen A und A' .
- dann:

$$\begin{aligned}(i, j) \in R \cup R' &\leftrightarrow (i, j) \in R \vee (i, j) \in R' \\&\leftrightarrow A_{ij} = 1 \vee A'_{ij} = 1 \\&\leftrightarrow A_{ij} + A'_{ij} \geq 1 \\&\leftrightarrow (A + A')_{ij} \geq 1 \\&\leftrightarrow \text{sgn}(A + A')_{ij} = 1\end{aligned}$$

- $R \cup R'$ wird durch $\text{sgn}(A + A')$ repräsentiert

Eine erste Formel für die Wegematrix — es gibt auch noch andere ...

Lemma

Es sei G ein gerichteter Graph mit Adjazenzmatrix A .
Dann gilt für alle $k \geq n - 1$:

- Die Matrix $\text{sgn}(\sum_{i=0}^k A^i)$ repräsentiert die Relation E^* .
- Mit anderen Worten:

$$W = \text{sgn} \left(\sum_{i=0}^k A^i \right)$$

ist die Wegematrix des Graphen G .

- noch zu überlegen
- $\bigcup_{i=0}^{n-1} E^i$ durch $\text{sgn}(\sum_{i=0}^k \text{sgn}(A^i))$ repräsentiert
 - leichte Verallgemeinerung des Falles $R \cup R'$
- „innere“ Anwendungen von sgn dürfen fehlen
 - Wenn alle Matrixeinträge ≥ 0 sind, gilt:

$$\text{sgn}(\text{sgn}(M) + \text{sgn}(M'))_{ij} = \text{sgn}(M + M')_{ij}$$

Einfachster Algorithmus für die Wegematrix

⟨Matrix A sei die Adjazenzmatrix⟩

$W \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ **do**

$M \leftarrow I$

for $j \leftarrow 1$ **to** i **do**

$M \leftarrow M \cdot A$

od

$W \leftarrow W + M$

od

$W \leftarrow \text{sgn}(W)$

Einfachster Algorithmus für die Wegematrix

⟨Matrix A sei die Adjazenzmatrix⟩

$W \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ **do**

$M \leftarrow I$

for $j \leftarrow 1$ **to** i **do**

$M \leftarrow M \cdot A$

od

$\{ M = A^i \}$

$W \leftarrow W + M$

$\{ W = \sum_{k=0}^i A^k \}$

od

$W \leftarrow \text{sgn}(W)$

$\{ W \text{ ist die Wegematrix} \}$

Wo sind wir?

Repräsentation von Graphen im Rechner

Berechnung der 2-Erreichbarkeitsrelation und Rechnen mit Matrizen

Einfache Berechnung der Erreichbarkeitsrelation

Potenzen der Adjazenzmatrix

Erste Möglichkeit für die Berechnung der Wegematrix

Zählen arithmetischer Operationen

Schnellere Berechnungen der Wegematrix

Was ist der «Aufwand» eines Algorithmus?

- Anzahl Codezeilen?
- Entwicklungszeit?
- Anzahl Schritte?
 - nicht immer gleich
- benötigter Speicherplatz?
 - nicht immer gleich
- vorläufig: Anzahl arithmetischer Operationen
 - später anders

Wie viele elementare Operationen für Matrizenaddition?

```
for  $i \leftarrow 0$  to  $m - 1$  do  
  for  $j \leftarrow 0$  to  $n - 1$  do  
     $C_{ij} \leftarrow A_{ij} + B_{ij}$   
  od  
od
```

- $m \cdot n$ Additionen
für $n \times n$ -Matrizen: n^2

Wie viele elementare Operationen für Multiplikation?

```
for  $i \leftarrow 0$  to  $\ell - 1$  do
  for  $j \leftarrow 0$  to  $m - 1$  do
     $C_{ij} \leftarrow 0$ 
    for  $k \leftarrow 0$  to  $n - 1$  do
       $C_{ij} \leftarrow C_{ij} + A_{ik} \cdot B_{kj}$ 
    od
  od
od
```

- $\ell \cdot m \cdot n$ Additionen und
 $\ell \cdot m \cdot n$ Multiplikationen
- für $n \times n$ -Matrizen: $2n^3$
kleine Variante: $2n^3 - n^2$
- **Achtung:** es geht auch mit
weniger Operationen!

Wie viele elementare Operationen für Wegematrix?

```
W ← 0
for i ← 0 to n - 1 do
  M ← I
  for j ← 1 to i do
    M ← M · A
  od
  W ← W + M
od
W ← sgn(W)
```

■ Aufwand:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} i \right) \cdot (2n^3 - n^2) + n \cdot n^2 + n^2$$
$$= n^5 - \frac{3}{2}n^4 + \frac{3}{2}n^3 + n^2$$

■ denn $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$

Wie viele elementare Operationen für Wegematrix?

```
W ← 0
for i ← 0 to n - 1 do
  M ← I
  for j ← 1 to i do
    M ← M · A
  od
  W ← W + M
od
W ← sgn(W)
```

■ Aufwand:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} i \right) \cdot (2n^3 - n^2) + n \cdot n^2 + n^2$$
$$= n^5 - \frac{3}{2}n^4 + \frac{3}{2}n^3 + n^2$$

■ denn $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$

Wie viele elementare Operationen für Wegematrix?

```
W ← 0
for i ← 0 to n - 1 do
  M ← I
  for j ← 1 to i do
    M ← M · A
  od
  W ← W + M
od
W ← sgn(W)
```

■ Aufwand:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} i \right) \cdot (2n^3 - n^2) + n \cdot n^2 + n^2$$
$$= n^5 - \frac{3}{2}n^4 + \frac{3}{2}n^3 + n^2$$

■ denn $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$

Wie viele elementare Operationen für Wegematrix?

```
W ← 0
for i ← 0 to n - 1 do
  M ← I
  for j ← 1 to i do
    M ← M · A
  od
  W ← W + M
od
W ← sgn(W)
```

■ Aufwand:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} i \right) \cdot (2n^3 - n^2) + n \cdot n^2 + n^2$$
$$= n^5 - \frac{3}{2}n^4 + \frac{3}{2}n^3 + n^2$$

■ denn $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$

Wie viele elementare Operationen für Wegematrix?

```
W ← 0
for i ← 0 to n - 1 do
  M ← I
  for j ← 1 to i do
    M ← M · A
  od
  W ← W + M
od
W ← sgn(W)
```

■ Aufwand:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^{n-1} i \right) \cdot (2n^3 - n^2) + n \cdot n^2 + n^2 \\ = n^5 - \frac{3}{2}n^4 + \frac{3}{2}n^3 + n^2 \end{aligned}$$

■ denn $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$

Wie viele elementare Operationen für Wegematrix?

```
W ← 0
for i ← 0 to n - 1 do
  M ← I
  for j ← 1 to i do
    M ← M · A
  od
  W ← W + M
od
W ← sgn(W)
```

■ Aufwand:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} i \right) \cdot (2n^3 - n^2) + n \cdot n^2 + n^2$$
$$= n^5 - \frac{3}{2}n^4 + \frac{3}{2}n^3 + n^2$$

■ denn $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$

Wo sind wir?

Repräsentation von Graphen im Rechner

Berechnung der 2-Erreichbarkeitsrelation und Rechnen mit Matrizen

Einfache Berechnung der Erreichbarkeitsrelation

Potenzen der Adjazenzmatrix

Erste Möglichkeit für die Berechnung der Wegematrix

Zählen arithmetischer Operationen

Schnellere Berechnungen der Wegematrix

Wiederverwendung —

auch bei Zwischenergebnissen eine gute Sache

$W \leftarrow 0$

$M \leftarrow 1$

for $i \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ **do**

$W \leftarrow W + M$

$M \leftarrow M \cdot A$

od

$W \leftarrow \text{sgn}(W)$

- für Berechnung A^i kann man A^{i-1} wiederverwenden
- Aufwand:

$$n \cdot (n^2 + (2n^3 - n^2)) + n^2 = 2n^4 + n^2$$

Es geht noch besser — erst mehr denken und dann weniger rechnen

- Schon vergessen?

$$\forall k \geq n - 1 : E^* = \bigcup_{i=0}^k E^i$$

- Wie kann ein $k > n - 1$ helfen?

Es geht noch besser — erst mehr denken und dann weniger rechnen

- Schon vergessen?

$$\forall k \geq n - 1 : E^* = \bigcup_{i=0}^k E^i$$

- Wie kann ein $k > n - 1$ helfen?
 - statt $n - 1$ wähle kleinste Zweierpotenz $k = 2^m \geq n$
 - also $m = \lceil \log_2 n \rceil$

Es geht noch besser — erst mehr denken und dann weniger rechnen

- Schon vergessen?

$$\forall k \geq n - 1 : E^* = \bigcup_{i=0}^k E^i$$

- Wie kann ein $k > n - 1$ helfen?
 - statt $n - 1$ wähle kleinste Zweierpotenz $k = 2^m \geq n$
 - also $m = \lceil \log_2 n \rceil$
 - finde Matrix F mit $W = F^{2^m} = (\dots ((F^2)^2) \dots)^2$
 - nur noch $m = \lceil \log_2 n \rceil$ Matrizenmultiplikationen

Es geht noch besser — erst mehr denken und dann weniger rechnen

- Schon vergessen?

$$\forall k \geq n - 1 : E^* = \bigcup_{i=0}^k E^i$$

- Wie kann ein $k > n - 1$ helfen?
 - statt $n - 1$ wähle kleinste Zweierpotenz $k = 2^m \geq n$
 - also $m = \lceil \log_2 n \rceil$
 - finde Matrix F mit $W = F^{2^m} = (\dots ((F^2)^2) \dots)^2$
 - nur noch $m = \lceil \log_2 n \rceil$ Matrizenmultiplikationen
- Preisfrage: Wie sieht F aus?

Es geht noch besser — erst mehr denken und dann weniger rechnen

- Schon vergessen?

$$\forall k \geq n - 1 : E^* = \bigcup_{i=0}^k E^i$$

- Wie kann ein $k > n - 1$ helfen?
 - statt $n - 1$ wähle kleinste Zweierpotenz $k = 2^m \geq n$
 - also $m = \lceil \log_2 n \rceil$
 - finde Matrix F mit $W = F^{2^m} = (\dots ((F^2)^2) \dots)^2$
 - nur noch $m = \lceil \log_2 n \rceil$ Matrizenmultiplikationen
- Preisfrage: Wie sieht F aus?
- Wähle Matrix F für Relation $R_F = E^0 \cup E^1 = I_V \cup E$.

- $R_F = E^0 \cup E^1$
- $R_F^2 = (E^0 \cup E^1) \circ (E^0 \cup E^1) = E^0 \cup E^1 \cup E^1 \cup E^2$
 $= E^0 \cup E^1 \cup E^2$
- $R_F^4 = (R_F^2)^2 = (E^0 \cup E^1 \cup E^2) \circ (E^0 \cup E^1 \cup E^2)$
 $= \dots$
 $= E^0 \cup E^1 \cup E^2 \cup E^3 \cup E^4$
- Induktion: Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$R_F^{2^m} = \bigcup_{i=0}^{2^m} E^i$$

Es geht noch besser (3)

```
 $F \leftarrow I + A$   
 $m \leftarrow \lceil \log_2 n \rceil$   
for  $i \leftarrow 1$  to  $m$  do  
     $F \leftarrow F \cdot F$   
od  
 $W \leftarrow \text{sgn}(F)$ 
```

- Berechnung von $\lceil \log_2 n \rceil$ aus n
benötigt höchstens $\lceil \log_2 n \rceil$ Operationen
- Aufwand:
$$n^2 + \lceil \log_2 n \rceil + \lceil \log_2 n \rceil \cdot (2n^3 - n^2) + n^2$$
$$= \lceil \log_2 n \rceil \cdot 2n^3 + \dots$$
- «besser» als $2n^4$
- nächstes Kapitel: präzise ungenau sein

- Das sollten Sie mitnehmen:
 - die naheliegende Idee nicht immer die beste
 - Denken, Mathematik, Kreativität, Einfach-mal-drüber-schlafen, ...
- Das sollten Sie üben:
 - Aufwandsabschätzungen bei (ineinander geschachtelten) Schleifen
 - auch mal verrückte Ideen ausprobieren

- Repräsentationen von Graphen im Rechner
- Berechnung der Wegematrix
 - mit vielen oder weniger Operationen
 - Algorithmus von Warshall kommt mit weniger Operationen aus als unsere vorherigen Versuche