Grundbegriffe der Informatik

Kapitel 20: Relationen

Mattias Ulbrich
(basierend auf Folien von Thomas Worsch)

KIT · Institut für Theoretische Informatik

Wintersemester 2023/2024

Überblick

Äquivalenzrelationen

Kongruenzrelationen

Halbordnungen

Ordnungen

Wo sind wir?

Äquivalenzrelationen — eine «Verallgemeinerung» der Gleichheit

- Relation $R \subseteq M \times M$ ist *Äquivalenzrelation*, falls
  - reflexiv,
  - symmetrisch und
  - transitiv
- typische Notation
  - $\equiv$, $\sim$, $\approx$, oder ähnlich
  - Infixschreibweise
- also
  - $\forall x \in M : x \equiv x$,
  - $\forall x \in M : \forall y \in M : x \equiv y \to y \equiv x$
  - $\forall x \in M : \forall y \in M : \forall z \in M : x \equiv y \land y \equiv z \to x \equiv z$

Identität —
einfachstes Beispiel einer Äquivalenzrelation

- $I_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$ ist Äquivalenzrelation, denn
  - $\forall x \in M : x = x$,
  - $\forall x \in M : \forall y \in M : x = y \longrightarrow y = x$
  - $\forall x \in M : \forall y \in M : \forall z \in M : x = y \land y = z \longrightarrow x = z$

Kongruenz ganzer Zahlen modulo n

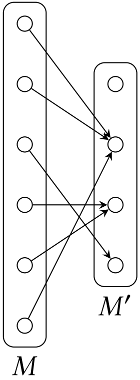
- $x, y \in \mathbb{Z}$ heißen kongruent modulo n, wenn
  - x und y gleichen Rest bei Division durch n liefern, d. h.
  - n teilt $x - y$, d. h.
  - $x - y = kn$ für ein $k \in \mathbb{Z}$
- $x \equiv y \pmod{n}$ für $n \in \mathbb{N}_+$
- Äquivalenzrelation, denn
  - Reflexivität:
    $x - x = 0 = 0n$
  - Symmetrie:
    wenn $x - y = kn$ dann $y - x = (-k)n$
  - Transitivität:
    - wenn $x - y = k_1 n$ und $y - z = k_2 n$
    - dann $x - z = (x - y) + (y - z) = (k_1 + k_2)n$

Beispiel: asymtptotisch gleiches Wachstum

- $f \asymp g$
  - $\exists c, c' \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n)$.

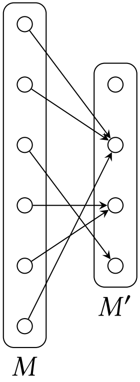
- reflexiv, symmetrisch, transitiv
  - siehe Kapitel 17

Urbilder von Funktionswerten — für jede Abbildung eine Äquivalenzrelation



- sei $f : M \longrightarrow M'$

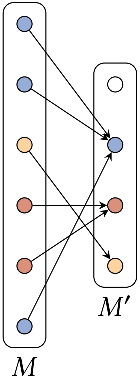
Urbilder von Funktionswerten — für jede Abbildung eine Äquivalenzrelation



- sei $f : M \longrightarrow M'$
- binäre Relation $\equiv_f \subseteq M \times M$ «Faserung von f»

$$\forall x \in M\ \forall y \in M : \ x \equiv_f y \leftrightarrow f(x) = f(y)$$

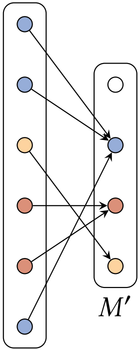
Urbilder von Funktionswerten — für jede Abbildung eine Äquivalenzrelation



- sei $f : M \longrightarrow M'$
- binäre Relation $\equiv_f \subseteq M \times M$ «Faserung von f»

  $$\forall x \in M\ \forall y \in M :\ x \equiv_f y \leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Urbilder von Funktionswerten — für jede Abbildung eine Äquivalenzrelation



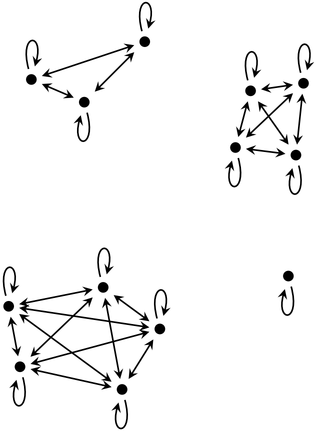
- sei $f : M \to M'$
- binäre Relation $\equiv_f \subseteq M \times M$ «Faserung von f»

  $$\forall x \in M\ \forall y \in M :\ x \equiv_f y \leftrightarrow f(x) = f(y)$$

- $\equiv_f$ ist eine Äquivalenzrelation
  - reflexiv
    $f(x) = f(x)$ also $x \equiv_f x$
  - symmetrisch
    $f(x) = f(y) \to f(y) = f(x)$ also $x \equiv_f y \to y \equiv_f x$
  - transitiv
    $f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z) \to f(x) = f(z)$ also

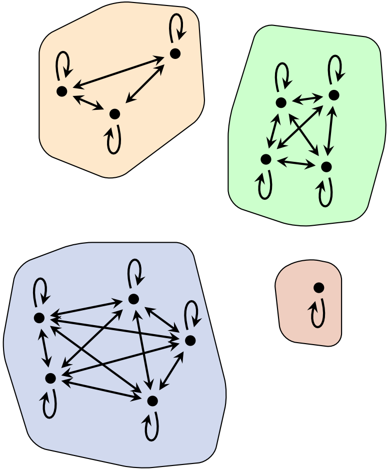
    $$x \equiv_f y \quad \wedge \quad y \equiv_f z \quad \to \quad x \equiv_f z$$

Bild einer Äquivalenzrelation



- hier drücken Pfeile die Äquivalenzbeziehung aus

Bild einer Äquivalenzrelation



- hier drücken Pfeile die Äquivalenzbeziehung aus
- 4 Teilmengen, in denen jeweils
  jeder zu jedem äquivalent

Äquivalenzklassen und Faktormengen

- Äquivalenzklasse von $x \in M$ ist $\{y \in M \mid x \equiv y\}$
  - Schreibweise $[x]_{\equiv}$ oder einfach $[x]$, falls $\equiv$ klar ist
  - also $[x] = [y]$ gdw. $x \equiv y$
- Faktormenge (oder Faserung) von M nach $\equiv$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen
  - Schreibweise $M/_{\equiv} = \left\{ [x]_{\equiv} \;\middle|\; x \in M \right\}$

Beispiel: Äquivalenzklassen von Kongruenz modulo 2

- schreibe $\equiv_2$
- $x \equiv_2 y$ genau dann, wenn $x - y$ durch 2 teilbar,

Beispiel: Äquivalenzklassen von Kongruenz modulo 2

- schreibe $\equiv_2$
- $x \equiv_2 y$ genau dann, wenn $x - y$ durch 2 teilbar,
  - je zwei gerade Zahlen sind äquivalent

Beispiel: Äquivalenzklassen von Kongruenz modulo 2

- schreibe $\equiv_2$
- $x \equiv_2 y$ genau dann, wenn $x - y$ durch 2 teilbar,
  - je zwei gerade Zahlen sind äquivalent
  - je zwei ungerade Zahlen sind äquivalent

Beispiel: Äquivalenzklassen von Kongruenz modulo 2

Karlsruher Institut für Technologie

- schreibe $\equiv_2$
- $x \equiv_2 y$ genau dann, wenn $x - y$ durch 2 teilbar,
  - je zwei gerade Zahlen sind äquivalent
  - je zwei ungerade Zahlen sind äquivalent
  - eine gerade und eine ungerade Zahl sind *nicht* äquivalent

Beispiel: Äquivalenzklassen von Kongruenz modulo 2

- schreibe $\equiv_2$
- $x \equiv_2 y$ genau dann, wenn $x - y$ durch 2 teilbar,
  - je zwei gerade Zahlen sind äquivalent
  - je zwei ungerade Zahlen sind äquivalent
  - eine gerade und eine ungerade Zahl sind *nicht* äquivalent
- zwei Äquivalenzklassen
  - $[0] = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$
  - $[1] = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$
- statt $\mathbb{Z}/_{\equiv_n}$ oft $\mathbb{Z}_n$

Was ist wichtig

- Das sollten Sie mitnehmen:
  - Äquivalenzrelationen
    - Beispiel Kongruenz modulo n
- Das sollten Sie üben:
  - definierenden Eigenschaften überprüfen
  - Anzahl Äquivalenzklassen bestimmen

Wo sind wir?

Äquivalenzrelationen

Kongruenzrelationen

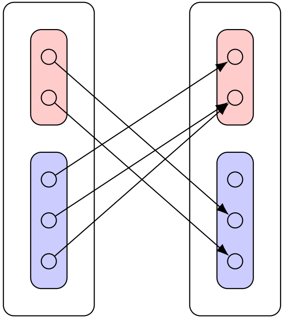
Halbordnungen

Ordnungen

Äquivalenzrelationen auf Mengen mit «Struktur»

- Beispiel: $\equiv_n$ auf additiver Gruppe (oder Ring) $\mathbb{Z}$
- Wie ändern sich Funktionswerte,
  wenn man Argumente durch äquivalente ersetzt?

Verträglichkeit
von Äquivalenzrelationen mit Abbildungen



- $\equiv$ Äquivalenzrelation auf M und
  $f : M \longrightarrow M$ eine Abbildung
- $\equiv$ **ist mit f verträglich**, wenn $\forall x_1, x_2 \in M$:

$$x_1 \equiv x_2 \longrightarrow f(x_1) \equiv f(x_2)$$

- $\equiv$ Äquivalenzrelation und
  $\square$ eine binäre Operation auf M
- $\equiv$ **ist mit $\square$ verträglich**, wenn $\forall x_1, x_2 \in M \ \forall y_1, y_2 \in M$:

$$x_1 \equiv x_2 \land y_1 \equiv y_2 \longrightarrow x_1 \square y_1 \equiv x_2 \square y_2$$

Veträglichkeit: Beispiel modulo

- Äquivalenz „modulo n“ mit
  Addition, Subtraktion und Multiplikation verträglich
- Beispiel
  - wenn

$$\begin{array}{lllll} & x_1 \equiv x_2 & \pmod{n} & \text{also} & x_1 - x_2 = kn \\ \text{und} & y_1 \equiv y_2 & \pmod{n} & \text{also} & y_1 - y_2 = mn \end{array}$$

  - dann

$$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (k + m)n$$

$$\text{also} \qquad x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n}$$

Kongruenzrelationen

Eine Äquivalenzrelation, die mit allen interessierenden Funktionen oder/und Operationen verträglich ist, nennt man auch eine Kongruenzrelation.

Eine Operation für Äquivalenzklassen modulo n?

- für die Äquivalenzklassen von $\equiv_n$ schreiben wir $[x]_n$
- Was ist hiermit:

$$\boxplus : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n : [x]_n \boxplus [y]_n = [x+y]_n \quad ?$$

$$\mathbb{Z}/_{\equiv_n} \times \mathbb{Z}/_{\equiv_n} \to \mathbb{Z}/_{\equiv_n}$$

Eine Operation für Äquivalenzklassen modulo n?

- für die Äquivalenzklassen von $\equiv_n$ schreiben wir $[x]_n$
- Was ist hiermit:

$$\boxplus : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n : [x]_n \boxplus [y]_n = [x+y]_n \quad ?$$
$$\mathbb{Z}/_{\equiv_n} \times \mathbb{Z}/_{\equiv_n} \to \mathbb{Z}/_{\equiv_n}$$

- Ist das in Ordnung?
  Ist das eine Definition?
  Wo kann ein Problem sein?

Verträglichkeit erlaubt die Übertragung einer Abbildung auf die Faktormenge

- Wenn $\equiv$ mit $f : M \to M$ verträglich ist, dann ist

$$f' : M/_{\equiv} \to M/_{\equiv} : f'([x]) = [f(x)]$$

wohldefiniert, denn
$[x_1] = [x_2] \to x_1 \equiv x_2 \to f(x_1) \equiv f(x_2) \to [f(x_1)] = [f(x_2)]$

- Wenn $\equiv$ mit $\square : M \times M \to M$ verträglich ist, dann ist

$$\square' : M/_{\equiv} \times M/_{\equiv} \to M/_{\equiv} : [x] \,\square'\, [y] = [x \,\square\, y]$$

wohldefiniert, denn …(analoges Nachrechnen) …

Was ist wichtig

- Das sollten Sie mitnehmen:
  - Kongruenzrelationen: Verträglichkeit
  - induzierte Abbildungen/Operationen für Äquivalenzklassen
- Das sollten Sie üben:
  - mit Äquivalenzklassen rechnen

Wo sind wir?

Antisymmetrische Relationen

- $R \subseteq M \times M$ *antisymmetrisch*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$xRy \land yRx \longrightarrow x = y$$

- Beispiel Mengeninklusion:
  - zum Beispiel $M = 2^{M'}$ Potenzmenge einer Menge M'
  - Relation $R \subseteq M \times M$ mit

$$\begin{aligned} R &= \{(A, B) \mid A \subseteq M' \land B \subseteq M' \land A \subseteq B\} \\ &= \{(A, B) \mid A \in M \land B \in M \land A \subseteq B\} \end{aligned}$$

  - R ist antisymmetrisch:

$$A \subseteq B \land B \subseteq A \longrightarrow A = B$$

Halbordnungen

Karlsruher Institut für Technologie

- $R \subseteq M \times M$ heißt *Halbordnung*, wenn R
  - reflexiv,
  - antisymmetrisch und
  - transitiv
- Wenn R Halbordnung auf Menge M ist, nennt man M eine halbgeordnete Menge.

Halbordnungen

- $R \subseteq M \times M$ heißt *Halbordnung*, wenn R
  - reflexiv,
  - antisymmetrisch und
  - transitiv
- Wenn R Halbordnung auf Menge M ist, nennt man M eine halbgeordnete Menge.
- Beispiel Mengeninklusion:
  - $A \subseteq A$
  - $A \subseteq B \land B \subseteq A \rightarrow A = B$
  - $A \subseteq B \land B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$

Halbordnungen

- $R \subseteq M \times M$ heißt *Halbordnung*, wenn R
  - reflexiv,
  - antisymmetrisch und
  - transitiv
- Wenn R Halbordnung auf Menge M ist, nennt man M eine halbgeordnete Menge.
- Beispiel Mengeninklusion:
  - $A \subseteq A$
  - $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \rightarrow A = B$
  - $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$
- im allgemeinen gibt es unvergleichbare Elemente:
  - z. B. $\{1, 2, 3\} \not\subseteq \{3, 4, 5\}$ und $\{3, 4, 5\} \not\subseteq \{1, 2, 3\}$

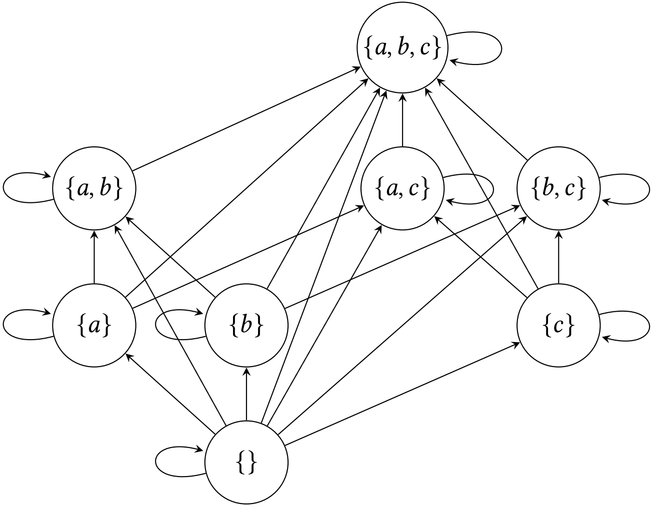
eine Halbordnung auf Wörtern

- $M = A^*$
- Relation $\sqsubseteq_p$ auf A^*:

$$w_1 \sqsubseteq_p w_2 \leftrightarrow \exists u \in A^* : w_1 u = w_2$$

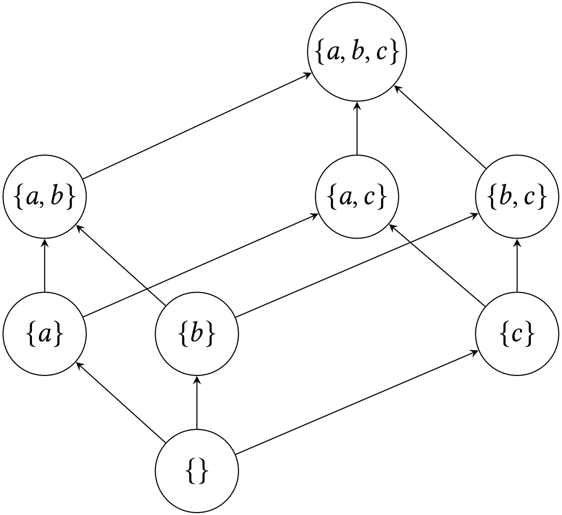
- zum Beispiel im Duden:
  - „`Klaus`“ kommt vor „`Klausur`“
- aber: $\sqsubseteq_p$ ist echte *Halb*ordnung
  - keine Beziehung zwischen `Klausur` und `Übung`

Wenn man weiß, dass es eine Halbordnung ist, enthält der gesamte Graph Redundantes



Beispiel $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$

Wenn man weiß, dass es eine Halbordnung ist, genügt das Hassediagramm



Beispiel $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$

$$H_R = (R \setminus I) \setminus (R \setminus I)^2$$

Das Hassediagramm enthält «alles Wesentliche»

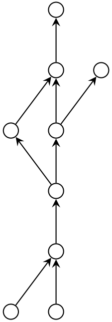
- Wenn R Halbordnung auf einer endlichen Menge M ist,
- dann kann man aus H_R das R wieder rekonstruieren:

Das Hassediagramm enthält «alles Wesentliche»

- Wenn R Halbordnung auf einer endlichen Menge M ist,
- dann kann man aus H_R das R wieder rekonstruieren:

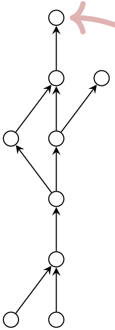
$$H_R^* = R$$

Minimale und maximale Elemente



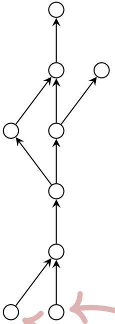
- sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$.
  - $x \in T$ heißt maximales Element von T,
    wenn es kein $y \in T$ gibt mit $x \sqsubseteq y$ und $x \neq y$.
  - $x \in T$ heißt minimales Element von T,
    wenn es kein $y \in T$ gibt mit $y \sqsubseteq x$ und $y \neq x$.

Minimale und maximale Elemente



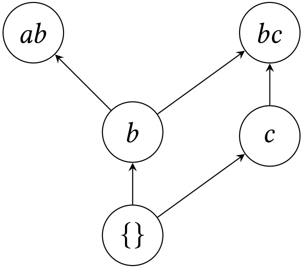
- sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$.
  - $x \in T$ heißt maximales Element von T, wenn es kein $y \in T$ gibt mit $x \sqsubseteq y$ und $x \neq y$.
  - $x \in T$ heißt minimales Element von T, wenn es kein $y \in T$ gibt mit $y \sqsubseteq x$ und $y \neq x$.

Minimale und maximale Elemente



- sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$.
  - $x \in T$ heißt **maximales Element von T**,
    wenn es kein $y \in T$ gibt mit $x \sqsubseteq y$ und $x \neq y$.
  - $x \in T$ heißt **minimales Element von T**,
    wenn es kein $y \in T$ gibt mit $y \sqsubseteq x$ und $y \neq x$.

Beispiele minimaler und maximaler Elemente



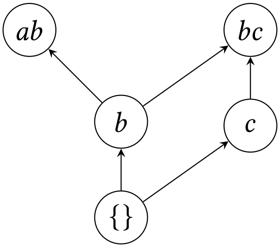
- Teilmenge von $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$
- zwei maximale Elemente: ab und bc
- ein minimales Element: $\{\}$

Kleinste und größte Elemente

Karlsruher Institut für Technologie

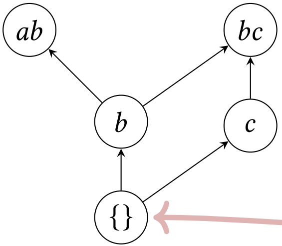
- sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$.
  - $x \in T$ heißt kleinstes Element von T, wenn für alle $y \in T$ gilt: $x \sqsubseteq y$.
  - $x \in T$ heißt größtes Element von T, wenn für alle $y \in T$ gilt: $y \sqsubseteq x$.

Beispiele kleinster und größter Elemente



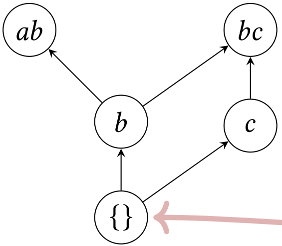
- Teilmenge von $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$
- größtes Element
- kleinstes Element

Beispiele kleinster und größter Elemente



- Teilmenge von $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$
- kein größtes Element
- kleinstes Element: $\{\}$

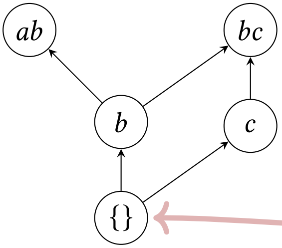
Beispiele kleinster und größter Elemente



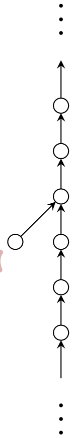
- Teilmenge von $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$
- kein größtes Element
- kleinstes Element: $\{\}$

- Vorsicht bei unendlichen Halbordnungen

Beispiele kleinster und größter Elemente



- Teilmenge von $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$
- kein größtes Element
- kleinstes Element: $\{\}$



- Vorsicht bei unendlichen Halbordnungen
  - u. U. genau ein minimales Element
  - aber trotzdem kein kleinstes!

Das kleinste und das größte Element sind eindeutig

Karlsruher Institut für Technologie

Lemma

- Es sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$. Dann kann T nicht zwei verschiedene kleinste (bzw. größte) Elemente haben.

Beweis

- für Eindeutigkeit des kleinsten Elements:
  - seien x_1 und x_2 kleinste Elemente,
  - dann $x_1 \sqsubseteq x_2$, weil x_1 kleinstes Element,

Das kleinste und das größte Element sind eindeutig

Karlsruher Institut für Technologie

Lemma

- Es sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$.
  Dann kann T nicht zwei verschiedene kleinste (bzw. größte) Elemente haben.

Beweis

- für Eindeutigkeit des kleinsten Elements:
  - seien x_1 und x_2 kleinste Elemente,
  - dann $x_1 \sqsubseteq x_2$, weil x_1 kleinstes Element,
  - und $x_2 \sqsubseteq x_1$, weil x_2 kleinstes Element,

Das kleinste und das größte Element sind eindeutig

Lemma

- Es sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$.
  Dann kann T nicht zwei verschiedene kleinste (bzw. größte) Elemente haben.

Beweis

- für Eindeutigkeit des kleinsten Elements:
  - seien x_1 und x_2 kleinste Elemente,
  - dann $x_1 \sqsubseteq x_2$, weil x_1 kleinstes Element,
  - und $x_2 \sqsubseteq x_1$, weil x_2 kleinstes Element,
  - also wegen Antisymmetrie: $x_1 = x_2$
- analog Eindeutigkeit des größten Elements

Das kleinste und das größte Element sind eindeutig

Karlsruher Institut für Technologie

Lemma

- Es sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$.
  Dann kann T nicht zwei verschiedene kleinste (bzw. größte) Elemente haben.

Beweis

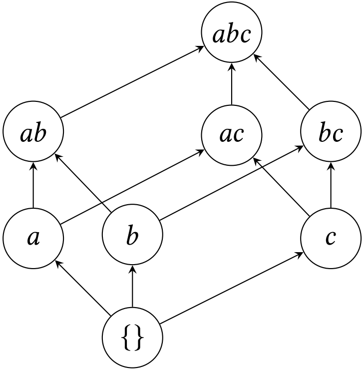
- für Eindeutigkeit des kleinsten Elements:
  - seien x_1 und x_2 kleinste Elemente,
  - dann $x_1 \sqsubseteq x_2$, weil x_1 kleinstes Element,
  - und $x_2 \sqsubseteq x_1$, weil x_2 kleinstes Element,
  - also wegen Antisymmetrie: $x_1 = x_2$
- analog Eindeutigkeit des größten Elements

- **Kleine Erinnerung**: In Kapitel 15 haben wir denselben Beweis geführt, um zu zeigen, dass ein Baum genau eine Wurzel hat. Die Wurzel im Baum ist das kleinste Element.
  Achtung! Hier stand in einer alten Version versehentlich “minimale”

Untere und obere Schranken von T — unter Umständen auch außerhalb von T

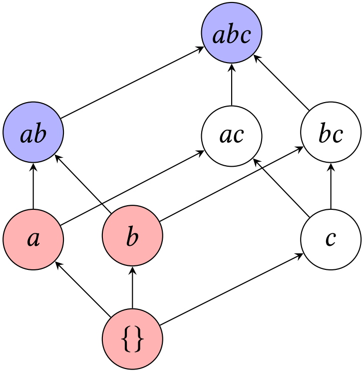
- sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$.
  - $x \in M$ heißt obere Schranke von T, wenn für alle $y \in T$ gilt: $y \sqsubseteq x$.
  - $x \in M$ heißt untere Schranke von T, wenn für alle $y \in T$ gilt: $x \sqsubseteq y$.

Untere und obere Schranken: Beispiele



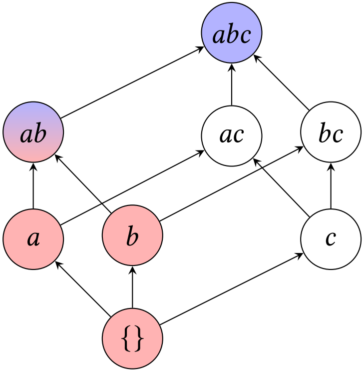
- $T = \{ \{\}, \{a\}, \{b\} \}$
- $T = \{ \{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \}$

Untere und obere Schranken: Beispiele



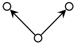
- $T = \{\ \{\}, \{a\}, \{b\}\ \}$
  - obere Schranken $\{a, b\}$ und $\{a, b, c\}$
- $T = \{\ \{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\ \}$

Untere und obere Schranken: Beispiele

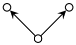


- $T = \{\ \{\}, \{a\}, \{b\}\ \}$
  - obere Schranken $\{a, b\}$ und $\{a, b, c\}$
- $T = \{\ \{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\ \}$
  - die gleichen oberen Schranken

Untere und obere Schranken müssen nicht existieren

- Teilmenge muss keine obere Schranke besitzen
- In  hat z. B. Grundmenge keine obere Schranke

Untere und obere Schranken müssen nicht existieren

- Teilmenge muss keine obere Schranke besitzen
- In  hat z. B. Grundmenge keine obere Schranke
- In $(\mathbb{N}_0, \leq)$ hat die Grundmenge keine obere Schranke.

Was ist wichtig

- Das sollten Sie mitnehmen:
  - Halbordnungen sind
    - reflexiv,
    - antisymmetrisch und
    - transitiv
- Das sollten Sie üben:
  - Nachweis der Eigenschaften von Halbordnungen
  - Beweise einfacher Aussagen
  - an ungewohnte Eigenschaften von Halbordnungen gewöhnen
    - Unendlichkeit lässt grüßen

Wo sind wir?

Äquivalenzrelationen

Kongruenzrelationen

Halbordnungen

Ordnungen

Totale Ordnung — keine unvergleichbaren Elemente

- Relation $R \subseteq M \times M$ ist eine Ordnung oder genauer totale Ordnung, wenn
  - R Halbordnung ist
  - und gilt:

$$\forall x, y \in M : xRy \vee yRx$$

Totale Ordnung — keine unvergleichbaren Elemente

- Relation $R \subseteq M \times M$ ist eine Ordnung oder genauer totale Ordnung, wenn
  - R Halbordnung ist
  - und gilt:

$$\forall x, y \in M : xRy \vee yRx$$

- Beispiele:
  - $(\mathbb{N}_0, \leq)$
  - $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \sqsubseteq)$ mit $(x_1, x_2) \sqsubseteq (y_1, y_2) \leftrightarrow x_1 < y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2)$
  - $(\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, \sqsubseteq_1)$ mit $\sqsubseteq_1$ „wie im Wörterbuch“

Totale Ordnungen auf A^*

- Relation $\sqsubseteq_p$ auf $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$:

$$w_1 \sqsubseteq_p w_2 \leftrightarrow \exists u \in A^* : w_1 u = w_2$$

  ist *keine* totale Ordnung
  - z. B. sind $\mathtt{a}$ und $\mathtt{b}$ unvergleichbar
- Wie kann man aus $\sqsubseteq_p$ eine totale Ordnung machen?

Totale Ordnungen auf A^*

- Relation $\sqsubseteq_p$ auf $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$:

$$w_1 \sqsubseteq_p w_2 \leftrightarrow \exists u \in A^* : w_1 u = w_2$$

  ist *keine* totale Ordnung
  - z. B. sind $\mathtt{a}$ und $\mathtt{b}$ unvergleichbar
- Wie kann man aus $\sqsubseteq_p$ eine totale Ordnung machen?
- jedenfalls totale Ordnung $\sqsubseteq_A$ auf A nötig, z. B. $\mathtt{a} \sqsubseteq_A \mathtt{b}$
- wenn das gegeben,
  dann mehrere Möglichkeiten …

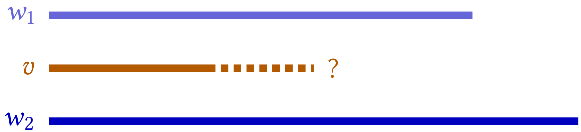
`Milchstraße` — `Milch` — `Milchreis`
— in welcher Reihenfolge stehen sie im Wörterbuch?

`Milchstraße` — `Milch` — `Milchreis` — in welcher Reihenfolge stehen sie im Wörterbuch?

- `Milch`
- `Milchreis`
- `Milchstraße`

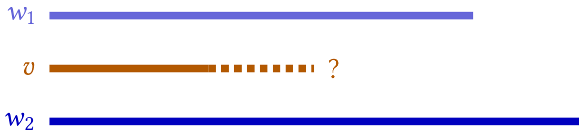
Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

- Suche längstes gemeinsames Präfix v



Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

- Suche längstes gemeinsames Präfix v



- ein gemeinsames Präfix gibt es immer: ε
- stets $|v| \leq \min(|w_1|, |w_2|)$
- es gibt ein längstes
- das längste ist eindeutig bestimmt

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

- 1. Fall: $|v| = \min(|w_1|, |w_2|)$

  drei Möglichkeiten

  - $|v| = |w_1| < |w_2|$
  - $|v| = |w_1| = |w_2| = |v|$
  - $|w_1| > |w_2| = |v|$

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

- 1. Fall: $|v| = \min(|w_1|, |w_2|)$

  drei Möglichkeiten

  - $|v| = |w_1| < |w_2|$: definiere $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
  - $|v| = |w_1| = |w_2| = |v|$
  - $|w_1| > |w_2| = |v|$

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

- 1. Fall: $|v| = \min(|w_1|, |w_2|)$

  drei Möglichkeiten

  - $|v| = |w_1| < |w_2|$: definiere $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
  - $|v| = |w_1| = |w_2| = |v|$: definiere $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$ und $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
  - $|w_1| > |w_2| = |v|$

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

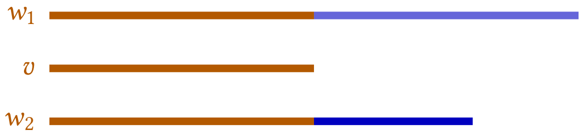
- 1. Fall: $|v| = \min(|w_1|, |w_2|)$

  drei Möglichkeiten

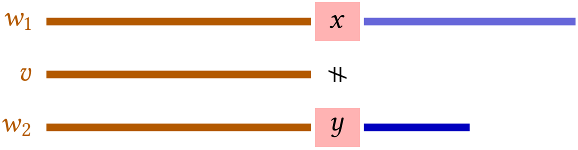
  - $|v| = |w_1| < |w_2|$: definiere $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
  - $|v| = |w_1| = |w_2| = |v|$: definiere $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$ und $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
  - $|w_1| > |w_2| = |v|$: definiere $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

- 2. Fall: $|v| < \min(|w_1|, |w_2|)$

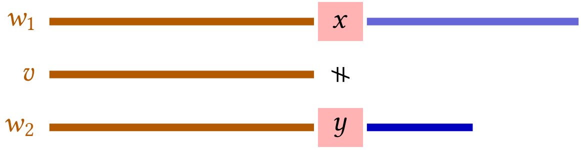


- 2. Fall: $|v| < \min(|w_1|, |w_2|)$



Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

- 2. Fall: $|v| < \min(|w_1|, |w_2|)$



- wenn $x \sqsubseteq_A y$ dann $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
- wenn $y \sqsubseteq_A x$ dann $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ «erster Art» — die im Wörterbuch

Karlsruher Institut für Technologie

- für $w_1, w_2 \in A^*$ sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix so, dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v\, u_1$ und $w_2 = v\, u_2$.
- Fallunterscheidung:
  1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
     Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
  2. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u_1', u_2' \in A^*$ mit
     - $x \neq y$ und
     - $w_1 = v\, x\, u_1'$ und $w_2 = v\, y\, u_2'$

     dann $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \leftrightarrow x \sqsubseteq_A y$
- Beispiele
  1. „`Klaus`“ kommt vor „`Klausur`“
  2. „`Milchreis`“ kommt vor „`Milchstraße`“
  3. „`Klausur`“ kommt vor „`Übung`“
- Dies ist eine „Totalisierung“ der partiellen Präfixordnung: $\sqsubseteq_p \subseteq \sqsubseteq_1$

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$

- „harmlos“ bei nur endlich vielen Wörtern

$$\begin{aligned} \mathtt{a} &\sqsubseteq_1 \mathtt{aa} \sqsubseteq_1 \mathtt{aaa} \sqsubseteq_1 \mathtt{aaaa} \\ &\sqsubseteq_1 \mathtt{ab} \sqsubseteq_1 \mathtt{aba} \sqsubseteq_1 \mathtt{abbb} \\ \sqsubseteq_1 \mathtt{b} &\sqsubseteq_1 \mathtt{baaaaaa} \sqsubseteq_1 \mathtt{baab} \\ &\sqsubseteq_1 \mathtt{bbbbb} \end{aligned}$$

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$

- „harmlos“ bei nur endlich vielen Wörtern

$$\begin{aligned} \mathtt{a} &\sqsubseteq_1 \mathtt{aa} \sqsubseteq_1 \mathtt{aaa} \sqsubseteq_1 \mathtt{aaaa} \\ &\sqsubseteq_1 \mathtt{ab} \sqsubseteq_1 \mathtt{aba} \sqsubseteq_1 \mathtt{abbb} \\ \sqsubseteq_1 \mathtt{b} &\sqsubseteq_1 \mathtt{baaaaaa} \sqsubseteq_1 \mathtt{baab} \\ &\sqsubseteq_1 \mathtt{bbbbb} \end{aligned}$$

- nicht ganz so harmlos für A^*
  - $\varepsilon \sqsubseteq_1 \mathtt{a} \sqsubseteq_1 \mathtt{aa} \sqsubseteq_1 \mathtt{aaa} \sqsubseteq_1 \mathtt{aaaa} \sqsubseteq_1 \cdots$
    hat kein Supremum (kleinste obere Schranke)
    - jedes Wort, das mindestens ein $\mathtt{b}$ enthält, ist obere Schranke,
    - zu jeder oberen Schranke w ist $\mathtt{a}^{|w|}\mathtt{b}$ ist eine echt kleine obere Schranke (weil w ein $\mathtt{b}$ enthält)
  - $\mathtt{b} \sqsupseteq_1 \mathtt{ab} \sqsupseteq_1 \mathtt{aab} \sqsupseteq_1 \mathtt{aaab} \sqsupseteq_1 \mathtt{aaaab} \sqsupseteq_1 \cdots$ hat kein Infimum

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_2$ «zweiter Art»

- andere lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_2$ auf A^*:
  $w_1 \sqsubseteq_2 w_2$ gilt genau dann, wenn
  - entweder $|w_1| < |w_2|$
  - oder $|w_1| = |w_2|$ und $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$ gilt.
- für $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ mit $\mathtt{a} \sqsubseteq \mathtt{b}$ beginnt Ordnung so

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &\sqsubseteq_2 \mathtt{a} \sqsubseteq_2 \mathtt{b} \\
&\sqsubseteq_2 \mathtt{aa} \sqsubseteq_2 \mathtt{ab} \sqsubseteq_2 \mathtt{ba} \sqsubseteq_2 \mathtt{bb} \\
&\sqsubseteq_2 \mathtt{aaa} \sqsubseteq_2 \cdots \sqsubseteq_2 \mathtt{bbb} \\
&\sqsubseteq_2 \mathtt{aaaa} \quad \sqsubseteq_2 \cdots \sqsubseteq_2 \mathtt{bbbb} \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

Die lexikografischen Ordnungen $\sqsubseteq_1$ und $\sqsubseteq_2$ sind total

- $\sqsubseteq_1$ auf Menge A^n totale Ordnung (für festes n)
  - Halbordnung: nachprüfen ...
  - für verschiedene Wörter gleicher Länge niemals $w_1 = v$ oder $w_2 = v$.
  - da $\sqsubseteq_A$ als total vorausgesetzt wird, ist bei $w_1 = v\,x\,u_1'$ und $w_2 = v\,y\,u_2'$ stets $x \sqsubseteq_A y$ oder $y \sqsubseteq_A x$
  - also stets $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$ oder $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$.
- also $\sqsubseteq_2$ auf A^* totale Ordnung
- $\sqsubseteq_1$ für verschieden lange Wörter: nachprüfen ...

Was ist wichtig

- Das sollten Sie mitnehmen:
  - totale Ordnungen sind
    - Halbordnungen
    - ohne unvergleichbare Elemente
  - Anwendung an diversen Stellen in der Informatik
    - z. B. Semantik, Testmuster, ...
- Das sollten Sie üben:
  - Nachweis der Eigenschaften von totalen Ordnungen
  - Beweise einfacher Aussagen
  - an ungewohnte Eigenschaften von Ordnungen gewöhnen (Unendlichkeit ...)

Zusammenfassung

- Äquivalenz- und Kongruenzrelationen
- Halbordnungen
- Ordnungen