# Grundbegriffe der Informatik

## Einheit 8: kontextfreie Grammatiken

Thomas Worsch

Universität Karlsruhe, Fakultät für Informatik

Wintersemester 2008/2009

# Überblick

# Spezifikation formaler Sprachen

Beschreibung formaler Sprachen nur mit Hilfe einzelner Symbole und der Operation Vereinigung, Konkatenation und Konkatenationsabschluss:

- manchmal möglich
- manchmal nicht (Beweis später)

# Ausschnitt der Definition der Syntax von Java

1 Block:
{ $\text{BlockStatements}_{\text{opt}}$ }

2 BlockStatements:
BlockStatement
BlockStatements BlockStatement

3 BlockStatement:
Statement
. . . . . .

4 Statement:
StatementWithoutTrailingSubstatement
. . . . . .

5 StatementWithoutTrailingSubstatement:
Block
. . . . . .

Siehe `http://java.sun.com/docs/books/jls/third_edition/`

# Rekursion

- Bei der Beschreibung der Struktur von ⟨*BlockStatements*⟩ wird direkt auf ⟨*BlockStatements*⟩ Bezug genommen.
- Bei der Definition von ⟨*Block*⟩ wird (indirekt) auf die Bedeutung von ⟨*Statement*⟩ verwiesen und
- bei der Definition von ⟨*Statement*⟩ (indirekt) wieder auf die Bedeutung von ⟨*Block*⟩.
- Was soll das bedeuten?
- beschränken wir uns erst einmal auf den Kern des Ganzen . . .

# Simplizfizierungen

- schreibe $X$ statt $\langle Block \rangle$, $\langle Statement \rangle$ o.ä.
- schreibe runde Klammern ( und ) statt der geschweiften (wegen der Verwechslungsgefahr mit Mengenklammern)
- Dann besagt die Definition stark vereinfacht unter anderem:
  - K1 Ein $X$ kann etwas "ganz einfaches" sein; schreiben für dafür einfach das leere Wort $\varepsilon$.
  - K2 Ein $X$ kann ein $Y$ sein oder die Folge $XY$; also kann ein $X$ von der Form $YY$ sein. Jedes $Y$ seinerseits kann wieder ein $X$ sein. Also kann ein $X$ auch von der Form $XX$ sein.
  - K3 Wenn man ein $X$ hat, dann ist auch $(X)$ wieder ein $X$.
  - K4 Auch gemeint: Es ist nichts ein $X$, was man nicht auf Grund der obigen Festlegungen als solches identifizieren kann.

# Versuch einer formalen Sprache

- versuche, mit $X$ eine formale Sprache $L$ zu assoziieren:

$$L = \{\varepsilon\} \cup LL \cup \{(\}L\{)\}$$

- trügerische Hoffnung:
  - die Inklusion $L \supseteq \ldots$ spiegelt K1, K2, K3 wieder
  - die Inklusion $L \subseteq \ldots$ spiegelt K4 wieder
- Fragen:
  1. Gibt es überhaupt eine formale Sprache, die die Gleichung erfüllt?
     Das hätten wir gerne und das ist auch so.
  2. Und falls ja: Ist die formale Sprache, die die Gleichung erfüllt, nur durch die Gleichung eindeutig festgelegt?
     Das hätten wir auch gerne, aber das ist *nicht* so.

     $\Longrightarrow$ Arbeit: Man finde und charakterisiere „irgendwie“ die uns interessierende Lösung.

# Lösbarkeit von $L = \{\varepsilon\} \cup LL \cup \{(\}L\{)\}$

- konstruiere Folge $L_0, L_1, \ldots$ formaler Sprachen $L_i$ für $i \in \mathbb{N}_0$
- zeige, dass die Vereinigung aller $L_i$ die Gleichung löst

- $L_0 = \{\varepsilon\}$.
- für $i \in \mathbb{N}_0$ sei $L_{i+1} = L_i L_i \cup \{(\}L_i\{)\}$

- **Lemma.** $L = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$ erfüllt die Gleichung.

# Beweis des Lemmas

- $\forall i \in \mathbb{N}_0$: $\varepsilon \in L_i$, denn:
  - $\varepsilon \in L_0$
  - für alle $i \in \mathbb{N}_0$ ist $L_i L_i \subseteq L_{i+1}$,
    wenn $\varepsilon \in L_i$, dann auch $\varepsilon = \varepsilon\varepsilon \in L_i L_i \subseteq L_{i+1}$.
- also $\forall i \in \mathbb{N}_0$: $L_i = L_i\{\varepsilon\} \subseteq L_i L_i \subseteq L_{i+1}$.
- Zeige: $L \subseteq \{\varepsilon\} \cup LL \cup \{(\}L\{)\}$
  - Da $\varepsilon \in L_0 \subseteq L$ ist, ist $L = L\{\varepsilon\} \subseteq LL$.
- Zeige: $L \supseteq \{\varepsilon\} \cup LL \cup \{(\}L\{)\}$
  - sei $w \in \{\varepsilon\} \cup LL \cup \{(\}L\{)\}$.
  - 1. Fall: $w = \varepsilon$: $w = \varepsilon \in L_0 \subseteq L$.
  - 2. Fall: $w \in LL$:
    Dann $w = w_1 w_2$ mit $w_1 \in L$ und $w_2 \in L$.
    Also existieren Indizes $i_1$ und $i_2$ mit $w_1 \in L_{i_1}$ und $w_2 \in L_{i_2}$.
    Für $i = \max(i_1, i_2)$ ist $w_1 \in L_i$ und $w_2 \in L_i$,
    also $w = w_1 w_2 \in L_i L_i \subseteq L_{i+1} \subseteq L$.
  - 3. Fall: $w \in \{(\}L\{)\}$:
    für ein $i \in \mathbb{N}_0$ ist dann $w \in \{(\}L_i\{)\} \subseteq L_{i+1} \subseteq L$.

# Lösung von $L = \{\varepsilon\} \cup LL \cup \{(\}L\{)\}$ nicht eindeutig

- $\{(,)\}^*$ ist auch eine Lösung, denn
  - „$\subseteq$“ zeigt man wie oben
  - „$\supseteq$“ ist trivial, da $\{(,)\}^*$ eben *alle* Wörter sind.
- Das ist eine andere Lösung, denn
  - `(((` ist zwar in $\{(,)\}^*$
  - aber *nicht* in $\bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$:
    man vergleiche die Anzahlen der `(` und `)`

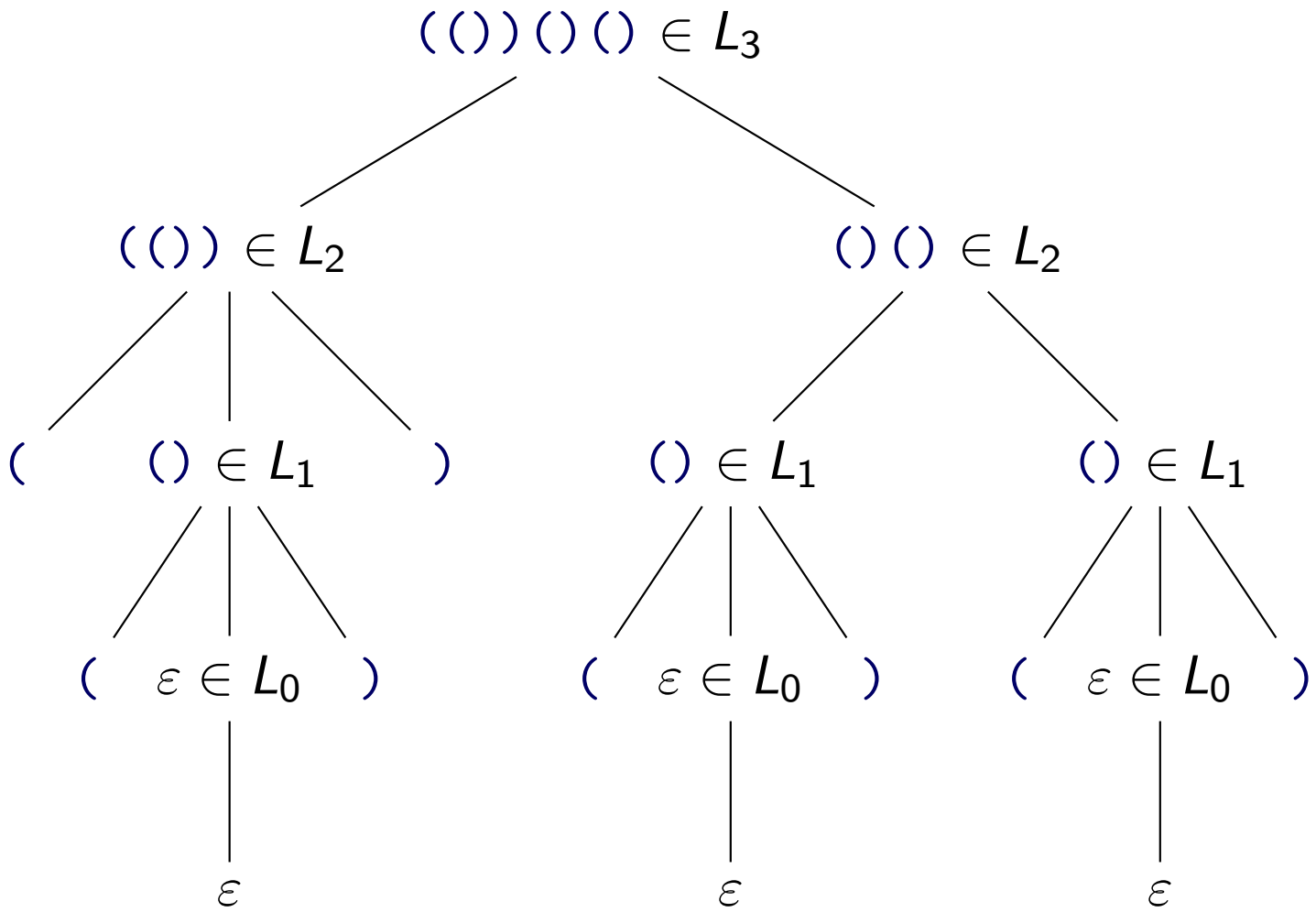
# Was kann man an $\bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$ sehen?

$$L_0 = \{\varepsilon\}$$
$$L_1 \setminus L_0 = \{\ ()\ \}$$
$$L_2 \setminus L_1 = \{\ ()(),\ (())\ \}$$
$$L_3 \setminus L_2 = \{\ ()()(),\ (())(),\ ()(()),\ ()()()(),\ ()()(()),\ (())()(),\ (())(()),\ (()()),\ ((()))\ \}$$

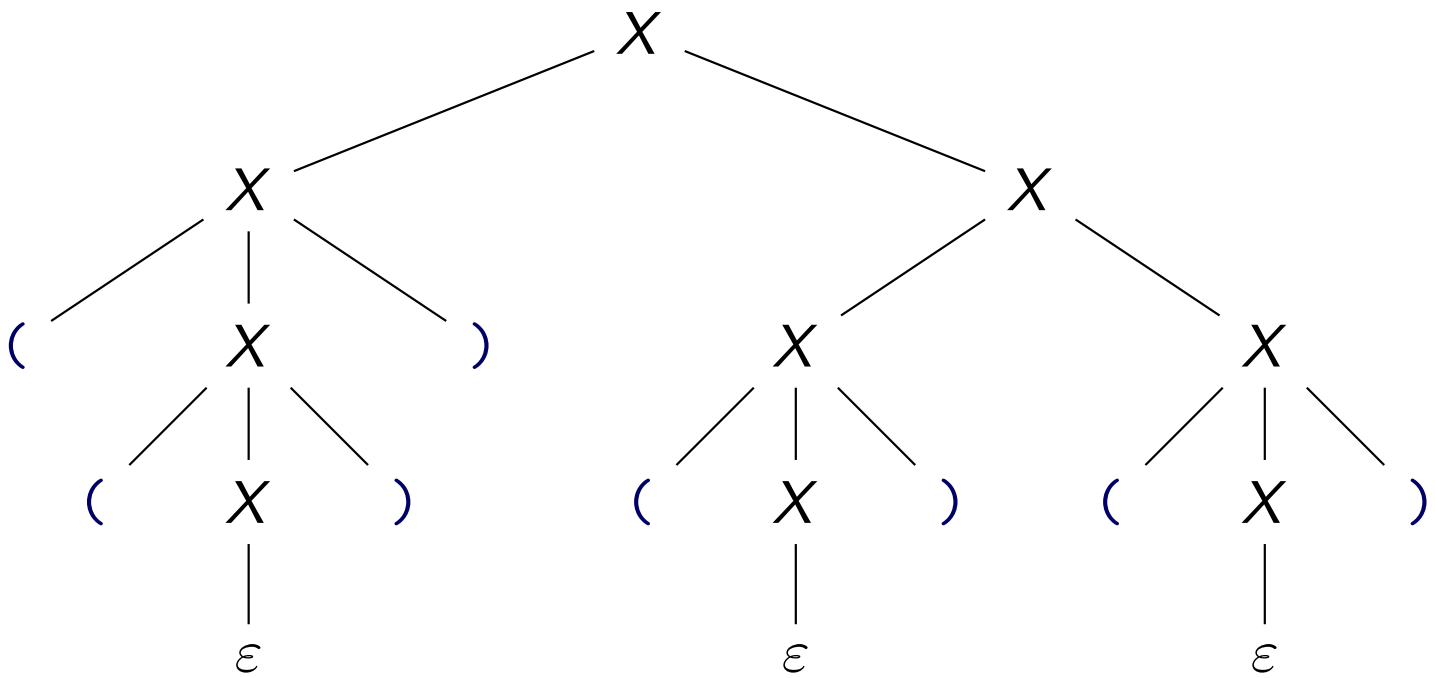
Dabei gilt z. B.:

- $(())()() \in L_3$, weil $(()) \in L_2$ und $()() \in L_2$ und Regel K2
  - $(()) \in L_2$, weil $() \in L_1$ und Regel K3.
    - $() \in L_1$, weil $\varepsilon \in L_0$ und Regel K3.
  - $()() \in L_2$, weil $() \in L_1$ und $() \in L_1$ ist und Regel K2
    - $() \in L_1$ , weil $\varepsilon \in L_0$ und Regel K3.
    - $() \in L_1$ , weil $\varepsilon \in L_0$ und Regel K3.

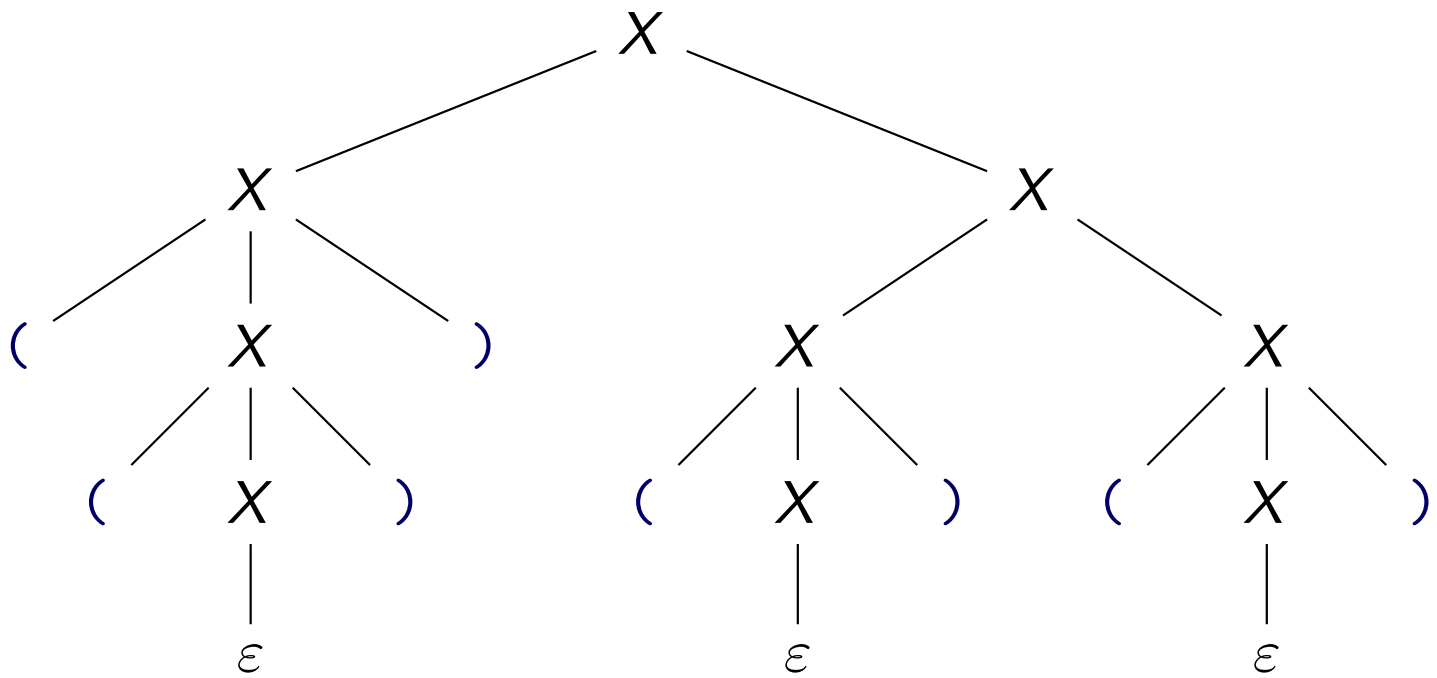
# Die Erklärung für $(())()() \in L_3$ graphisch dargestellt



# Vereinfachte Darstellung für $(())()() \in L_3$



# Vereinfachte Darstellung für $(())()() \in L_3$




- So etwas heißt auch Baum (Wurzel oben, Blätter unten)
- bisher: von unten nach oben interpretiert als Begründungen
- kontextfreie Grammatiken: von oben nach unten
  *syntaktische Ersetzungen*

# Wir halten fest

## Das sollten Sie mitnehmen:

- Klammerstrukturen sind wichtig.
- Manchmal kann man sich Fixpunkten „annähern“.
  - Ein Fixpunkt einer Abbildung $f$ ist ein Argument $x$ mit $x = f(x)$.
  - *So* kann man $L = \{\varepsilon\} \cup LL \cup (L)$ auch sehen ...

## Das sollten Sie üben:

- Angst verlieren vor dem Lesen und Finden von Beweisen
  - Bei ruhigem Hinsehen drängt sich eine passende Vorgehensweise manchmal fast auf.

# Kontextfreie Grammatik $G = (N, T, S, P)$

- $N$ ist ein Alphabet sogenannter *Nichtterminalsymbole*
- $T$ ist ein Alphabet sogenannter *Terminalsymbole*.
  - kein Zeichen in beiden Alphabeten: $N \cap T = \emptyset$.
- $S \in N$ ist das sogenannte *Startsymbol*.
- $P \subseteq N \times V^*$ ist *endliche* Menge von *Produktionen*.
  - $V = N \cup T$ Menge aller Symbole überhaupt
  - Schreibweise: $X \to w$ (statt $(X, w) \in P$)
  - Bedeutung: man kann $X$ ersetzen durch $w$

# ein Ableitungsschritt

- Aus $u \in V^*$ ist in einem Schritt $v \in V^*$ ableitbar
  - in Zeichen $u \Rightarrow v$
- wenn Wörter $w_1, w_2 \in V^*$ und eine Produktion $X \to w$ in $P$ existieren, so dass $u = w_1 X w_2$ und $v = w_1 w w_2$.
- Also: Wenn $X \to w$ in $P$, dann $w_1 X w_2 \Rightarrow w_1 w w_2$.

- Beispiel $G = (\{X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, X, P)$ mit Produktionenmenge $P = \{X \to \varepsilon, X \to \mathtt{a}X\mathtt{b}\}$.
- Dann gilt z. B. $\mathtt{aba}X\mathtt{ba}XXXX \Rightarrow \mathtt{aba}X\mathtt{baa}X\mathtt{b}XXX$, denn

$$\underbrace{\mathtt{aba}X\mathtt{ba}}_{w_1} X \underbrace{XXX}_{w_2} \Rightarrow \underbrace{\mathtt{aba}X\mathtt{ba}}_{w_1} \mathtt{a}X\mathtt{b} \underbrace{XXX}_{w_2}$$

- Ebenso gilt $\mathtt{aba}X\mathtt{ba}XXXX \Rightarrow \mathtt{abaa}X\mathtt{bba}XXXX$, denn

$$\underbrace{\mathtt{aba}}_{w_1} X \underbrace{\mathtt{ba}XXXX}_{w_2} \Rightarrow \underbrace{\mathtt{aba}}_{w_1} \mathtt{a}X\mathtt{b} \underbrace{\mathtt{ba}XXXX}_{w_2}$$

# Anmerkungen

- Die Definition von $\Rightarrow$ legt eine Relation zwischen Wörtern über dem Alphabet $V = N \cup T$ fest.
- Man könnte also auch schreiben: $R_{\Rightarrow} \subseteq V^* \times V^*$ (oder gar $\Rightarrow \subseteq V^* \times V^*$ ?)
- üblich: *Infixschreibweise*
  - Man schreibt $u \Rightarrow v$ und nicht $(u, v) \in R_{\Rightarrow}$,
  - so wie man auch $5 \leq 7$ schreibt und nicht $(5, 7) \in R_{\leq}$

# Anmerkungen

- Die Definition von $\Rightarrow$ legt eine Relation zwischen Wörtern über dem Alphabet $V = N \cup T$ fest.
- Man könnte also auch schreiben: $R_{\Rightarrow} \subseteq V^* \times V^*$ (oder gar $\Rightarrow \subseteq V^* \times V^*$ ?)
- üblich: *Infixschreibweise*
  - Man schreibt $u \Rightarrow v$ und nicht $(u, v) \in R_{\Rightarrow}$,
  - so wie man auch $5 \leq 7$ schreibt und nicht $(5, 7) \in R_{\leq}$
- Im allgemeinen ist $\Rightarrow$ weder links- noch rechtstotal und weder links- noch rechtseindeutig.

# Anmerkungen

- Die Definition von $\Rightarrow$ legt eine Relation zwischen Wörtern über dem Alphabet $V = N \cup T$ fest.
- Man könnte also auch schreiben: $R_{\Rightarrow} \subseteq V^* \times V^*$ (oder gar $\Rightarrow \subseteq V^* \times V^*$ ?)
- üblich: *Infixschreibweise*
  - Man schreibt $u \Rightarrow v$ und nicht $(u, v) \in R_{\Rightarrow}$,
  - so wie man auch $5 \leq 7$ schreibt und nicht $(5, 7) \in R_{\leq}$
- Im allgemeinen ist $\Rightarrow$ weder links- noch rechtstotal und weder links- noch rechtseindeutig.
- bei einer Produktion
  - linke Seite ist immer ein Nichtterminalsymbol
  - In Ableitungsschritt wird nie ein Terminalsymbol ersetzt.
  - Wo sie stehen, ist „die Ableitung zu Ende“
  - daher der Name *Terminal*symbol.

# mehrere Ableitungsschritte

- Eine *Ableitung(sfolge)* ist eine Folge von Ableitungsschritten, deren Anzahl irrelevant ist.
- Formal: Für alle $u, v \in V^*$ gelte

$$u \Rightarrow^0 v \text{ genau dann, wenn } u = v$$
$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : (u \Rightarrow^{i+1} v \text{ genau dann, wenn } \exists w \in V^* : u \Rightarrow w \Rightarrow^i v)$$
$$u \Rightarrow^* v \text{ genau dann, wenn } \exists i \in \mathbb{N}_0 : u \Rightarrow^i v$$

- Beispielgrammatik $G = (\{X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, X, \{X \to \varepsilon, X \to \mathtt{a}X\mathtt{b}\})$:

$$X \Rightarrow \mathtt{a}X\mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{aa}X\mathtt{bb} \Rightarrow \mathtt{aaa}X\mathtt{bbb} \Rightarrow \mathtt{aaabbb}$$

- Also gilt z. B.: $X \Rightarrow^* \mathtt{aa}X\mathtt{bb}$, $\mathtt{a}X\mathtt{b} \Rightarrow^* \mathtt{aaa}X\mathtt{bbb}$, $X \Rightarrow^* \mathtt{aaabbb}$ und viele andere.

# erzeugte formale Sprache

- Hauptinteresse: Welche Wörter aus Terminalsymbolen können aus dem Startsymbol abgeleitet werden?
- *von einer Grammatik erzeugte formale Sprache*

$$L(G) = \{w \in T^* \mid S \Rightarrow^* w\} .$$

- solche formalen Sprachen heißen auch *kontextfrei*

# Beispiel einer kontextfreien Sprache

- Beispielgrammatik $G = (\{X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, X, \{X \to \varepsilon, X \to \mathtt{a}X\mathtt{b}\}$
- eben schon gesehen: $\mathtt{aaabbb} \in L(G)$ wegen

$$X \Rightarrow \mathtt{a}X\mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{aa}X\mathtt{bb} \Rightarrow \mathtt{aaa}X\mathtt{bbb} \Rightarrow \mathtt{aaabbb}$$

- leicht verallgemeinerbar: für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: $X \Rightarrow \mathtt{a}^i\mathtt{b}^i$,
- also $\{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \mid i \in \mathbb{N}_0\} \subseteq L(G)$
- Beweis wird leicher, wenn man gleich zeigt:

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : (X \Rightarrow^* \mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \wedge X \Rightarrow^* \mathtt{a}^i X \mathtt{b}^i)$$

- Umgekehrt kann man zeigen:

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : \text{ wenn } X \Rightarrow^{i+1} w, \text{ dann } w = \mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \vee w = \mathtt{a}^{i+1}X\mathtt{b}^{i+1}$$

- also $L(G) \subseteq \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$
- Insgesamt:

$$L(G) = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \mid i \in \mathbb{N}_0\} .$$

# kompaktere Notation bei vielen Produktionen

- Statt $\{X \to w_1, X \to w_2, X \to w_3, X \to w_4, X \to w_5\}$ schreibt man $\{X \to w_1 | w_2 | w_3 | w_4 | w_5\}$
- und liest die senkrechten Striche als „oder“.
- Beispielgrammatik:

$$P = \{\ X \to \mathtt{a}X\mathtt{b} \mid \varepsilon\ \}$$

# Interpretation der Definition der Java-Syntax

eine kontextfreien Grammatik

- $\langle Block \rangle$, ... sind jeweils *ein* Nichtterminalsymbol.
- Doppelpunkt entspricht Pfeil $\longrightarrow$
- eingerückte Zeile: rechte Seite einer Produktion
- aufeinander folgende Zeilen denke man sich durch senkrechte Striche | getrennt
- Beispiel

---

2 BlockStatements:
BlockStatement
BlockStatements BlockStatement

---

- bedeutet

$$\langle BlockStatements \rangle \longrightarrow \langle BlockStatement \rangle$$
$$\mid \langle BlockStatements \rangle \langle BlockStatement \rangle$$

# Interpretation der Definition der Java-Syntax (2)

- ähnlich

| | |
|---|---|
| 1 | Block: { BlockStatements$_{\text{opt}}$ } |

- bedeutet

$$\langle \mathit{Block} \rangle \rightarrow \{\ \langle \mathit{BlockStatements} \rangle\ \} \mid \{\ \}$$

# kontextfreie Grammatiken für Syntax von Programmiersprachen?

- (jedenfalls viele) Nichtterminalsymbole stehen für strukturelle Konzepte der Programmiersprache.
- das Ideal:
  Man kann mit der Grammatik für Java genau alle syntaktisch korrekten Javaprogramme ableiten kann, aber auch nur diese und nichts anderes.
- die Realität ist komplizierter:
  - Was mit der Grammatik nicht ableitbar ist, ist bestimmt kein Javaprogramm.
    - gut
  - Aber Dinge ableitbar, die keine korrekten Programme sind.
    - nicht gut.
    - Grund: manche Forderungen kann man überhaupt nicht mit Hilfe kontextfreier Grammatiken ausdrücken.

# Ableitungsbäume

- Grammatik für unser Klammerproblem:
  $(\{X\}, \{(, )\}, X, \{X \to XX | (X) | \varepsilon\})$.
- lange Ableitungsfolgen manchmal nicht sehr erhellend:

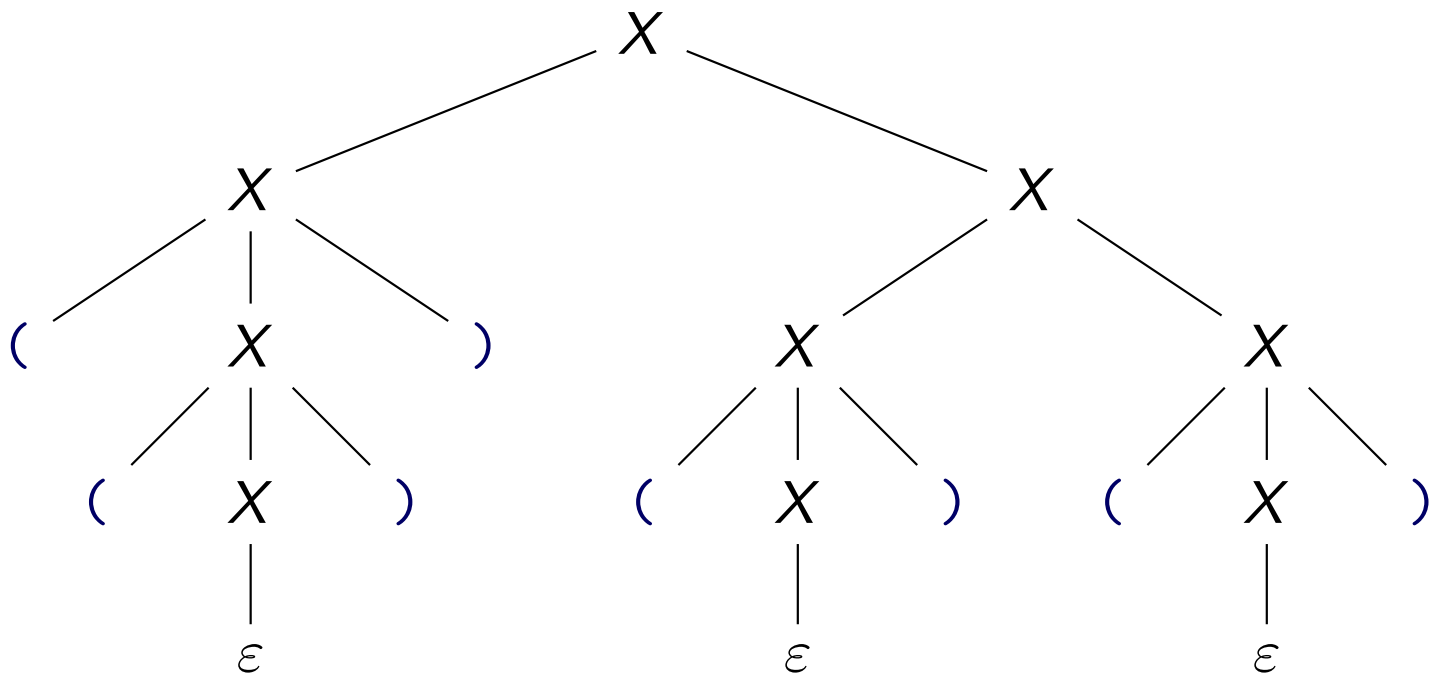
$$X \Rightarrow XX \Rightarrow (X)X \Rightarrow (X)XX \Rightarrow (X)X(X) \Rightarrow ((X))X(X)$$
$$\Rightarrow ((X))X() \Rightarrow ((X))(X)() \Rightarrow (())(X)() \Rightarrow (())()()$$

- man darf umordnen (Kontextfreiheit!)
- schon besser: *Linksableitung*

$$X \Rightarrow XX \Rightarrow (X)X \Rightarrow ((X))X \Rightarrow (())X \Rightarrow (())XX$$
$$\Rightarrow (())(X)X \Rightarrow (())()X \Rightarrow (())()(X) \Rightarrow (())()()$$

- manchmal noch übersichtlicher: *Ableitungsbaum*

# ein Ableitungsbaum




- Man beginnt mit dem Startsymbol als Wurzel.
- Für jeden Ableitungsschritt werden an das ersetzte Nichtterminalsymbol Kanten nach unten dran gehängt.
- (Wir verzichten an dieser Stelle auf eine Formalisierung.)

# Wir halten fest

Das sollten Sie mitnehmen:

- kontextfreie Grammatik
- Ableitung
- erzeugte formale Sprache
- Ableitungsbaum

Das sollten Sie üben:

- (semi-)reale Produktionenmengen lesen (Java, ...)
- zu formaler Sprache sie erzeugende kontextfreie Grammatik konstruieren
- zu kontextfreier Grammatik die erzeugte formale Sprache bestimmen

# Produkt von Relationen

- Es seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$ zwei Relationen
- Dann heißt

$$S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$$

  das *Produkt der Relationen* $R$ und $S$.
- oder in Infixschreibweise: für alle $(x, z) \in M_1 \times M_3$

$$x(S \circ R)z \text{ gdw. } \exists y \in M_2 : xRy \wedge ySz$$

- Mit $\mathrm{Id}_M$ bezeichnen wir die Relation

$$\mathrm{Id}_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$$

  Das ist die identische Abbildung auf der Menge $M$.
- Für jede binäre Relation $R \subseteq M \times M$ gilt:

$$R \circ \mathrm{Id}_M = R = \mathrm{Id}_M \circ R$$

# Potenzen und reflexiv-transitive Hülle einer Relation

- Ist $R \subseteq M \times M$ binäre Relation auf einer Menge $M$, dann definiert man *Potenzen* $R^i$:

$$R^0 = \mathrm{Id}_M$$
$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : R^{i+1} = R \circ R^i$$

- Die *reflexiv-transitive Hülle* einer Relation $R$ ist

$$R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$$

# reflexiv-transitive Hülle

- Die reflexiv-transitive Hülle $R^*$ einer Relation $R$ hat folgende Eigenschaften:
  - $R^*$ ist reflexiv.
  - $R^*$ ist transitiv.
  - $R^*$ ist die kleinste Relation, die $R$ enthält und reflexiv und transitiv ist.
- Relation $R$ heißt *reflexiv*, wenn $\mathrm{Id}_M \subseteq R$ ist.
- Relation $R$ heißt *transitiv*, wenn gilt:

$$\forall x \in M : \forall y \in M : \forall z \in M : xRy \wedge yRz \Longrightarrow xRz$$

(Das ist ein Implikationspfeil und kein Ableitungspfeil.)

# reflexiv-transitive Hülle (2)

- $R^*$ ist immer reflexiv, denn
  $\mathrm{Id}_M = R^0 \subseteq R^*$
- Man kann zeigen:
  für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$ gilt: $R^i \circ R^j = R^{i+j}$.
- Daraus folgt: $R^*$ ist immer transitiv, denn
  - wenn $(x, y) \in R^*$ und $(y, z) \in R^*$,
  - dann gibt es $i$ und $j \in \mathbb{N}_0$ mit $(x, y) \in R^i$ und $(y, z) \in R^j$
  - dann ist $(x, z) \in R^i \circ R^j = R^{i+j} \subseteq R^*$.
- $R^*$ sei die *kleinste* Relation, die $R$ umfasst und reflexiv und transitiv ist:
  - $R^*$ umfasst $R$ und ist reflexiv und transitiv.
  - Es sei $S$ eine beliebige Relation ist, die reflexiv und transitiv ist.
  - Wenn $S$ die Relation $R$ umfasst, also $R \subseteq S$, dann sogar $R^* \subseteq S$.

# Wir halten fest

Das sollten Sie mitnehmen:

- Produkte und Potenzen von Relationen
- reflexive und transitive Relationen
- relfexiv-transitive Hülle einer Relation
  - „klassisches“ Beispiel: Ableitbarkeit $\Rightarrow^*$

Das sollten Sie üben:

- Transitivität nachweisen
- Bilder von Relationen malen

# Wie oft kommt Symbol $x$ in Wort $w$ vor?

- Es sei $A$ ein Alphabet.
- Für $x \in A$ definieren wir Funktionen $N_x : A^* \to \mathbb{N}_0$:

$$N_x(\varepsilon) = 0$$

$$\forall y \in A : \forall w \in A^* : N_x(yw) = \begin{cases} 1 + N_x(w) & \text{falls } y = x \\ N_x(w) & \text{falls } y \neq x \end{cases}$$

- Dann ist zum Beispiel

$$\begin{aligned} N_{\mathtt{a}}(\mathtt{abbab}) &= 1 + N_{\mathtt{a}}(\mathtt{bbab}) = 1 + N_{\mathtt{a}}(\mathtt{bab}) = 1 + N_{\mathtt{a}}(\mathtt{ab}) \\ &= 1 + 1 + N_{\mathtt{a}}(\mathtt{b}) = 1 + 1 + N_{\mathtt{a}}(\varepsilon) = 1 + 1 + 0 = 2 \end{aligned}$$

  (klar, oder?)
- Benutzen Sie diese Funktionen, wenn es praktisch ist.

# Zusammenfassung

- Grammatiken
  - kontextfreie Grammatik
  - Ableitung
  - erzeugte formale Sprache
  - Ableitungsbaum
- Relationen
  - Produkte und Potenzen von Relationen
  - reflexive und transitive Relationen
  - relfexiv-transitive Hülle einer Relation