Grundbegriffe der Informatik

Einheit 11: Graphen

Thomas Worsch

Universität Karlsruhe, Fakultät für Informatik

Wintersemester 2008/2009

schon an vielen Stellen Gebilde durch Linien miteinander verbunden, z. B.

- in dieser Vorlesung
  - Pfeile zwischen Mengen
  - Ableitungsbäume
  - Huffman-Bäume
- in „Programmieren"
  - „Kästen" für Objekte und Klassen, Pfeile dazwischen

In dieser Einheit

- nicht mehr Gebrauchsgegenstand sondern Untersuchungsgegenstand
- man unterscheidet gerichtete und ungerichtete Graphen
- manchmal zusätzlich zu den Beziehungen noch weitere Informationen, sogenannte Markierungen

Graphische Darstellung von Zusammenhängen

schon an vielen Stellen Gebilde durch Linien miteinander verbunden, z. B.

- in dieser Vorlesung
  - Pfeile zwischen Mengen
  - Ableitungsbäume
  - Huffman-Bäume
- in „Programmieren“
  - „Kästen“ für Objekte und Klassen, Pfeile dazwischen

In dieser Einheit

- nicht mehr Gebrauchsgegenstand sondern Untersuchungsgegenstand
- man unterscheidet gerichtete und ungerichtete Graphen
- manchmal zusätzlich zu den Beziehungen noch weitere Informationen, sogenannte Markierungen

Überblick

Gerichteter Graph

gerichteter Graph

- festgelegt durch ein Paar $G = (V, E)$,
- $E \subseteq V \times V$ ist
- V nichtleere, endliche *Knotenmenge*
- E *Kantenmenge*; darf leer sein.

üblich: graphische Darstellung, also nicht

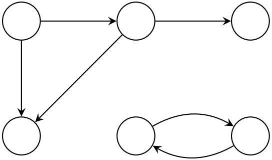
$$\begin{aligned} V &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ E &= \{(0, 1), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (4, 5), (5, 4)\} \end{aligned}$$

sondern ...

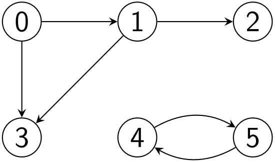
- statt

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$E = \{(0, 1), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (4, 5), (5, 4)\}$$

- lieber



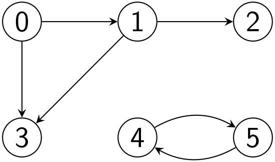
oder

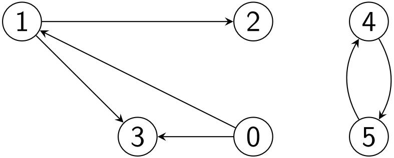


- manchmal lässt man die Knotenidentitäten weg,
- manchmal sind sie wichtig

der gleiche Beispielgraph (nur anders hingemalt)

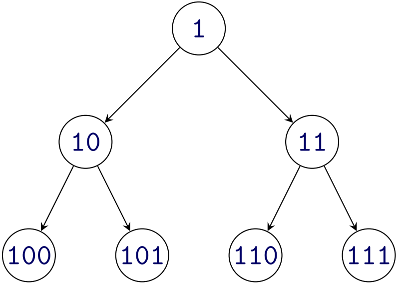
Anordnung der Knoten in der Darstellung irrelevant
das ist zweimal der gleiche Graph ...
oder vielmehr: das sind zwei Darstellungen des gleichen Graphen:

- 

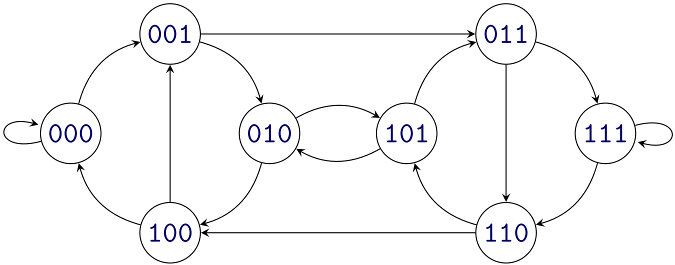
- 

Beispielgraph 2: ein Baum

- $G = (V, E)$ mit
  - $V = \{1\}\left(\bigcup_{i=0}^{2}\{0,1\}^i\right)$
    $= \{1, 10, 11, 100, 101, 110, 111\}$
  - $E = \{(w, wx) \mid x \in \{0,1\} \wedge w \in V \wedge wx \in V\}$
    $= \{(1, 10), (1, 11), (10, 100), (10, 101),$
    $(11, 110), (11, 111)\}$
- graphisch



- $G = (V, E)$ mit
  - $V = \{0, 1\}^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$
  - $E = \{(xw, wy) \mid x, y \in \{0, 1\} \wedge w \in \{0, 1\}^2\} = \{(000, 000), \ldots, (010, 101), \ldots\}$
- graphisch



- Kante der Form $(x, x) \in E$ heißt *Schlinge*
- Graph ohne Schlingen heißt *schlingenfrei*

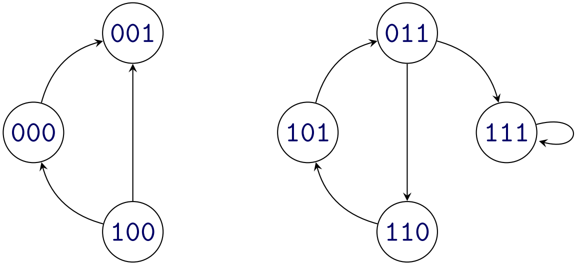
Teilgraph

$G' = (V', E')$ ist ein *Teilgraph* von $G = (V, E)$, wenn

- $V' \subseteq V$
- $E' \subseteq E \cap V' \times V'$,
- also
  - Knoten- bzw. Kantenmenge von G' muss Teilmenge von Knoten- bzw. Kantenmenge von G sein, und
  - die Endpunkte jeder Kante von E' müssen auch zu V' gehören.

Teilgraph: Beispiel

ein Teilgraph des de Bruijn-Graphen von vorhin:



- schreibe $M^{(+)}$ für die Menge aller nichtleeren Listen von Elementen aus M.
- *Pfad* in einem gerichteten Graphen
  - nichtleere Liste $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^{(+)}$ von Knoten
  - wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- *Länge eines Pfades*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- Wenn $p = (v_0, \ldots, v_n)$ ein Pfad ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- Pfad $(v_0, \ldots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
  - Die Knoten v_0, ..., v_{n-1} sind paarweise verschieden und
  - die Knoten v_1, ..., v_n sind paarweise verschieden.
  - v_0 und v_n dürfen gleich sein
- Pfad mit $v_0 = v_n$ heißt *geschlossen* oder auch *Zyklus*
- ein wiederholungsfreier Zyklus heißt auch *einfacher Zyklus*

Pfade

- schreibe $M^{(+)}$ für die Menge aller nichtleeren Listen von Elementen aus M.
- *Pfad* in einem gerichteten Graphen
  - nichtleere Liste $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^{(+)}$ von Knoten
  - wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- *Länge eines Pfades*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- Wenn $p = (v_0, \ldots, v_n)$ ein Pfad ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- Pfad $(v_0, \ldots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
  - Die Knoten v_0, …, v_{n-1} sind paarweise verschieden und
  - die Knoten v_1, …, v_n sind paarweise verschieden.
  - v_0 und v_n dürfen gleich sein
- Pfad mit $v_0 = v_n$ heißt *geschlossen* oder auch *Zyklus*
- ein wiederholungsfreier Zyklus heißt auch *einfacher Zyklus*

Pfade

- schreibe $M^{(+)}$ für die Menge aller nichtleeren Listen von Elementen aus M.
- *Pfad* in einem gerichteten Graphen
  - nichtleere Liste $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^{(+)}$ von Knoten
  - wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- *Länge eines Pfades*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- Wenn $p = (v_0, \ldots, v_n)$ ein Pfad ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- Pfad $(v_0, \ldots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
  - Die Knoten v_0, ..., v_{n-1} sind paarweise verschieden und
  - die Knoten v_1, ..., v_n sind paarweise verschieden.
  - v_0 und v_n dürfen gleich sein
- Pfad mit $v_0 = v_n$ heißt *geschlossen* oder auch *Zyklus*
- ein wiederholungsfreier Zyklus heißt auch *einfacher Zyklus*

Pfade

- schreibe $M^{(+)}$ für die Menge aller nichtleeren Listen von Elementen aus M.
- *Pfad* in einem gerichteten Graphen
  - nichtleere Liste $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^{(+)}$ von Knoten
  - wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- *Länge eines Pfades*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- Wenn $p = (v_0, \ldots, v_n)$ ein Pfad ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- Pfad $(v_0, \ldots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
  - Die Knoten $v_0, \ldots, v_{n-1}$ sind paarweise verschieden und
  - die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ sind paarweise verschieden.
  - v_0 und v_n dürfen gleich sein
- Pfad mit $v_0 = v_n$ heißt *geschlossen* oder auch *Zyklus*
- ein wiederholungsfreier Zyklus heißt auch *einfacher Zyklus*

Pfade

- schreibe $M^{(+)}$ für die Menge aller nichtleeren Listen von Elementen aus M.
- *Pfad* in einem gerichteten Graphen
  - nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^{(+)}$ von Knoten
  - wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- *Länge eines Pfades*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- Wenn $p = (v_0, \dots, v_n)$ ein Pfad ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- Pfad $(v_0, \dots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
  - Die Knoten v_0, ..., v_{n-1} sind paarweise verschieden und
  - die Knoten v_1, ..., v_n sind paarweise verschieden.
  - v_0 und v_n dürfen gleich sein
- Pfad mit $v_0 = v_n$ heißt *geschlossen* oder auch *Zyklus*
- ein wiederholungsfreier Zyklus heißt auch *einfacher Zyklus*

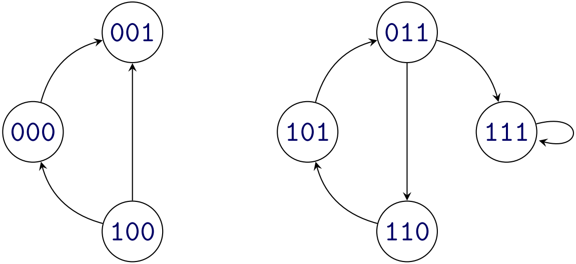
Pfade

- schreibe $M^{(+)}$ für die Menge aller nichtleeren Listen von Elementen aus M.
- *Pfad* in einem gerichteten Graphen
  - nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^{(+)}$ von Knoten
  - wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- *Länge eines Pfades*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- Wenn $p = (v_0, \dots, v_n)$ ein Pfad ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- Pfad $(v_0, \dots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
  - Die Knoten v_0, ..., v_{n-1} sind paarweise verschieden und
  - die Knoten v_1, ..., v_n sind paarweise verschieden.
  - v_0 und v_n dürfen gleich sein
- Pfad mit $v_0 = v_n$ heißt *geschlossen* oder auch *Zyklus*
- ein wiederholungsfreier Zyklus heißt auch *einfacher Zyklus*

Pfade

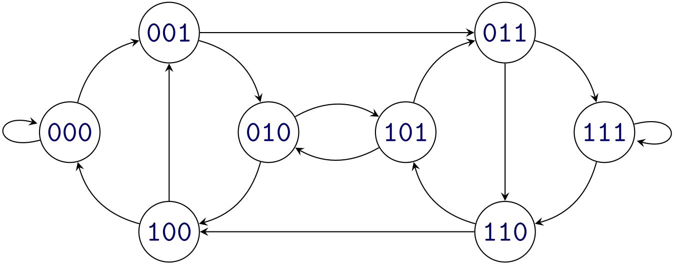
- schreibe $M^{(+)}$ für die Menge aller nichtleeren Listen von Elementen aus M.
- *Pfad* in einem gerichteten Graphen
  - nichtleere Liste $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^{(+)}$ von Knoten
  - wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- *Länge eines Pfades*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- Wenn $p = (v_0, \ldots, v_n)$ ein Pfad ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- Pfad $(v_0, \ldots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
  - Die Knoten v_0, ..., v_{n-1} sind paarweise verschieden und
  - die Knoten v_1, ..., v_n sind paarweise verschieden.
  - v_0 und v_n dürfen gleich sein
- Pfad mit $v_0 = v_n$ heißt *geschlossen* oder auch *Zyklus*
- ein wiederholungsfreier Zyklus heißt auch *einfacher Zyklus*

Pfade: Beispiele



- (100) ist Pfad der Länge 0
- (100, 001) ist Pfad der Länge 1
- (100, 000, 001) ist Pfad der Länge 2
- (110, 101, 011, 111, 111, 111) ist Pfad der Länge 5
- (011, 110, 101, 011) ist einfacher Zyklus der Länge 3.

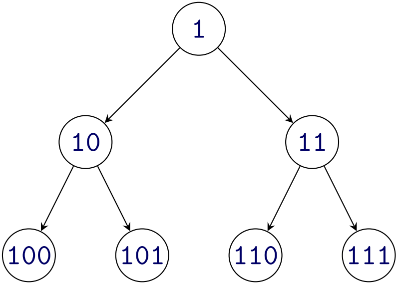
- gerichteter Graph heißt *streng zusammenhängend*, wenn für jedes Knotenpaar $(x, y) \in V^2$ einen Pfad in G von x nach y existiert
- Beispiel:



Bäume

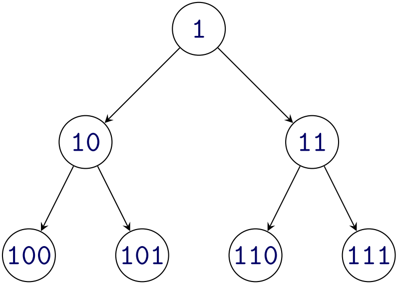
(gerichteter) Baum ist ein Graph $G = (V, E)$, in dem es einen Knoten $r \in V$ gibt mit der Eigenschaft:

- Zu jeden Knoten $x \in V$ gibt es in G genau einen Pfad von r nach x.
- gleich: es kann nur einen Knoten r mit der genannten Eigenschaft geben kann.
- r heißt die *Wurzel* des Baumes.
- Beispiel:



(gerichteter) Baum ist ein Graph $G = (V, E)$, in dem es einen Knoten $r \in V$ gibt mit der Eigenschaft:

- Zu jeden Knoten $x \in V$ gibt es in G genau einen Pfad von r nach x.
- gleich: es kann nur einen Knoten r mit der genannten Eigenschaft geben kann.
- r heißt die *Wurzel* des Baumes.
- Beispiel: Die Wurzel ist Knoten `1`.



Eindeutigkeit der Wurzel

Lemma. Die Wurzel eines gerichteten Baumes ist eindeutig.

Beweis

- Angenommen, r und r' wären verschiedene Wurzeln
- Dann gäbe es
  - einen Pfad von r nach r', weil r Wurzel ist, und
  - einen Pfad von r' nach r, weil r' Wurzel ist.
- „Hintereinanderhängen" dieser Pfade der Länge > 0
  - ergäbe Pfad von r nach r,
  - der vom Pfad (r) verschieden wäre.
- Also wäre der Pfad von r nach r gar nicht eindeutig.

Knotengrad

Für gerichtete Graphen definiert man:

- *Eingangsgrad* eines Knoten y ist

$$d^-(y) = |\{x \mid (x, y) \in E\}|$$

- *Ausgangsgrad* eines Knoten x ist

$$d^+(x) = |\{y \mid (x, y) \in E\}|$$

- *Grad* eines Knotens ist

$$d(x) = d^-(x) + d^+(x)$$

Was ist die „Struktur" eines Graphen?

- Das, was man erhält, wenn man die „Identitäten" der Knoten „weglässt".
- Das, was gleich bleibt, wenn man die Knoten umbenennt, man definiere also *Umbenennung der Knoten*
- Graph $G_1 = (V_1, E_1)$ heißt *isomorph* zu Graph $G_2 = (V_2, E_2)$, wenn es eine Bijektion $f : V_1 \to V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall x \in V_1 : \forall y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \iff (f(x), f(y)) \in E_2$$

- f heißt dann auch ein *(Graph-)Isomorphismus*

Was ist die „Struktur" eines Graphen?

- Das, was man erhält, wenn man die „Identitäten" der Knoten „weglässt".
- Das, was gleich bleibt, wenn man die Knoten umbenennt, man definiere also *Umbenennung der Knoten*
- Graph $G_1 = (V_1, E_1)$ heißt *isomorph* zu Graph $G_2 = (V_2, E_2)$, wenn es eine Bijektion $f : V_1 \to V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall x \in V_1 : \forall y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \iff (f(x), f(y)) \in E_2$$

- f heißt dann auch ein *(Graph-)Isomorphismus*

Was ist die „Struktur“ eines Graphen?

- Das, was man erhält, wenn man die „Identitäten“ der Knoten „weglässt“.
- Das, was gleich bleibt, wenn man die Knoten umbenennt, man definiere also *Umbenennung der Knoten*
- Graph $G_1 = (V_1, E_1)$ heißt *isomorph* zu Graph $G_2 = (V_2, E_2)$, wenn es eine Bijektion $f : V_1 \to V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall x \in V_1 : \forall y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \iff (f(x), f(y)) \in E_2$$

- f heißt dann auch ein *(Graph-)Isomorphismus*

Was ist die „Struktur“ eines Graphen?

- Das, was man erhält, wenn man die „Identitäten“ der Knoten „weglässt“.
- Das, was gleich bleibt, wenn man die Knoten umbenennt, man definiere also *Umbenennung der Knoten*
- Graph $G_1 = (V_1, E_1)$ heißt *isomorph* zu Graph $G_2 = (V_2, E_2)$, wenn es eine Bijektion $f : V_1 \to V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall x \in V_1 : \forall y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \iff (f(x), f(y)) \in E_2$$

- f heißt dann auch ein *(Graph-)Isomorphismus*

Eigenschaften von Graphisomorphie

- Wenn G_1 isomorph zu G_2, dann auch G_2 isomorph zu G_1:
  - f^{-1} leistet das Gewünschte.
- Jeder Graph ist isomorph zu sich selbst:
  - wähle $f = \mathrm{Id}_V$
- Wenn G_1 isomorph zu G_2 (dank f) und G_2 isomorph zu G_3 (dank g), dann auch G_1 isomorph zu G_3:
  - betrachte die Abbildung $g \circ f$

Eigenschaften von Graphisomorphie

- Wenn G_1 isomorph zu G_2, dann auch G_2 isomorph zu G_1:
  - f^{-1} leistet das Gewünschte.
- Jeder Graph ist isomorph zu sich selbst:
  - wähle $f = \mathrm{Id}_V$
- Wenn G_1 isomorph zu G_2 (dank f) und G_2 isomorph zu G_3 (dank g), dann auch G_1 isomorph zu G_3:
  - betrachte die Abbildung $g \circ f$

Eigenschaften von Graphisomorphie

- Wenn G_1 isomorph zu G_2, dann auch G_2 isomorph zu G_1:
  - f^{-1} leistet das Gewünschte.
- Jeder Graph ist isomorph zu sich selbst:
  - wähle $f = \mathrm{Id}_V$
- Wenn G_1 isomorph zu G_2 (dank f) und G_2 isomorph zu G_3 (dank g), dann auch G_1 isomorph zu G_3:
  - betrachte die Abbildung $g \circ f$

Graphen sind Relationen

- $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$
- Also ist E binäre Relation auf V.
- Frage: Bedeutung von E^i?
- Antwort: Zusammenhang mit Pfaden der Länge i
- Betrachten zunächst den Fall $i = 2$:
  - $E^2 = E \circ E^1 = E \circ E \circ \mathrm{Id} = E \circ E$, wobei

    $$E \circ E = \{(x, z) \in V \times V \mid \exists y \in V : (x, y) \in E \wedge (y, z) \in E\}$$

  - Pfad der Länge 2: Knotenliste $p = (v_0, v_1, v_2)$ mit der Eigenschaft, dass $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$.

  Also:
  - Wenn Pfad $p = (v_0, v_1, v_2)$ vorliegt, dann ist $(v_0, v_2) \in E^2$.
  - Wenn $(v_0, v_2) \in E^2$, dann gibt es Knoten v_1 mit $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$, und dann ist (v_0, v_1, v_2) ein Pfad im Graphen Länge 2.

  Also:
  - Ein Paar von Knoten item *genau dann* in der Relation E^2, *wenn* die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.

Graphen sind Relationen

- $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$
- Also ist E binäre Relation auf V.
- Frage: Bedeutung von E^i?
- Antwort: Zusammenhang mit Pfaden der Länge i
- Betrachten zunächst den Fall $i = 2$:
  - $E^2 = E \circ E^1 = E \circ E \circ \mathrm{Id} = E \circ E$, wobei

$$E \circ E = \{(x, z) \in V \times V \mid \exists y \in V : (x, y) \in E \wedge (y, z) \in E\}$$

  - Pfad der Länge 2: Knotenliste $p = (v_0, v_1, v_2)$ mit der Eigenschaft, dass $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$.

Also:

  - Wenn Pfad $p = (v_0, v_1, v_2)$ vorliegt, dann ist $(v_0, v_2) \in E^2$.
  - Wenn $(v_0, v_2) \in E^2$, dann gibt es Knoten v_1 mit $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$, und dann ist (v_0, v_1, v_2) ein Pfad im Graphen Länge 2.

Also:

  - Ein Paar von Knoten item *genau dann* in der Relation E^2, *wenn* die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.

Graphen sind Relationen

- $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$
- Also ist E binäre Relation auf V.
- Frage: Bedeutung von E^i?
- Antwort: Zusammenhang mit Pfaden der Länge i
- Betrachten zunächst den Fall $i = 2$:
  - $E^2 = E \circ E^1 = E \circ E \circ \mathrm{Id} = E \circ E$, wobei
    $$E \circ E = \{(x, z) \in V \times V \mid \exists y \in V : (x, y) \in E \wedge (y, z) \in E\}$$
  - Pfad der Länge 2: Knotenliste $p = (v_0, v_1, v_2)$ mit der Eigenschaft, dass $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$.

Also:

- Wenn Pfad $p = (v_0, v_1, v_2)$ vorliegt, dann ist $(v_0, v_2) \in E^2$.
- Wenn $(v_0, v_2) \in E^2$, dann gibt es Knoten v_1 mit $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$, und dann ist (v_0, v_1, v_2) ein Pfad im Graphen Länge 2.

Also:

- Ein Paar von Knoten item *genau dann* in der Relation E^2, *wenn* die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.

Graphen sind Relationen

- $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$
- Also ist E binäre Relation auf V.
- Frage: Bedeutung von E^i?
- Antwort: Zusammenhang mit Pfaden der Länge i
- Betrachten zunächst den Fall $i = 2$:
  - $E^2 = E \circ E^1 = E \circ E \circ \mathrm{Id} = E \circ E$, wobei

    $$E \circ E = \{(x, z) \in V \times V \mid \exists y \in V : (x, y) \in E \wedge (y, z) \in E\}$$

  - Pfad der Länge 2: Knotenliste $p = (v_0, v_1, v_2)$ mit der Eigenschaft, dass $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$.

Also:

- Wenn Pfad $p = (v_0, v_1, v_2)$ vorliegt, dann ist $(v_0, v_2) \in E^2$.
- Wenn $(v_0, v_2) \in E^2$, dann gibt es Knoten v_1 mit $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$, und dann ist (v_0, v_1, v_2) ein Pfad im Graphen Länge 2.

Also:

- Ein Paar von Knoten item *genau dann* in der Relation E^2, *wenn* die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.

- $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$
- Also ist E binäre Relation auf V.
- Frage: Bedeutung von E^i?
- Antwort: Zusammenhang mit Pfaden der Länge i
- Betrachten zunächst den Fall $i = 2$:
  - $E^2 = E \circ E^1 = E \circ E \circ \mathrm{Id} = E \circ E$, wobei

$$E \circ E = \{(x, z) \in V \times V \mid \exists y \in V : (x, y) \in E \wedge (y, z) \in E\}$$

  - Pfad der Länge 2: Knotenliste $p = (v_0, v_1, v_2)$ mit der Eigenschaft, dass $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$.

  Also:
  - Wenn Pfad $p = (v_0, v_1, v_2)$ vorliegt, dann ist $(v_0, v_2) \in E^2$.
  - Wenn $(v_0, v_2) \in E^2$, dann gibt es Knoten v_1 mit $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$, und dann ist (v_0, v_1, v_2) ein Pfad im Graphen Länge 2.

  Also:
  - Ein Paar von Knoten item *genau dann* in der Relation E^2, *wenn* die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.

- Ein Paar von Knoten genau dann in der Relation E^2, wenn die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.
- Man sieht leicht:
  Das Analoge gilt für $i = 0$ und $i = 1$.
  Spätestens vollständige Induktion lehrt:
- **Lemma.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^i, wenn x und y in G durch einen Pfad der Länge i miteinander verbunden sind.
- **Korollar.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^*, wenn x und y in G durch einen Pfad (evtl. der Länge 0) miteinander verbunden sind.
- **Korollar.** Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ ist genau dann streng zusammenhängend, wenn $E^* = V \times V$ ist.

- Ein Paar von Knoten genau dann in der Relation E^2, wenn die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.
- Man sieht leicht:
  Das Analoge gilt für $i = 0$ und $i = 1$.
  Spätestens vollständige Induktion lehrt:
- **Lemma.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^i, wenn x und y in G durch einen Pfad der Länge i miteinander verbunden sind.
- **Korollar.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^*, wenn x und y in G durch einen Pfad (evtl. der Länge 0) miteinander verbunden sind.
- **Korollar.** Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ ist genau dann streng zusammenhängend, wenn $E^* = V \times V$ ist.

- Ein Paar von Knoten genau dann in der Relation E^2, wenn die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.
- Man sieht leicht:
  Das Analoge gilt für $i = 0$ und $i = 1$.
  Spätestens vollständige Induktion lehrt:
- **Lemma.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^i, wenn x und y in G durch einen Pfad der Länge i miteinander verbunden sind.
- **Korollar.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^*, wenn x und y in G durch einen Pfad (evtl. der Länge 0) miteinander verbunden sind.
- **Korollar.** Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ ist genau dann streng zusammenhängend, wenn $E^* = V \times V$ ist.

- Ein Paar von Knoten genau dann in der Relation E^2, wenn die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.
- Man sieht leicht:
  Das Analoge gilt für $i = 0$ und $i = 1$.
  Spätestens vollständige Induktion lehrt:
- **Lemma.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^i, wenn x und y in G durch einen Pfad der Länge i miteinander verbunden sind.
- **Korollar.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^*, wenn x und y in G durch einen Pfad (evtl. der Länge 0) miteinander verbunden sind.
- **Korollar.** Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ ist genau dann streng zusammenhängend, wenn $E^* = V \times V$ ist.

Was ist wichtig

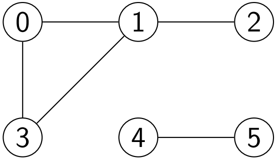
Das sollten Sie mitnehmen:

- gerichtete Graphen drücken Beziehungen aus (Relationen)
- Pfade
- strenger Zusammenhang
- Bäume

Das sollten Sie üben:

- Benutzung der neuen Begriffe beim Reden
- Malen von Graphen

- Manchmal gibt es in einem Graphen zu *jeder* Kante $(x, y) \in E$ auch die Kante $(y, x) \in E$ in umgekehrter Richtung
- dann oft graphische Darstellung der Kanten (x, y) und (y, x) nur durch einen Strich ohne Pfeilspitzen
- Man spricht dann auch nur von einer Kante.
- Beispiel



Ungerichtete Graphen: formal

Ein *ungerichteter Graph* ist eine Struktur $U = (V, E)$ mit

- V: endliche nichtleere Menge von *Knoten*
- E: Menge von *Kanten* mit

$$E \subseteq \{\ \{x, y\} \mid x \in V \wedge y \in V\}$$

- *adjazente Knoten:* durch eine Kante miteinander verbunden
- *Schlinge*
  - Kante mit identischen Start- und Zielknoten
  - formal ergibt sich $\{x, y\}$ mit $x = y$, also einfach $\{x\}$
- Graph ohne Schlingen heißt *schlingenfrei*

Teilgraph im ungerichteten Fall

$U' = (V', E')$ ist *Teilgraph* eines ungerichteten Graphen $U = (V, E)$, wenn

- $V' \subseteq V$ und
- $E' \subseteq E \cap \{ \{x, y\} \mid x, y \in V'\}$.
- also
  - Knoten- bzw. Kantenmenge von G' muss Teilmenge von Knoten- bzw. Kantenmenge von G sein, und
  - die Endpunkte jeder Kante von E' müssen auch zu V' gehören.

Wege

- *Weg* in einem ungerichteten Graphen
  - nichtleere Liste $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^{(+)}$ von Knoten
  - wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$
- *Länge eines Weges*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- Wenn $p = (v_0, \ldots, v_n)$ ein Weg ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- Weg $(v_0, \ldots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
  - Die Knoten v_0, …, v_{n-1} sind paarweise verschieden und
  - die Knoten v_1, …, v_n sind paarweise verschieden.
  - v_0 und v_n dürfen gleich sein

- *Weg* in einem ungerichteten Graphen
  - nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^{(+)}$ von Knoten
  - wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$
- *Länge eines Weges*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- Wenn $p = (v_0, \dots, v_n)$ ein Weg ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- Weg $(v_0, \dots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
  - Die Knoten v_0, ..., v_{n-1} sind paarweise verschieden und
  - die Knoten v_1, ..., v_n sind paarweise verschieden.
  - v_0 und v_n dürfen gleich sein

Wege

- *Weg* in einem ungerichteten Graphen
  - nichtleere Liste $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^{(+)}$ von Knoten
  - wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$
- *Länge eines Weges*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- Wenn $p = (v_0, \ldots, v_n)$ ein Weg ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- Weg $(v_0, \ldots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
  - Die Knoten v_0, ..., v_{n-1} sind paarweise verschieden und
  - die Knoten v_1, ..., v_n sind paarweise verschieden.
  - v_0 und v_n dürfen gleich sein

Wege

- *Weg* in einem ungerichteten Graphen
  - nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^{(+)}$ von Knoten
  - wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$
- *Länge eines Weges*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- Wenn $p = (v_0, \dots, v_n)$ ein Weg ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- Weg $(v_0, \dots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
  - Die Knoten v_0, ..., v_{n-1} sind paarweise verschieden und
  - die Knoten v_1, ..., v_n sind paarweise verschieden.
  - v_0 und v_n dürfen gleich sein

- Im gerichteten Fall:
  - E binäre Relation auf V und
  - alle E^i und E^* definiert und mit anschaulicher Bedeutung
- Im ungerichteten Fall E keine binäre Relation
  schade; deshalb beheben wir diesen Mangel umgehend
- Zu Kantenmenge E eines ungerichteten Graphen $U = (V, E)$ definieren wir die *Kantenrelation* $E_g \subseteq V \times V$ vermöge:

$$E_g = \{(x, y) \mid \{x, y\} \in E\} \ .$$

- Damit haben wir eine Relation auf V, und
  folglich einen gerichteten Graphen $G = (V, E_g)$ mit der gleiche Knotenmenge V wie U, den *zu U gehörenden gerichteten Graphen*.
- Wenn in U Knoten x und y durch Kante verbunden sind, dann gibt es in G
  - Kante (x, y) von x nach y und
  - Kante (y, x) von y nach x (denn $\{x, y\} = \{y, x\}$).

Ungerichtete Kanten und Relationen

- Im gerichteten Fall:
  - E binäre Relation auf V und
  - alle E^i und E^* definiert und mit anschaulicher Bedeutung
- Im ungerichteten Fall E keine binäre Relation
  schade; deshalb beheben wir diesen Mangel umgehend
- Zu Kantenmenge E eines ungerichteten Graphen $U = (V, E)$ definieren wir die *Kantenrelation* $E_g \subseteq V \times V$ vermöge:

$$E_g = \{(x, y) \mid \{x, y\} \in E\} .$$

- Damit haben wir eine Relation auf V, und folglich einen gerichteten Graphen $G = (V, E_g)$ mit der gleiche Knotenmenge V wie U, den *zu U gehörenden gerichteten Graphen*.
- Wenn in U Knoten x und y durch Kante verbunden sind, dann gibt es in G
  - Kante (x, y) von x nach y und
  - Kante (y, x) von y nach x (denn $\{x, y\} = \{y, x\}$).

Ungerichtete Kanten und Relationen

- Im gerichteten Fall:
  - E binäre Relation auf V und
  - alle E^i und E^* definiert und mit anschaulicher Bedeutung
- Im ungerichteten Fall E keine binäre Relation
  schade; deshalb beheben wir diesen Mangel umgehend
- Zu Kantenmenge E eines ungerichteten Graphen $U = (V, E)$ definieren wir die *Kantenrelation* $E_g \subseteq V \times V$ vermöge:

$$E_g = \{(x, y) \mid \{x, y\} \in E\} .$$

- Damit haben wir eine Relation auf V, und
  folglich einen gerichteten Graphen $G = (V, E_g)$ mit der gleiche Knotenmenge V wie U, den *zu U gehörenden gerichteten Graphen*.
- Wenn in U Knoten x und y durch Kante verbunden sind, dann gibt es in G
  - Kante (x, y) von x nach y und
  - Kante (y, x) von y nach x (denn $\{x, y\} = \{y, x\}$).

Ungerichtete Kanten und Relationen

- Im gerichteten Fall:
  - E binäre Relation auf V und
  - alle E^i und E^* definiert und mit anschaulicher Bedeutung
- Im ungerichteten Fall E keine binäre Relation
  schade; deshalb beheben wir diesen Mangel umgehend
- Zu Kantenmenge E eines ungerichteten Graphen $U = (V, E)$ definieren wir die *Kantenrelation* $E_g \subseteq V \times V$ vermöge:

$$E_g = \{(x, y) \mid \{x, y\} \in E\} \ .$$

- Damit haben wir eine Relation auf V, und
  folglich einen gerichteten Graphen $G = (V, E_g)$ mit der gleiche Knotenmenge V wie U, den *zu U gehörenden gerichteten Graphen*.
- Wenn in U Knoten x und y durch Kante verbunden sind, dann gibt es in G
  - Kante (x, y) von x nach y und
  - Kante (y, x) von y nach x (denn $\{x, y\} = \{y, x\}$).

Zusammenhang

- ungerichteter Graph (V, E) heißt *zusammenhängend*, wenn der zugehörige gerichtete Graph (V, E_g) streng zusammenhängend ist.

Gerichtete und ungerichtete Graphen: hin und her

Beachte:

- Manchmal ist es bequem, von einem ungerichteten zu dem zugehörigen gerichteten Graphen überzugehen.
- (manchmal auch nicht!)

Nun umgekehrt

- Ist $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, dann definiere

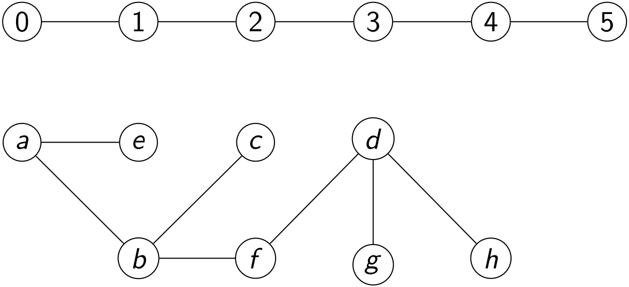
$$E_u = \{\ \{x, y\} \mid (x, y) \in E\}$$

- nenne $U = (V, E_u)$ den *zu G gehörigen ungerichteten Graph*
- U entsteht aus G durch „Entfernen“ (oder „Vergessen“) der Pfeilspitzen

- ungerichteter Graph $U = (V, E)$ heißt ein *(ungerichteter) Baum*, wenn es einen gerichteten Baum $G = (V, E')$ gibt mit $E = E'_u$.
- Beispiele: zwei Bäume

ungerichtete Bäume

- ungerichteter Graph $U = (V, E)$ heißt ein *(ungerichteter) Baum*, wenn es einen gerichteten Baum $G = (V, E')$ gibt mit $E = E'_u$.
- Beispiele: zwei Bäume



- Aus verschiedenen gerichteten Bäumen entsteht durch weglassen der Pfeilspitzen der gleiche ungerichtete Baum.
- Im gerichteten Fall: Wurzel leicht zu identifizieren.
- im ungerichteten Fall:
  - Von jedem Knoten führt ein Weg zu jedem anderen Knoten.
  - Trotzdem ist manchmal „klar“, dass ein Knoten die ausgezeichnete Rolle als Wurzel spielt.
  - Im Zweifelsfall sagt man es eben explizit dazu.

Knotengrad

- bei ungerichteten Graphen ein heikles Thema:
  - Was macht man mit Schlingen?
- Der *Grad* eines Knotens $x \in V$ in einem ungerichteten Graphen ist

$$d(x) = |\{y \mid y \neq x \wedge \{x, y\} \in E\}| + \begin{cases} 2 & \text{falls } \{x, x\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Symmetrische Relationen

- Kantenrelation eines ungerichteten Graphen hat die Eigenschaft: Wenn $(x, y) \in E_g$, dann immer auch $(y, x) \in E_g$.
- So etwas kommt öfter vor und verdient einen Namen:
- Eine Relation $R \subseteq M \times M$ *symmetrisch*, wenn für alle $x \in M$ und $y \in M$ gilt:

$$(x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R \; .$$

Äquivalenzrelationen

- Eine Relation, die
  - reflexiv,
  - transitiv und
  - symmetrisch

  heißt *Äquivalenzrelation*.
- Beispiel: Isomorphie von Graphen

Äquivalenzrelationen

- Eine Relation, die
  - reflexiv,
  - transitiv und
  - symmetrisch

  heißt *Äquivalenzrelation*.
- Beispiel: Isomorphie von Graphen

Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- ungerichtete Graphen:
  - Unterschiede zu gerichteten Graphen
  - Gemeinsamkeiten mit gerichteten Graphen

Das sollten Sie üben:

- Benutzung der Begriffe
- Malen von Graphen, hübsche und hässliche

Überblick

- Manchmal beinhaltet die Graphstruktur nicht alle Informationen, die von Interesse sind.
  - bei Ableitungsbäumen: Symbole an den Knoten
  - bei Huffman-Bäumen: Symbole als Beschriftungen an den Kanten, Zahlen als Gewichte an den Knoten
  - ...
- Ein *knotenmarkierter Graph* ist ein Graph $G = (V, E)$ (gerichtet oder ungerichtet), bei dem zusätzlich
  - eine Menge M_V von *(Knoten-)Markierungen* und
  - eine *Markierungsfunktion* $m_V : V \to M_V$

  gegeben sind.
- Ein *kantenmarkierter Graph* ist ein Graph $G = (V, E)$ (gerichtet oder ungerichtet), bei dem zusätzlich
  - eine Menge M_E von *(Kanten-)Markierungen* und
  - eine *Markierungsfunktion* $m_E : E \to M_E$

  gegeben sind.

- Landkarte als Graph
  - Jeder Knoten entspricht einem Land.
  - Eine Kante verbindet zwei verschiedene Knoten, wenn die repräsentierten Länder „benachbart sind“, d. h. ein Stück gemeinsame Grenzen haben.
- Färbung der Landkarte:
  - benachbarte Länder in verschiedenen Farben gefärbt
- Färbung des Graphen:
  - adjazente Knoten haben verschiedenen Farben als Markierung
- Färbung $m_V : V \to M_V$ heißt *legal*, wenn gilt

$$\{x, y\} \in E \Longrightarrow m_V(x) \neq m_V(y)$$

- Wieviele Farben braucht man für eine legale Färbung?
  - höchstens $|V|$
  - mindestens ?
    - dieses Problem taucht in Compilern wieder auf ...

- Landkarte als Graph
  - Jeder Knoten entspricht einem Land.
  - Eine Kante verbindet zwei verschiedene Knoten, wenn die repräsentierten Länder „benachbart sind", d. h. ein Stück gemeinsame Grenzen haben.
- Färbung der Landkarte:
  - benachbarte Länder in verschiedenen Farben gefärbt
- Färbung des Graphen:
  - adjazente Knoten haben verschiedenen Farben als Markierung
- Färbung $m_V : V \to M_V$ heißt *legal*, wenn gilt

$$\{x, y\} \in E \Longrightarrow m_V(x) \neq m_V(y)$$

- Wieviele Farben braucht man für eine legale Färbung?
  - höchstens $|V|$
  - mindestens ?
    - dieses Problem taucht in Compilern wieder auf ...

weitere Beispiele für allgemeine Markierungen

- Landkarte als Graph
  - Jeder Knoten entspricht einem Land.
  - Eine Kante verbindet zwei verschiedene Knoten, wenn die repräsentierten Länder „benachbart sind“, d. h. ein Stück gemeinsame Grenzen haben.
- Färbung der Landkarte:
  - benachbarte Länder in verschiedenen Farben gefärbt
- Färbung des Graphen:
  - adjazente Knoten haben verschiedenen Farben als Markierung
- Färbung $m_V : V \to M_V$ heißt *legal*, wenn gilt

$$\{x, y\} \in E \Longrightarrow m_V(x) \neq m_V(y)$$

- Wieviele Farben braucht man für eine legale Färbung?
  - höchstens $|V|$
  - mindestens ?
    - dieses Problem taucht in Compilern wieder auf ...

- Landkarte als Graph
  - Jeder Knoten entspricht einem Land.
  - Eine Kante verbindet zwei verschiedene Knoten, wenn die repräsentierten Länder „benachbart sind“, d. h. ein Stück gemeinsame Grenzen haben.
- Färbung der Landkarte:
  - benachbarte Länder in verschiedenen Farben gefärbt
- Färbung des Graphen:
  - adjazente Knoten haben verschiedenen Farben als Markierung
- Färbung $m_V : V \to M_V$ heißt *legal*, wenn gilt

$$\{x, y\} \in E \Longrightarrow m_V(x) \neq m_V(y)$$

- Wieviele Farben braucht man für eine legale Färbung?
  - höchstens $|V|$
  - mindestens ?
    - dieses Problem taucht in Compilern wieder auf ...

Wenn die Knoten- oder Kantenmarkierungen Zahlen sind, dann spricht man auch von *gewichteten* Graphen.

Beispiele für kantengewichtete Graphen:

- Verkehrsnetz:
  - Kantengewichte sind Entfernungen
  - Problem: finde kürzesten Weg von x nach y
  - Problem: finde kürzeste Rundreise (einfachen Zyklus)
- Kabelnetz:
  - Kantengewichte sind Baukosten
  - Problem: finde billigste Möglichkeit, „alle miteinander" zu verbinden
- Rohrleitungsnetz:
  - Kantengewichte sind Rohrquerschnitte
  - Problem: finde maximal möglichen Fluss von x nach y

Wenn die Knoten- oder Kantenmarkierungen Zahlen sind, dann spricht man auch von *gewichteten* Graphen.

Beispiele für kantengewichtete Graphen:

- Verkehrsnetz:
  - Kantengewichte sind Entfernungen
  - Problem: finde kürzesten Weg von x nach y
  - Problem: finde kürzeste Rundreise (einfachen Zyklus)
- Kabelnetz:
  - Kantengewichte sind Baukosten
  - Problem: finde billigste Möglichkeit, „alle miteinander“ zu verbinden
- Rohrleitungsnetz:
  - Kantengewichte sind Rohrquerschnitte
  - Problem: finde maximal möglichen Fluss von x nach y

Wenn die Knoten- oder Kantenmarkierungen Zahlen sind, dann spricht man auch von *gewichteten* Graphen.

Beispiele für kantengewichtete Graphen:

- Verkehrsnetz:
  - Kantengewichte sind Entfernungen
  - Problem: finde kürzesten Weg von x nach y
  - Problem: finde kürzeste Rundreise (einfachen Zyklus)
- Kabelnetz:
  - Kantengewichte sind Baukosten
  - Problem: finde billigste Möglichkeit, „alle miteinander" zu verbinden
- Rohrleitungsnetz:
  - Kantengewichte sind Rohrquerschnitte
  - Problem: finde maximal möglichen Fluss von x nach y

Wenn die Knoten- oder Kantenmarkierungen Zahlen sind, dann spricht man auch von *gewichteten* Graphen.

Beispiele für kantengewichtete Graphen:

- Verkehrsnetz:
  - Kantengewichte sind Entfernungen
  - Problem: finde kürzesten Weg von x nach y
  - Problem: finde kürzeste Rundreise (einfachen Zyklus)
- Kabelnetz:
  - Kantengewichte sind Baukosten
  - Problem: finde billigste Möglichkeit, „alle miteinander“ zu verbinden
- Rohrleitungsnetz:
  - Kantengewichte sind Rohrquerschnitte
  - Problem: finde maximal möglichen Fluss von x nach y

Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- vielfältige Beispiele für Knoten- und Kantenmarkierungen
- man stößt leicht auf diverse Optimierungsprobleme

Das sollten Sie üben:

- an einfachen Beispielen Optimierungen versuchen (leicht? schwer?)

Zusammenfassung

- gerichtete und ungerichtete Graphen
  - wichtige Begriffe (Pfad, Zyklus, Baum, ...)
  - Gemeinsamkeiten und Unterschiede
- Relationen
  - symmetrische Relationen
  - Äquivalenzrelationen