

Grundbegriffe der Informatik

Einheit 11: Graphen

Thomas Worsch

Universität Karlsruhe, Fakultät für Informatik

Wintersemester 2008/2009

schon an vielen Stellen Gebilde durch Linien miteinander verbunden, z. B.

- ▶ in dieser Vorlesung
 - ▶ Pfeile zwischen Mengen
 - ▶ Ableitungsbäume
 - ▶ Huffman-Bäume
- ▶ in „Programmieren“
 - ▶ „Kästen“ für Objekte und Klassen, Pfeile dazwischen

In dieser Einheit

- ▶ nicht mehr Gebrauchsgegenstand sondern Untersuchungsgegenstand
- ▶ man unterscheidet **gerichtete** und **ungerichtete** Graphen
- ▶ manchmal zusätzlich zu den Beziehungen noch weitere Informationen, sogenannte **Markierungen**

schon an vielen Stellen Gebilde durch Linien miteinander verbunden, z. B.

- ▶ in dieser Vorlesung
 - ▶ Pfeile zwischen Mengen
 - ▶ Ableitungsbäume
 - ▶ Huffman-Bäume
- ▶ in „Programmieren“
 - ▶ „Kästen“ für Objekte und Klassen, Pfeile dazwischen

In dieser Einheit

- ▶ nicht mehr Gebrauchsgegenstand sondern Untersuchungsgegenstand
- ▶ man unterscheidet **gerichtete** und **ungerichtete** Graphen
- ▶ manchmal zusätzlich zu den Beziehungen noch weitere Informationen, sogenannte **Markierungen**

Gerichtete Graphen

- Graphen und Teilgraphen

- Pfade und Erreichbarkeit

- Isomorphie von Graphen

- Ein Blick zurück auf Relationen

Ungerichtete Graphen

- Übertragung der Grundbegriffe aus dem gerichteten Fall

- Eine Anmerkung zu Relationen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

- Gewichtete Graphen

Gerichtete Graphen

- Graphen und Teilgraphen

- Pfade und Erreichbarkeit

- Isomorphie von Graphen

- Ein Blick zurück auf Relationen

Ungerichtete Graphen

- Übertragung der Grundbegriffe aus dem gerichteten Fall

- Eine Anmerkung zu Relationen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

- Gewichtete Graphen

gerichteter Graph

- ▶ festgelegt durch ein Paar $G = (V, E)$,
- ▶ $E \subseteq V \times V$ ist
- ▶ V nichtleere, endliche *Knotenmenge*
- ▶ E *Kantenmenge*; darf leer sein.

üblich: graphische Darstellung, also nicht

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{(0, 1), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (4, 5), (5, 4)\}$$

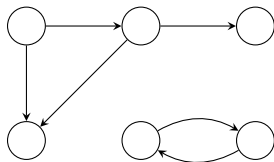
sondern ...

- ▶ statt

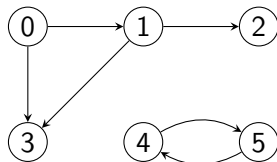
$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{(0, 1), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (4, 5), (5, 4)\}$$

- ▶ lieber



oder



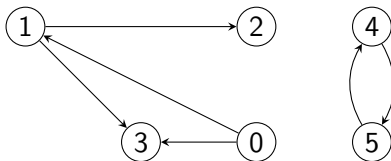
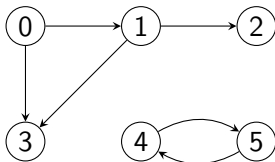
- ▶ manchmal lässt man die Knotenidentitäten weg,
- ▶ manchmal sind sie wichtig

der gleiche Beispielgraph (nur anders hingemalt)

Anordnung der Knoten in der Darstellung irrelevant

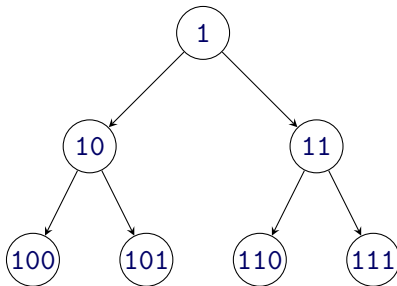
das ist zweimal der gleiche Graph ...

oder vielmehr: das sind zwei Darstellungen des gleichen Graphen:



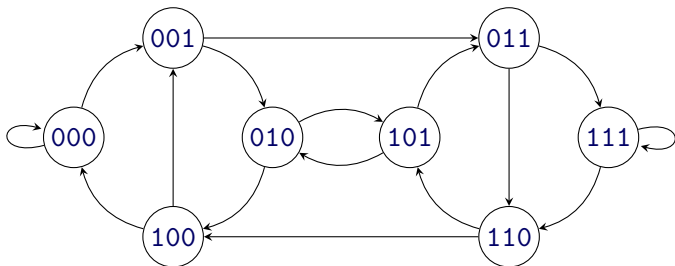
Beispielgraph 2: ein Baum

- ▶ $G = (V, E)$ mit
 - ▶ $V = \{1\} \left(\bigcup_{i=0}^2 \{0, 1\}^i \right)$
 $= \{1, 10, 11, 100, 101, 110, 111\}$
 - ▶ $E = \{(w, wx) \mid x \in \{0, 1\} \wedge w \in V \wedge wx \in V\}$
 $= \{(1, 10), (1, 11), (10, 100), (10, 101),$
 $(11, 110), (11, 111)\}$
- ▶ graphisch



Beispielgraph 3: ein de Bruijn-Graph

- ▶ $G = (V, E)$ mit
 - ▶ $V = \{0, 1\}^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$
 - ▶ $E = \{(xw, wy) \mid x, y \in \{0, 1\} \wedge w \in \{0, 1\}^2\} = \{(000, 000), \dots, (010, 101), \dots\}$
- ▶ graphisch

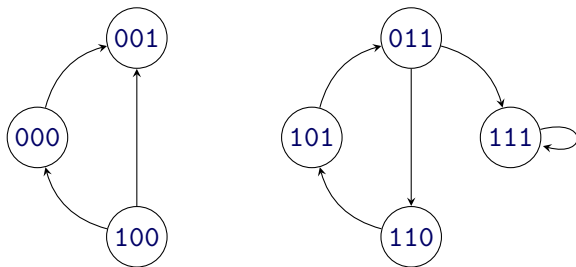


- ▶ Kante der Form $(x, x) \in E$ heißt *Schlinge*
- ▶ Graph ohne Schlingen heißt *schlingenfrei*

$G' = (V', E')$ ist ein *Teilgraph* von $G = (V, E)$, wenn

- ▶ $V' \subseteq V$
- ▶ $E' \subseteq E \cap V' \times V'$,
- ▶ also
 - ▶ Knoten- bzw. Kantenmenge von G' muss Teilmenge von Knoten- bzw. Kantenmenge von G sein, und
 - ▶ die Endpunkte jeder Kante von E' müssen auch zu V' gehören.

ein Teilgraph des de Bruijn-Graphen von vorhin:



- ▶ *Pfad* in einem gerichteten Graphen
 - ▶ nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^+$ von Knoten
 - ▶ wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- ▶ *Länge eines Pfades*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- ▶ Wenn $p = (v_0, \dots, v_n)$ ein Pfad ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- ▶ Pfad $(v_0, \dots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
 - ▶ Die Knoten $v_0, \dots, v_{n-1}$ sind paarweise verschieden und
 - ▶ die Knoten $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise verschieden.
 - ▶ v_0 und v_n dürfen gleich sein
- ▶ Pfad mit $v_0 = v_n$ heißt *geschlossen* oder auch *Zyklus*
- ▶ ein wiederholungsfreier Zyklus heißt auch *einfacher Zyklus*

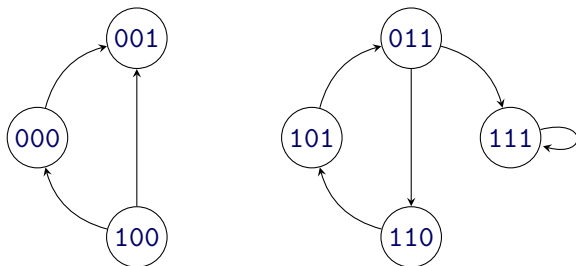
- ▶ *Pfad* in einem gerichteten Graphen
 - ▶ nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^+$ von Knoten
 - ▶ wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- ▶ *Länge eines Pfades*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- ▶ Wenn $p = (v_0, \dots, v_n)$ ein Pfad ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- ▶ Pfad $(v_0, \dots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
 - ▶ Die Knoten $v_0, \dots, v_{n-1}$ sind paarweise verschieden und
 - ▶ die Knoten $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise verschieden.
 - ▶ v_0 und v_n dürfen gleich sein
- ▶ Pfad mit $v_0 = v_n$ heißt *geschlossen* oder auch *Zyklus*
- ▶ ein wiederholungsfreier Zyklus heißt auch *einfacher Zyklus*

- ▶ *Pfad* in einem gerichteten Graphen
 - ▶ nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^+$ von Knoten
 - ▶ wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- ▶ *Länge eines Pfades*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- ▶ Wenn $p = (v_0, \dots, v_n)$ ein Pfad ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- ▶ Pfad $(v_0, \dots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
 - ▶ Die Knoten $v_0, \dots, v_{n-1}$ sind paarweise verschieden und
 - ▶ die Knoten $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise verschieden.
 - ▶ v_0 und v_n dürfen gleich sein
- ▶ Pfad mit $v_0 = v_n$ heißt *geschlossen* oder auch *Zyklus*
- ▶ ein wiederholungsfreier Zyklus heißt auch *einfacher Zyklus*

- ▶ *Pfad* in einem gerichteten Graphen
 - ▶ nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^+$ von Knoten
 - ▶ wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- ▶ *Länge eines Pfades*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- ▶ Wenn $p = (v_0, \dots, v_n)$ ein Pfad ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- ▶ Pfad $(v_0, \dots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
 - ▶ Die Knoten $v_0, \dots, v_{n-1}$ sind paarweise verschieden und
 - ▶ die Knoten $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise verschieden.
 - ▶ v_0 und v_n dürfen gleich sein
- ▶ Pfad mit $v_0 = v_n$ heißt *geschlossen* oder auch *Zyklus*
- ▶ ein wiederholungsfreier Zyklus heißt auch *einfacher Zyklus*

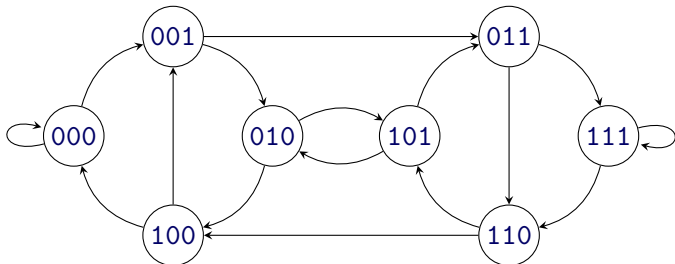
- ▶ *Pfad* in einem gerichteten Graphen
 - ▶ nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^+$ von Knoten
 - ▶ wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- ▶ *Länge eines Pfades*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- ▶ Wenn $p = (v_0, \dots, v_n)$ ein Pfad ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- ▶ Pfad $(v_0, \dots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
 - ▶ Die Knoten $v_0, \dots, v_{n-1}$ sind paarweise verschieden und
 - ▶ die Knoten $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise verschieden.
 - ▶ v_0 und v_n dürfen gleich sein
- ▶ Pfad mit $v_0 = v_n$ heißt *geschlossen* oder auch *Zyklus*
- ▶ ein wiederholungsfreier Zyklus heißt auch *einfacher Zyklus*

- ▶ *Pfad* in einem gerichteten Graphen
 - ▶ nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^+$ von Knoten
 - ▶ wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- ▶ *Länge eines Pfades*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- ▶ Wenn $p = (v_0, \dots, v_n)$ ein Pfad ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- ▶ Pfad $(v_0, \dots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
 - ▶ Die Knoten $v_0, \dots, v_{n-1}$ sind paarweise verschieden und
 - ▶ die Knoten $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise verschieden.
 - ▶ v_0 und v_n dürfen gleich sein
- ▶ Pfad mit $v_0 = v_n$ heißt *geschlossen* oder auch *Zyklus*
- ▶ ein wiederholungsfreier Zyklus heißt auch *einfacher Zyklus*



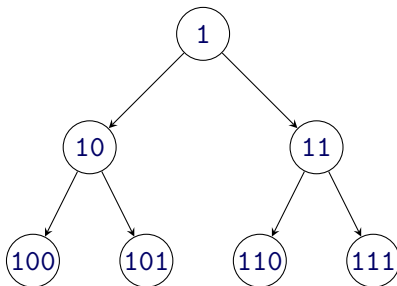
- ▶ (100) ist Pfad der Länge 0
- ▶ (100, 001) ist Pfad der Länge 1
- ▶ (100, 000, 001) ist Pfad der Länge 2
- ▶ (110, 101, 011, 111, 111, 111) ist Pfad der Länge 5
- ▶ (011, 110, 101, 011) ist einfacher Zyklus der Länge 3.

- ▶ gerichteter Graph heißt *streng zusammenhängend*, wenn für jedes Knotenpaar $(x, y) \in V^2$ einen Pfad in G von x nach y existiert
- ▶ Beispiel:



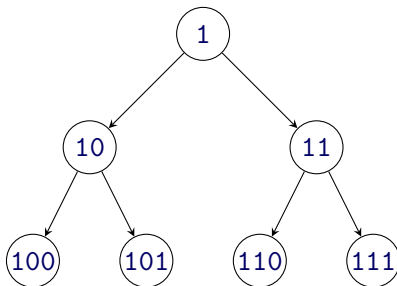
(gerichteter) Baum ist ein Graph $G = (V, E)$, in dem es einen Knoten $r \in V$ gibt mit der Eigenschaft:

- ▶ Zu jedem Knoten $x \in V$ gibt es in G **genau einen** Pfad von r nach x .
- ▶ gleich: es kann nur einen Knoten r mit der genannten Eigenschaft geben kann.
- ▶ r heißt die **Wurzel** des Baumes.
- ▶ Beispiel:



(gerichteter) Baum ist ein Graph $G = (V, E)$, in dem es einen Knoten $r \in V$ gibt mit der Eigenschaft:

- ▶ Zu jedem Knoten $x \in V$ gibt es in G **genau einen** Pfad von r nach x .
- ▶ gleich: es kann nur einen Knoten r mit der genannten Eigenschaft geben kann.
- ▶ r heißt die **Wurzel** des Baumes.
- ▶ Beispiel: Die Wurzel ist Knoten 1.



Lemma. Die Wurzel eines gerichteten Baumes ist eindeutig.

Beweis

- ▶ Angenommen, r und r' wären verschiedene Wurzeln
- ▶ Dann gäbe es
 - ▶ einen Pfad von r nach r' , weil r Wurzel ist, und
 - ▶ einen Pfad von r' nach r , weil r' Wurzel ist.
- ▶ „Hintereinanderhängen“ dieser Pfade der Länge > 0
 - ▶ ergäbe Pfad von r nach r ,
 - ▶ der vom Pfad (r) verschieden wäre.
- ▶ Also wäre der Pfad von r nach r gar nicht eindeutig.

Für gerichtete Graphen definiert man:

- ▶ *Eingangsgrad* eines Knoten y ist

$$d^-(y) = |\{x \mid (x, y) \in E\}|$$

- ▶ *Ausgangsgrad* eines Knoten x ist

$$d^+(x) = |\{y \mid (x, y) \in E\}|$$

- ▶ *Grad* eines Knotens ist

$$d(x) = d^-(x) + d^+(x)$$

Was ist die „Struktur“ eines Graphen?

- ▶ Das, was man erhält, wenn man die „Identitäten“ der Knoten „weglässt“.
- ▶ Das, was gleich bleibt, wenn man die Knoten umbenennt, man definiere also *Umbenennung der Knoten*
- ▶ Graph $G_1 = (V_1, E_1)$ heißt *isomorph* zu Graph $G_2 = (V_2, E_2)$, wenn es eine Bijektion $f : V_1 \rightarrow V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall x \in V_1 : \forall y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \iff (f(x), f(y)) \in E_2$$

- ▶ f heißt dann auch ein *(Graph-)Isomorphismus*

Was ist die „Struktur“ eines Graphen?

- ▶ Das, was man erhält, wenn man die „Identitäten“ der Knoten „weglässt“.
- ▶ Das, was gleich bleibt, wenn man die Knoten umbenennt, man definiere also *Umbenennung der Knoten*
- ▶ Graph $G_1 = (V_1, E_1)$ heißt *isomorph* zu Graph $G_2 = (V_2, E_2)$, wenn es eine Bijektion $f : V_1 \rightarrow V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall x \in V_1 : \forall y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \iff (f(x), f(y)) \in E_2$$

- ▶ f heißt dann auch ein *(Graph-)Isomorphismus*

Was ist die „Struktur“ eines Graphen?

- ▶ Das, was man erhält, wenn man die „Identitäten“ der Knoten „weglässt“.
- ▶ Das, was gleich bleibt, wenn man die Knoten umbenennt, man definiere also *Umbenennung der Knoten*
- ▶ Graph $G_1 = (V_1, E_1)$ heißt *isomorph* zu Graph $G_2 = (V_2, E_2)$, wenn es eine Bijektion $f : V_1 \rightarrow V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall x \in V_1 : \forall y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \iff (f(x), f(y)) \in E_2$$

- ▶ f heißt dann auch ein *(Graph-)Isomorphismus*

Was ist die „Struktur“ eines Graphen?

- ▶ Das, was man erhält, wenn man die „Identitäten“ der Knoten „weglässt“.
- ▶ Das, was gleich bleibt, wenn man die Knoten umbenennt, man definiere also *Umbenennung der Knoten*
- ▶ Graph $G_1 = (V_1, E_1)$ heißt *isomorph* zu Graph $G_2 = (V_2, E_2)$, wenn es eine Bijektion $f : V_1 \rightarrow V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall x \in V_1 : \forall y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \iff (f(x), f(y)) \in E_2$$

- ▶ f heißt dann auch ein *(Graph-)Isomorphismus*

- ▶ Wenn G_1 isomorph zu G_2 , dann auch G_2 isomorph zu G_1 :
 - ▶ f^{-1} leistet das Gewünschte.
- ▶ Jeder Graph ist isomorph zu sich selbst:
 - ▶ wähle $f = \text{Id}_V$
- ▶ Wenn G_1 isomorph zu G_2 (dank f) und G_2 isomorph zu G_3 (dank g), dann auch G_1 isomorph zu G_3 :
 - ▶ betrachte die Abbildung $g \circ f$

- ▶ Wenn G_1 isomorph zu G_2 , dann auch G_2 isomorph zu G_1 :
 - ▶ f^{-1} leistet das Gewünschte.
- ▶ Jeder Graph ist isomorph zu sich selbst:
 - ▶ wähle $f = \text{Id}_V$
- ▶ Wenn G_1 isomorph zu G_2 (dank f) und G_2 isomorph zu G_3 (dank g), dann auch G_1 isomorph zu G_3 :
 - ▶ betrachte die Abbildung $g \circ f$

- ▶ Wenn G_1 isomorph zu G_2 , dann auch G_2 isomorph zu G_1 :
 - ▶ f^{-1} leistet das Gewünschte.
- ▶ Jeder Graph ist isomorph zu sich selbst:
 - ▶ wähle $f = \text{Id}_V$
- ▶ Wenn G_1 isomorph zu G_2 (dank f) und G_2 isomorph zu G_3 (dank g), dann auch G_1 isomorph zu G_3 :
 - ▶ betrachte die Abbildung $g \circ f$

- ▶ $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$
- ▶ Also ist E binäre Relation auf V .
- ▶ **Frage:** Bedeutung von E^i ?
- ▶ **Antwort:** Zusammenhang mit Pfaden der Länge i
- ▶ Betrachten zunächst den Fall $i = 2$:

- ▶ $E^2 = E \circ E^1 = E \circ E \circ \text{Id} = E \circ E$, wobei

$$E \circ E = \{(x, z) \in E \times E \mid \exists y \in E : (x, y) \in E \wedge (y, z) \in E\}$$

- ▶ Pfad der Länge 2: Knotenliste $p = (v_0, v_1, v_2)$ mit der Eigenschaft, dass $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$.

Also:

- ▶ Wenn Pfad $p = (v_0, v_1, v_2)$ vorliegt, dann ist $(v_0, v_2) \in E^2$.
 - ▶ Wenn $(v_0, v_2) \in E^2$, dann gibt es Knoten v_1 mit $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$, und dann ist (v_0, v_1, v_2) ein Pfad im Graphen Länge 2.

Also:

- ▶ Ein Paar von Knoten item *genau dann* in der Relation E^2 , *wenn* die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.

- ▶ $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$
- ▶ Also ist E binäre Relation auf V .
- ▶ **Frage:** Bedeutung von E^i ?
- ▶ **Antwort:** Zusammenhang mit Pfaden der Länge i
- ▶ Betrachten zunächst den Fall $i = 2$:

- ▶ $E^2 = E \circ E^1 = E \circ E \circ \text{Id} = E \circ E$, wobei

$$E \circ E = \{(x, z) \in E \times E \mid \exists y \in E : (x, y) \in E \wedge (y, z) \in E\}$$

- ▶ Pfad der Länge 2: Knotenliste $p = (v_0, v_1, v_2)$ mit der Eigenschaft, dass $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$.

Also:

- ▶ Wenn Pfad $p = (v_0, v_1, v_2)$ vorliegt, dann ist $(v_0, v_2) \in E^2$.
 - ▶ Wenn $(v_0, v_2) \in E^2$, dann gibt es Knoten v_1 mit $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$, und dann ist (v_0, v_1, v_2) ein Pfad im Graphen Länge 2.

Also:

- ▶ Ein Paar von Knoten item *genau dann* in der Relation E^2 , *wenn* die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.

- ▶ $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$
- ▶ Also ist E binäre Relation auf V .
- ▶ **Frage:** Bedeutung von E^i ?
- ▶ **Antwort:** Zusammenhang mit Pfaden der Länge i
- ▶ Betrachten zunächst den Fall $i = 2$:

- ▶ $E^2 = E \circ E^1 = E \circ E \circ \text{Id} = E \circ E$, wobei

$$E \circ E = \{(x, z) \in E \times E \mid \exists y \in E : (x, y) \in E \wedge (y, z) \in E\}$$

- ▶ Pfad der Länge 2: Knotenliste $p = (v_0, v_1, v_2)$ mit der Eigenschaft, dass $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$.

Also:

- ▶ Wenn Pfad $p = (v_0, v_1, v_2)$ vorliegt, dann ist $(v_0, v_2) \in E^2$.
- ▶ Wenn $(v_0, v_2) \in E^2$, dann gibt es Knoten v_1 mit $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$, und dann ist (v_0, v_1, v_2) ein Pfad im Graphen Länge 2.

Also:

- ▶ Ein Paar von Knoten item *genau dann* in der Relation E^2 , *wenn* die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.

- ▶ $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$
- ▶ Also ist E binäre Relation auf V .
- ▶ **Frage:** Bedeutung von E^i ?
- ▶ **Antwort:** Zusammenhang mit Pfaden der Länge i
- ▶ Betrachten zunächst den Fall $i = 2$:

- ▶ $E^2 = E \circ E^1 = E \circ E \circ \text{Id} = E \circ E$, wobei

$$E \circ E = \{(x, z) \in E \times E \mid \exists y \in E : (x, y) \in E \wedge (y, z) \in E\}$$

- ▶ Pfad der Länge 2: Knotenliste $p = (v_0, v_1, v_2)$ mit der Eigenschaft, dass $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$.

Also:

- ▶ Wenn Pfad $p = (v_0, v_1, v_2)$ vorliegt, dann ist $(v_0, v_2) \in E^2$.
- ▶ Wenn $(v_0, v_2) \in E^2$, dann gibt es Knoten v_1 mit $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$, und dann ist (v_0, v_1, v_2) ein Pfad im Graphen Länge 2.

Also:

- ▶ Ein Paar von Knoten item *genau dann* in der Relation E^2 , *wenn* die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.

- ▶ $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$
- ▶ Also ist E binäre Relation auf V .
- ▶ **Frage:** Bedeutung von E^i ?
- ▶ **Antwort:** Zusammenhang mit Pfaden der Länge i
- ▶ Betrachten zunächst den Fall $i = 2$:

- ▶ $E^2 = E \circ E^1 = E \circ E \circ \text{Id} = E \circ E$, wobei

$$E \circ E = \{(x, z) \in E \times E \mid \exists y \in E : (x, y) \in E \wedge (y, z) \in E\}$$

- ▶ Pfad der Länge 2: Knotenliste $p = (v_0, v_1, v_2)$ mit der Eigenschaft, dass $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$.

Also:

- ▶ Wenn Pfad $p = (v_0, v_1, v_2)$ vorliegt, dann ist $(v_0, v_2) \in E^2$.
- ▶ Wenn $(v_0, v_2) \in E^2$, dann gibt es Knoten v_1 mit $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$, und dann ist (v_0, v_1, v_2) ein Pfad im Graphen Länge 2.

Also:

- ▶ Ein Paar von Knoten item *genau dann* in der Relation E^2 , *wenn* die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.

- ▶ Ein Paar von Knoten genau dann in der Relation E^2 , wenn die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.
- ▶ Man sieht leicht:
Das Analoge gilt für $i = 0$ und $i = 1$.
Spätestens vollständige Induktion lehrt:
- ▶ **Lemma.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^i , wenn x und y in G durch einen Pfad der Länge i miteinander verbunden sind.
- ▶ **Korollar.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^* , wenn x und y in G durch einen Pfad (evtl. der Länge 0) miteinander verbunden sind.
- ▶ **Korollar.** Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ ist genau dann streng zusammenhängend, wenn $E^* = V \times V$ ist.

- ▶ Ein Paar von Knoten genau dann in der Relation E^2 , wenn die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.
- ▶ Man sieht leicht:
Das Analoge gilt für $i = 0$ und $i = 1$.
Spätestens vollständige Induktion lehrt:
- ▶ **Lemma.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^i , wenn x und y in G durch einen Pfad der Länge i miteinander verbunden sind.
- ▶ **Korollar.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^* , wenn x und y in G durch einen Pfad (evtl. der Länge 0) miteinander verbunden sind.
- ▶ **Korollar.** Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ ist genau dann streng zusammenhängend, wenn $E^* = V \times V$ ist.

- ▶ Ein Paar von Knoten genau dann in der Relation E^2 , wenn die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.
- ▶ Man sieht leicht:
Das Analoge gilt für $i = 0$ und $i = 1$.
Spätestens vollständige Induktion lehrt:
- ▶ **Lemma.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^i , wenn x und y in G durch einen Pfad der Länge i miteinander verbunden sind.
- ▶ **Korollar.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^* , wenn x und y in G durch einen Pfad (evtl. der Länge 0) miteinander verbunden sind.
- ▶ **Korollar.** Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ ist genau dann streng zusammenhängend, wenn $E^* = V \times V$ ist.

- ▶ Ein Paar von Knoten genau dann in der Relation E^2 , wenn die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.
- ▶ Man sieht leicht:
Das Analoge gilt für $i = 0$ und $i = 1$.
Spätestens vollständige Induktion lehrt:
- ▶ **Lemma.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^i , wenn x und y in G durch einen Pfad der Länge i miteinander verbunden sind.
- ▶ **Korollar.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^* , wenn x und y in G durch einen Pfad (evtl. der Länge 0) miteinander verbunden sind.
- ▶ **Korollar.** Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ ist genau dann streng zusammenhängend, wenn $E^* = V \times V$ ist.

Das sollten Sie mitnehmen:

- ▶ gerichtete Graphen drücken Beziehungen aus (Relationen)
- ▶ Pfade
- ▶ strenger Zusammenhang
- ▶ Bäume

Das sollten Sie üben:

- ▶ Benutzung der neuen Begriffe beim Reden
- ▶ Malen von Graphen

Gerichtete Graphen

Graphen und Teilgraphen

Pfade und Erreichbarkeit

Isomorphie von Graphen

Ein Blick zurück auf Relationen

Ungerichtete Graphen

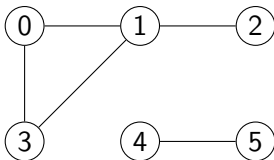
Übertragung der Grundbegriffe aus dem gerichteten Fall

Eine Anmerkung zu Relationen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

Gewichtete Graphen

- ▶ Manchmal gibt es in einem Graphen zu *jeder* Kante $(x, y) \in E$ auch die Kante $(y, x) \in E$ in umgekehrter Richtung
- ▶ dann oft graphische Darstellung der Kanten (x, y) und (y, x) nur durch **einen** Strich **ohne** Pfeilspitzen
- ▶ Man spricht dann auch nur von **einer** Kante.
- ▶ Beispiel



Ein *ungerichteter Graph* ist eine Struktur $U = (V, E)$ mit

- ▶ V : endliche nichtleere Menge von *Knoten*
- ▶ E : Menge von *Kanten* mit

$$E \subseteq \{ \{x, y\} \mid x \in V \wedge y \in V \}$$

- ▶ *adjazente Knoten*: durch eine Kante miteinander verbunden
- ▶ *Schlinge*
 - ▶ Kante mit identischen Start- und Zielknoten
 - ▶ formal ergibt sich $\{x, y\}$ mit $x = y$, also einfach $\{x\}$
- ▶ Graph ohne Schlingen heißt *schlingenfrei*

$U' = (V', E')$ ist *Teilgraph* eines ungerichteten Graphen $U = (V, E)$, wenn

- ▶ $V' \subseteq V$ und
- ▶ $E' \subseteq E \cap \{ \{x, y\} \mid x, y \in V' \}$.
- ▶ also
 - ▶ Knoten- bzw. Kantenmenge von G' muss Teilmenge von Knoten- bzw. Kantenmenge von G sein, und
 - ▶ die Endpunkte jeder Kante von E' müssen auch zu V' gehören.

- ▶ *Weg* in einem ungerichteten Graphen
 - ▶ nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^+$ von Knoten
 - ▶ wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$
- ▶ *Länge eines Weges*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- ▶ Wenn $p = (v_0, \dots, v_n)$ ein Weg ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- ▶ Weg $(v_0, \dots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
 - ▶ Die Knoten $v_0, \dots, v_{n-1}$ sind paarweise verschieden und
 - ▶ die Knoten $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise verschieden.
 - ▶ v_0 und v_n dürfen gleich sein

- ▶ *Weg* in einem ungerichteten Graphen
 - ▶ nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^+$ von Knoten
 - ▶ wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$
- ▶ *Länge eines Weges*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- ▶ Wenn $p = (v_0, \dots, v_n)$ ein Weg ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- ▶ Weg $(v_0, \dots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
 - ▶ Die Knoten $v_0, \dots, v_{n-1}$ sind paarweise verschieden und
 - ▶ die Knoten $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise verschieden.
 - ▶ v_0 und v_n dürfen gleich sein

- ▶ *Weg* in einem ungerichteten Graphen
 - ▶ nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^+$ von Knoten
 - ▶ wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$
- ▶ *Länge eines Weges*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- ▶ Wenn $p = (v_0, \dots, v_n)$ ein Weg ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- ▶ Weg $(v_0, \dots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
 - ▶ Die Knoten $v_0, \dots, v_{n-1}$ sind paarweise verschieden und
 - ▶ die Knoten $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise verschieden.
 - ▶ v_0 und v_n dürfen gleich sein

- ▶ *Weg* in einem ungerichteten Graphen
 - ▶ nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^+$ von Knoten
 - ▶ wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$
- ▶ *Länge eines Weges*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- ▶ Wenn $p = (v_0, \dots, v_n)$ ein Weg ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- ▶ Weg $(v_0, \dots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
 - ▶ Die Knoten $v_0, \dots, v_{n-1}$ sind paarweise verschieden und
 - ▶ die Knoten $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise verschieden.
 - ▶ v_0 und v_n dürfen gleich sein

- ▶ Im gerichteten Fall:
 - ▶ E binäre Relation auf V und
 - ▶ alle E^i und E^* definiert und mit anschaulicher Bedeutung
- ▶ Im ungerichteten Fall E keine binäre Relation schade; deshalb beheben wir diesen Mangel umgehend
- ▶ Zu Kantenmenge E eines ungerichteten Graphen $U = (V, E)$ definieren wir die *Kantenrelation* $E_g \subseteq V \times V$ vermöge:

$$E_g = \{(x, y) \mid \{x, y\} \in E\}.$$

- ▶ Damit haben wir eine Relation auf V , und folglich einen gerichteten Graphen $G = (V, E_g)$ mit der gleichen Knotenmenge V wie U , den *zu U gehörenden gerichteten Graphen*.
- ▶ Wenn in U Knoten x und y durch Kante verbunden sind, dann gibt es in G
 - ▶ Kante (x, y) von x nach y und
 - ▶ Kante (y, x) von y nach x (denn $\{x, y\} = \{y, x\}$).

- ▶ Im gerichteten Fall:
 - ▶ E binäre Relation auf V und
 - ▶ alle E^i und E^* definiert und mit anschaulicher Bedeutung
- ▶ Im ungerichteten Fall E keine binäre Relation schade; deshalb beheben wir diesen Mangel umgehend
- ▶ Zu Kantenmenge E eines ungerichteten Graphen $U = (V, E)$ definieren wir die **Kantenrelation** $E_g \subseteq V \times V$ vermöge:

$$E_g = \{(x, y) \mid \{x, y\} \in E\} .$$

- ▶ Damit haben wir eine Relation auf V , und folglich einen gerichteten Graphen $G = (V, E_g)$ mit der gleichen Knotenmenge V wie U , den *zu U gehörenden gerichteten Graphen*.
- ▶ Wenn in U Knoten x und y durch Kante verbunden sind, dann gibt es in G
 - ▶ Kante (x, y) von x nach y und
 - ▶ Kante (y, x) von y nach x (denn $\{x, y\} = \{y, x\}$).

- ▶ Im gerichteten Fall:
 - ▶ E binäre Relation auf V und
 - ▶ alle E^i und E^* definiert und mit anschaulicher Bedeutung
- ▶ Im ungerichteten Fall E keine binäre Relation schade; deshalb beheben wir diesen Mangel umgehend
- ▶ Zu Kantenmenge E eines ungerichteten Graphen $U = (V, E)$ definieren wir die **Kantenrelation** $E_g \subseteq V \times V$ vermöge:

$$E_g = \{(x, y) \mid \{x, y\} \in E\} .$$

- ▶ Damit haben wir eine Relation auf V , und folglich einen gerichteten Graphen $G = (V, E_g)$ mit der gleichen Knotenmenge V wie U , den **zu U gehörenden gerichteten Graphen**.
- ▶ Wenn in U Knoten x und y durch Kante verbunden sind, dann gibt es in G
 - ▶ Kante (x, y) von x nach y und
 - ▶ Kante (y, x) von y nach x (denn $\{x, y\} = \{y, x\}$).

- ▶ Im gerichteten Fall:
 - ▶ E binäre Relation auf V und
 - ▶ alle E^i und E^* definiert und mit anschaulicher Bedeutung
- ▶ Im ungerichteten Fall E keine binäre Relation schade; deshalb beheben wir diesen Mangel umgehend
- ▶ Zu Kantenmenge E eines ungerichteten Graphen $U = (V, E)$ definieren wir die **Kantenrelation** $E_g \subseteq V \times V$ vermöge:

$$E_g = \{(x, y) \mid \{x, y\} \in E\} .$$

- ▶ Damit haben wir eine Relation auf V , und folglich einen gerichteten Graphen $G = (V, E_g)$ mit der gleiche Knotenmenge V wie U , den **zu U gehörenden gerichteten Graphen**.
- ▶ Wenn in U Knoten x und y durch Kante verbunden sind, dann gibt es in G
 - ▶ Kante (x, y) von x nach y und
 - ▶ Kante (y, x) von y nach x (denn $\{x, y\} = \{y, x\}$).

- ▶ ungerichteter Graph (V, E) heißt *zusammenhängend*, wenn der zugehörige gerichtete Graph (V, E_g) streng zusammenhängend ist.

Beachte:

- ▶ Manchmal ist es bequem, von einem ungerichteten zu dem zugehörigen gerichteten Graphen überzugehen.
- ▶ (manchmal auch nicht!)

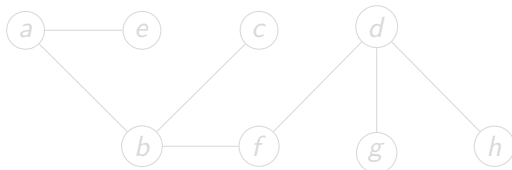
Nun umgekehrt

- ▶ Ist $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, dann definiere

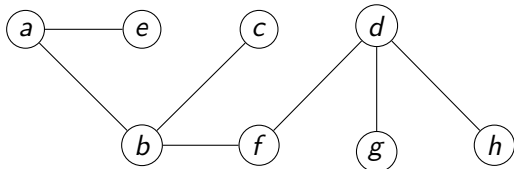
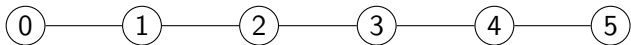
$$E_u = \{ \{x, y\} \mid (x, y) \in E \}$$

- ▶ nenne $U = (V, E_u)$ den *zu G gehörigen ungerichteten Graph*
- ▶ U entsteht aus G durch „Entfernen“ (oder „Vergessen“) der Pfeilspitzen

- ▶ ungerichteter Graph $U = (V, E)$ heißt ein (*ungerichteter*) *Baum*, wenn es einen gerichteten Baum $G = (V, E')$ gibt mit $E = E'_u$.
- ▶ Beispiele: zwei Bäume



- ▶ ungerichteter Graph $U = (V, E)$ heißt ein (*ungerichteter*) *Baum*, wenn es einen gerichteten Baum $G = (V, E')$ gibt mit $E = E'_u$.
- ▶ Beispiele: zwei Bäume



- ▶ Aus verschiedenen gerichteten Bäumen entsteht durch Weglassen der Pfeilspitzen der gleiche ungerichtete Baum.
- ▶ Im gerichteten Fall: Wurzel leicht zu identifizieren.
- ▶ im ungerichteten Fall:
 - ▶ Von jedem Knoten führt ein Weg zu jedem anderen Knoten.
 - ▶ Trotzdem ist manchmal „klar“, dass ein Knoten die ausgezeichnete Rolle als Wurzel spielt.
 - ▶ Im Zweifelsfall sagt man es eben explizit dazu.

- ▶ bei ungerichteten Graphen ein heikles Thema:
 - ▶ Was macht man mit Schlingen?
- ▶ Der *Grad* eines Knotens $x \in V$ in einem ungerichteten Graphen ist

$$d(x) = |\{y \mid y \neq x \wedge \{x, y\} \in E\}| + \begin{cases} 2 & \text{falls } \{x, x\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- ▶ Kantenrelation eines ungerichteten Graphen hat die Eigenschaft: Wenn $(x, y) \in E_g$, dann immer auch $(y, x) \in E_g$.
- ▶ So etwas kommt öfter vor und verdient einen Namen:
- ▶ Eine Relation $R \subseteq M \times M$ *symmetrisch*, wenn für alle $x \in M$ und $y \in M$ gilt:

$$(x, y) \in R \implies (y, x) \in R .$$

- ▶ Eine Relation, die
 - ▶ reflexiv,
 - ▶ transitiv und
 - ▶ symmetrischheißt *Äquivalenzrelation*.
- ▶ Beispiel: Isomorphie von Graphen

- ▶ Eine Relation, die
 - ▶ reflexiv,
 - ▶ transitiv und
 - ▶ symmetrischheißt *Äquivalenzrelation*.
- ▶ Beispiel: Isomorphie von Graphen

Das sollten Sie mitnehmen:

- ▶ ungerichtete Graphen:
 - ▶ Unterschiede zu gerichteten Graphen
 - ▶ Gemeinsamkeiten mit gerichteten Graphen

Das sollten Sie üben:

- ▶ Benutzung der Begriffe
- ▶ Malen von Graphen, hübsche und hässliche

Gerichtete Graphen

Graphen und Teilgraphen

Pfade und Erreichbarkeit

Isomorphie von Graphen

Ein Blick zurück auf Relationen

Ungerichtete Graphen

Übertragung der Grundbegriffe aus dem gerichteten Fall

Eine Anmerkung zu Relationen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

Gewichtete Graphen

- ▶ Manchmal beinhaltet die Graphstruktur nicht alle Informationen, die von Interesse sind.
 - ▶ bei Ableitungsbäumen: Symbole an den Knoten
 - ▶ bei Huffman-Bäumen: Symbole als Beschriftungen an den Kanten, Zahlen als Gewichte an den Knoten
 - ▶ ...
- ▶ Ein *knotenmarkierter Graph* ist ein Graph $G = (V, E)$ (gerichtet oder ungerichtet), bei dem zusätzlich
 - ▶ eine Menge M_V von *(Knoten-)Markierungen* und
 - ▶ eine *Markierungsfunktion* $m_V : V \rightarrow M_V$gegeben sind.
- ▶ Ein *kantenmarkierter Graph* ist ein Graph $G = (V, E)$ (gerichtet oder ungerichtet), bei dem zusätzlich
 - ▶ eine Menge M_E von *(Kanten-)Markierungen* und
 - ▶ eine *Markierungsfunktion* $m_E : E \rightarrow M_E$gegeben sind.

- ▶ Landkarte als Graph
 - ▶ Jeder Knoten entspricht einem Land.
 - ▶ Eine Kante verbindet zwei verschiedene Knoten, wenn die repräsentierten Länder „benachbart sind“, d. h. ein Stück gemeinsame Grenzen haben.
- ▶ Färbung der Landkarte:
 - ▶ benachbarte Länder in verschiedenen Farben gefärbt
- ▶ Färbung des Graphen:
 - ▶ adjazente Knoten haben verschiedenen Farben als Markierung
- ▶ Färbung $m_V : V \rightarrow M_V$ heißt *legal*, wenn gilt

$$\{x, y\} \in E \implies m_V(x) \neq m_V(y)$$

- ▶ Wieviele Farben braucht man für eine legale Färbung?
 - ▶ höchstens $|V|$
 - ▶ mindestens ?
 - ▶ dieses Problem taucht in Compilern wieder auf ...

- ▶ Landkarte als Graph
 - ▶ Jeder Knoten entspricht einem Land.
 - ▶ Eine Kante verbindet zwei verschiedene Knoten, wenn die repräsentierten Länder „benachbart sind“, d. h. ein Stück gemeinsame Grenzen haben.
- ▶ Färbung der Landkarte:
 - ▶ benachbarte Länder in verschiedenen Farben gefärbt
- ▶ Färbung des Graphen:
 - ▶ adjazente Knoten haben verschiedenen Farben als Markierung
- ▶ Färbung $m_V : V \rightarrow M_V$ heißt *legal*, wenn gilt

$$\{x, y\} \in E \implies m_V(x) \neq m_V(y)$$

- ▶ Wieviele Farben braucht man für eine legale Färbung?
 - ▶ höchstens $|V|$
 - ▶ mindestens ?
 - ▶ dieses Problem taucht in Compilern wieder auf ...

- ▶ Landkarte als Graph
 - ▶ Jeder Knoten entspricht einem Land.
 - ▶ Eine Kante verbindet zwei verschiedene Knoten, wenn die repräsentierten Länder „benachbart sind“, d. h. ein Stück gemeinsame Grenzen haben.
- ▶ Färbung der Landkarte:
 - ▶ benachbarte Länder in verschiedenen Farben gefärbt
- ▶ Färbung des Graphen:
 - ▶ adjazente Knoten haben verschiedenen Farben als Markierung
- ▶ Färbung $m_V : V \rightarrow M_V$ heißt *legal*, wenn gilt

$$\{x, y\} \in E \implies m_V(x) \neq m_V(y)$$

- ▶ Wieviele Farben braucht man für eine legale Färbung?
 - ▶ höchstens $|V|$
 - ▶ mindestens ?
 - ▶ dieses Problem taucht in Compilern wieder auf ...

- ▶ Landkarte als Graph
 - ▶ Jeder Knoten entspricht einem Land.
 - ▶ Eine Kante verbindet zwei verschiedene Knoten, wenn die repräsentierten Länder „benachbart sind“, d. h. ein Stück gemeinsame Grenzen haben.
- ▶ Färbung der Landkarte:
 - ▶ benachbarte Länder in verschiedenen Farben gefärbt
- ▶ Färbung des Graphen:
 - ▶ adjazente Knoten haben verschiedenen Farben als Markierung
- ▶ Färbung $m_V : V \rightarrow M_V$ heißt *legal*, wenn gilt

$$\{x, y\} \in E \implies m_V(x) \neq m_V(y)$$

- ▶ Wieviele Farben braucht man für eine legale Färbung?
 - ▶ höchstens $|V|$
 - ▶ mindestens ?
 - ▶ dieses Problem taucht in Compilern wieder auf ...

Wenn die Knoten- oder Kantenmarkierungen Zahlen sind, dann spricht man auch von *gewichteten* Graphen.

Beispiele für kantengewichtete Graphen:

- ▶ Verkehrsnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Entfernungen
 - ▶ Problem: finde kürzesten Weg von x nach y
 - ▶ Problem: finde kürzeste Rundreise (einfachen Zyklus)
- ▶ Kabelnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Baukosten
 - ▶ Problem: finde billigste Möglichkeit, „alle miteinander“ zu verbinden
- ▶ Rohrleitungsnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Rohrquerschnitte
 - ▶ Problem: finde maximal möglichen Fluss von x nach y

Wenn die Knoten- oder Kantenmarkierungen Zahlen sind, dann spricht man auch von *gewichteten* Graphen.

Beispiele für kantengewichtete Graphen:

- ▶ Verkehrsnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Entfernungen
 - ▶ Problem: finde kürzesten Weg von x nach y
 - ▶ Problem: finde kürzeste Rundreise (einfachen Zyklus)
- ▶ Kabelnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Baukosten
 - ▶ Problem: finde billigste Möglichkeit, „alle miteinander“ zu verbinden
- ▶ Rohrleitungsnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Rohrquerschnitte
 - ▶ Problem: finde maximal möglichen Fluss von x nach y

Wenn die Knoten- oder Kantenmarkierungen Zahlen sind, dann spricht man auch von *gewichteten* Graphen.

Beispiele für kantengewichtete Graphen:

- ▶ Verkehrsnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Entfernungen
 - ▶ Problem: finde kürzesten Weg von x nach y
 - ▶ Problem: finde kürzeste Rundreise (einfachen Zyklus)
- ▶ Kabelnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Baukosten
 - ▶ Problem: finde billigste Möglichkeit, „alle miteinander“ zu verbinden
- ▶ Rohrleitungsnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Rohrquerschnitte
 - ▶ Problem: finde maximal möglichen Fluss von x nach y

Wenn die Knoten- oder Kantenmarkierungen Zahlen sind, dann spricht man auch von *gewichteten* Graphen.

Beispiele für kantengewichtete Graphen:

- ▶ Verkehrsnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Entfernungen
 - ▶ Problem: finde kürzesten Weg von x nach y
 - ▶ Problem: finde kürzeste Rundreise (einfachen Zyklus)
- ▶ Kabelnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Baukosten
 - ▶ Problem: finde billigste Möglichkeit, „alle miteinander“ zu verbinden
- ▶ Rohrleitungsnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Rohrquerschnitte
 - ▶ Problem: finde maximal möglichen Fluss von x nach y

Das sollten Sie mitnehmen:

- ▶ vielfältige Beispiele für Knoten- und Kantenmarkierungen
- ▶ man stößt leicht auf diverse Optimierungsprobleme

Das sollten Sie üben:

- ▶ an einfachen Beispielen Optimierungen versuchen (leicht? schwer?)

- ▶ gerichtete und ungerichtete Graphen
 - ▶ wichtige Begriffe (Pfad, Zyklus, Baum, ...)
 - ▶ Gemeinsamkeiten und Unterschiede
- ▶ Relationen
 - ▶ symmetrische Relationen
 - ▶ Äquivalenzrelationen