

Grundbegriffe der Informatik

Einheit 17: Relationen

Thomas Worsch

Universität Karlsruhe, Fakultät für Informatik

Wintersemester 2008/2009

Äquivalenzrelationen

- Definition

- Äquivalenzrelationen von Nerode

- Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

- Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

- Wohldefiniertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Ordnungen

Äquivalenzrelationen

Definition

Äquivalenzrelationen von Nerode

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

Wohldefiniertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Ordnungen



Äquivalenzrelationen

Definition

Äquivalenzrelationen von Nerode

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

Wohldefiniertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Ordnungen

- ▶ Eine *Äquivalenzrelation* ist eine Relation $R \subseteq M \times M$ auf einer Menge M , die
 - ▶ reflexiv,
 - ▶ symmetrisch und
 - ▶ transitiv

ist.

- ▶ typischerweise
 - ▶ Notation $\equiv$, $\sim$, $\approx$, oder ähnlich
 - ▶ Infixschreibweise
- ▶ also
 - ▶ $\forall x \in M : x \equiv x$,
 - ▶ $\forall x \in M : \forall y \in M : x \equiv y \implies y \equiv x$
 - ▶ $\forall x \in M : \forall y \in M : \forall z \in M : x \equiv y \wedge y \equiv z \implies x \equiv z$

$\text{Id} = \{(x, x) \mid x \in M\}$ ist Äquivalenzrelation (für jede Menge M),
denn

- ▶ $\forall x \in M : x = x$,
- ▶ $\forall x \in M : \forall y \in M : x = y \implies y = x$
- ▶ $\forall x \in M : \forall y \in M : \forall z \in M : x = y \wedge y = z \implies x = z$

Wichtiges Beispiel: Kongruenz modulo n

- ▶ Es sei $n \in \mathbb{N}_+$.
- ▶ $x, y \in \mathbb{Z}$ heißen *kongruent modulo n* , wenn
 - ▶ die Differenz $x - y$ durch n teilbar,
 - ▶ also ein ganzzahliges Vielfaches von n , ist.
- ▶ Schreibweise $x \equiv y \pmod{n}$
- ▶ Das sind Äquivalenzrelationen, denn
 - ▶ Reflexivität: $x - x = 0$ ist Vielfaches von n
 - ▶ Symmetrie: mit $x - y$ ist auch $y - x = -(x - y)$ Vielfaches von n
 - ▶ Transitivität:
 - ▶ Wenn $x - y = k_1 n$ und $y - z = k_2 n$ (mit $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$),
 - ▶ dann auch $x - z = (x - y) + (y - z) = (k_1 + k_2)n$ ganzzahliges Vielfaches von n

Äquivalenzrelationen

Definition

Äquivalenzrelationen von Nerode

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

Wohldefiniertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Ordnungen

- ▶ durchgehendes Beispiel
- ▶ $L \subseteq A^*$ beliebige formale Sprache
- ▶ *Äquivalenzrelation von Nerode* $\equiv_L$ auf der Menge A^* aller Wörter so definiert: für alle $w_1, w_2 \in A^*$ ist

$$w_1 \equiv_L w_2 \iff (\forall w \in A^* : w_1 w \in L \iff w_2 w \in L)$$

- ▶ das muss man erfahrungsgemäß mehrfach lesen
- ▶ w_1 und w_2 genau dann äquivalent, wenn gilt:
Gleich, welches Wort $w \in A^*$ man die beiden anhängt, immer sind entweder beide, $w_1 w$ und $w_2 w$, in L , oder keines. Aber ist eines in L und das andere nicht.
- ▶ Anders gesagt: w_1 und w_2 genau dann *nicht* $\equiv_L$ -äquivalent, wenn es ein Wort $w \in A^*$ gibt, so dass genau eines der Wörter $w_1 w$ und $w_2 w$ in L liegt, aber das andere nicht.

- ▶ betrachte das leere Wort $w = \varepsilon$
- ▶ wenn $w_1 \equiv_L w_2$
- ▶ dann beide Wörter $w_1 w$ und $w_2 w$ in L oder beide nicht in L
- ▶ also beide Wörter w_1 und w_2 in L oder beide nicht in L

- ▶ $A = \{a, b\}$
- ▶ $L = \langle a*b* \rangle \subset A^*$
alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort **ba** vorkommt
- ▶ Beispiele:
 1. $w_1 = \text{aaa}$ und $w_2 = a$
 - ▶ Hängt man an beide Wörter ein $w \in \langle a* \rangle$ an, dann sind sowohl $w_1 w$ als auch $w_2 w$ in L .
 - ▶ Hängt man ein $w \in \langle a*bb* \rangle$ an, dann sind sowohl $w_1 w$ als auch $w_2 w$ in L .
 - ▶ Hängt man ein w an, das **ba** enthält, dann sind also beide nicht in L .
 - ▶ Andere Möglichkeiten für w gibt es nicht, also sind die beiden Wörter $\equiv_L$ -äquivalent.
 2. $w_1 = \text{aaab}$ und $w_2 = \text{abb}$
 3. $w_1 = \text{aa}$ und $w_2 = \text{abb}$
 4. $w_1 = \text{aba}$ und $w_2 = \text{babb}$
 5. $w_1 = \text{ab}$ und $w_2 = \text{ba}$

- ▶ $A = \{a, b\}$
- ▶ $L = \langle a*b* \rangle \subset A^*$
alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort ba vorkommt
- ▶ Beispiele:
 1. $w_1 = aaa$ und $w_2 = a$: äquivalent
 2. $w_1 = aaab$ und $w_2 = abb$
 - ▶ Hängt man ein $w \in \langle b* \rangle$ an,
dann sind sowohl $w_1 w$ als auch $w_2 w$ in L .
 - ▶ Hängt man ein w an, das ein a enthält,
dann sind also beide nicht in L .
 - ▶ Andere Möglichkeiten gibt es nicht,
also sind die beiden Wörter $\equiv_L$ -äquivalent.
 3. $w_1 = aa$ und $w_2 = abb$
 4. $w_1 = aba$ und $w_2 = babb$
 5. $w_1 = ab$ und $w_2 = ba$

- ▶ $A = \{a, b\}$
- ▶ $L = \langle a^*b^* \rangle \subset A^*$
alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort ba vorkommt
- ▶ Beispiele:
 1. $w_1 = aaa$ und $w_2 = a$: äquivalent
 2. $w_1 = aaab$ und $w_2 = abb$: äquivalent
 3. $w_1 = aa$ und $w_2 = abb$
 - ▶ Hängt man $w = a$ an,
dann ist zwar $w_1w = aaa \in L$, aber $w_2w = abba \notin L$.
 - ▶ Also sind die beiden Wörter *nicht* $\equiv_L$ -äquivalent.
 4. $w_1 = aba$ und $w_2 = babb$
 5. $w_1 = ab$ und $w_2 = ba$

► $A = \{a, b\}$

► $L = \langle a^*b^* \rangle \subset A^*$

alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort ba vorkommt

► Beispiele:

1. $w_1 = aaa$ und $w_2 = a$: äquivalent

2. $w_1 = aaab$ und $w_2 = abb$: äquivalent

3. $w_1 = aa$ und $w_2 = abb$: nicht äquivalent

4. $w_1 = aba$ und $w_2 = babb$

► Beide ba . Egal was man anhängt, es bleibt so, d. h.
immer sind $w_1w \notin L$ und $w_2w \notin L$.

► Also sind die beiden Wörter $\equiv_L$ -äquivalent.

5. $w_1 = ab$ und $w_2 = ba$

- ▶ $A = \{a, b\}$
- ▶ $L = \langle a^*b^* \rangle \subset A^*$
alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort ba vorkommt
- ▶ Beispiele:
 1. $w_1 = aaa$ und $w_2 = a$: äquivalent
 2. $w_1 = aaab$ und $w_2 = abb$: äquivalent
 3. $w_1 = aa$ und $w_2 = abb$: nicht äquivalent
 4. $w_1 = aba$ und $w_2 = babb$: äquivalent
 5. $w_1 = ab$ und $w_2 = ba$
 - ▶ Da $w_1 \in L$, aber $w_2 \notin L$,
zeigt $w = \varepsilon$, dass die beiden nicht $\equiv_L$ -äquivalent sind.

- ▶ $A = \{a, b\}$
- ▶ $L = \langle a^*b^* \rangle \subset A^*$
alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort ba vorkommt
- ▶ Beispiele:
 1. $w_1 = aaa$ und $w_2 = a$: äquivalent
 2. $w_1 = aaab$ und $w_2 = abb$: äquivalent
 3. $w_1 = aa$ und $w_2 = abb$: nicht äquivalent
 4. $w_1 = aba$ und $w_2 = babb$: äquivalent
 5. $w_1 = ab$ und $w_2 = ba$: nicht äquivalent

Lemma

Für jede formale Sprache L ist $\equiv_L$ eine Äquivalenzrelation.

Beweis

prüfe alle drei Eigenschaften:

- ▶ Reflexivität: Ist $w_1 \in A^*$, dann gilt für jedes $w \in A^*$ offensichtlich: $w_1 w \in L \iff w_1 w \in L$.
- ▶ Symmetrie: Für $w_1, w_2 \in A^*$ und alle $w \in A^*$ gelte: $w_1 w \in L \iff w_2 w \in L$. Dann gilt offensichtlich auch immer $w_2 w \in L \iff w_1 w \in L$.
- ▶ Transitivität: Es seien $w_1, w_2, w_3 \in A^*$ und es möge gelten

$$\forall w \in A^* : w_1 w \in L \iff w_2 w \in L \quad (1)$$

$$\forall w \in A^* : w_2 w \in L \iff w_3 w \in L \quad (2)$$

Zeige: $\forall w \in A^* : w_1 w \in L \iff w_3 w \in L$

Äquivalenzrelationen

Definition

Äquivalenzrelationen von Nerode

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

Wohldefiniertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Ordnungen

- ▶ *Äquivalenzklasse* von $x \in M$ ist $\{y \in M \mid x \equiv y\}$
- ▶ Schreibweise $[x]_{\equiv}$ oder einfach $[x]$, falls $\equiv$ klar ist
- ▶ *Faktormenge* (oder *Faserung*) von M nach $\equiv$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen.
- ▶ Schreibweise $M/_\equiv = \{[x]_{\equiv} \mid x \in M\}$

- ▶ manchmal
- ▶ Beispiel: $\equiv_L$ für $L = \langle a^*b^* \rangle$
- ▶ genauere Betrachtung der Argumentation von vorhin zeigt:
 - ▶ jedes Wort zu genau einem der Wörter ε , b und ba äquivalent
 - ▶ Also: $A^*_{/\equiv_L}$ besteht aus drei Äquivalenzklassen:
 - ▶ $[\varepsilon] = \langle a^* \rangle$
 - ▶ $[b] = \langle a^*bb^* \rangle$
 - ▶ $[ba] = \langle a^*bb^*a(a|b)^* \rangle$
- ▶ Wahl der Repräsentanten willkürlich; hätten auch schreiben können:
 - ▶ $[aaaaa] = \langle a^* \rangle$
 - ▶ $[aabbbbbb] = \langle a^*bb^* \rangle$
 - ▶ $[aabbaabbbba] = \langle a^*bb^*a(a|b)^* \rangle$

- ▶ durch L induzierte Nerode-Äquivalenz kann auch unendlich viele Äquivalenzklassen haben
- ▶ Beispiel betrachte man

$$L = \{a^k b^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}.$$

- ▶ Ist $k \neq m$, dann sind $w_1 = a^k$ und $w_2 = a^m$ nicht äquivalent
- ▶ wie man durch Anhängen von $w = b^k$ sieht:
 - ▶ $w_1 w = a^k b^k \in L$, aber
 - ▶ $w_2 w = a^m b^k \notin L$.
- ▶ Also zumindest jedes Wort a^k , $k \in \mathbb{N}_0$ in einer anderen Äquivalenzklasse.
- ▶ Jede dieser Äquivalenzklassen ist aber übrigens unendlich groß, denn

$$[a^k]_{\equiv_L} = \{a^x b^y \mid x, y \in \mathbb{N}_0 \wedge x - y = k\}$$

- ▶ Für die reguläre Sprache $L_1 = \langle \mathbf{a*b*} \rangle$
hat $\equiv_L$ endlich viele Äquivalenzklassen.
- ▶ Für die nicht reguläre Sprache $L_2 = \{\mathbf{a^k b^k} \mid k \in \mathbb{N}_0\}$
hat $\equiv_L$ unendlich viele Äquivalenzklassen.
- ▶ Für L_1 gibt es einen endlichen Akzeptor,
- ▶ für L_2 gibt es keinen.

Das sollten Sie mitnehmen:

- ▶ Äquivalenzrelationen
- ▶ Beispiel Nerode-Äquivalenzen

Das sollten Sie üben:

- ▶ definierenden Eigenschaften überprüfen
- ▶ Anzahl Äquivalenzklassen bestimmen

Äquivalenzrelationen

- Definition

- Äquivalenzrelationen von Nerode

- Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

- Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

- Wohldefiniertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Ordnungen

- ▶ Beispiel: Kongruenz modulo n auf additiver Gruppe $\mathbb{Z}$ (oder Ring $\mathbb{Z}$)
- ▶ Frage: Wie ändern sich Funktionswerte, wenn man Argumente durch äquivalente ersetzt?

Äquivalenzrelationen

Definition

Äquivalenzrelationen von Nerode

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

Wohldefiniertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Ordnungen

- ▶ Sei $\equiv$ Äquivalenzrelation auf M und $f : M \rightarrow M$ eine Abbildung.
- ▶ $\equiv$ ist mit f *verträglich*, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:

$$x_1 \equiv x_2 \implies f(x_1) \equiv f(x_2) .$$

- ▶ Sei $\equiv$ Äquivalenzrelation auf M und $\square$ eine binäre Operation Menge M .
- ▶ $\equiv$ ist mit $\square$ *verträglich*, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ und alle $y_1, y_2 \in M$ gilt:

$$x_1 \equiv x_2 \wedge y_1 \equiv y_2 \implies x_1 \square y_1 \equiv x_2 \square y_2 .$$

- ▶ Äquivalenz „modulo n “.
- ▶ Diese Relationen sind mit Addition, Subtraktion und Multiplikation verträglich.
- ▶ Beispiel: ist

$$\begin{array}{ll} x_1 \equiv x_2 \pmod{n} & \text{also } x_1 - x_2 = kn \\ \text{und } y_1 \equiv y_2 \pmod{n} & \text{also } y_1 - y_2 = mn \end{array}$$

dann auch

$$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (k + m)n .$$

mit anderen Worten

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n} .$$

- ▶ Sei $w' \in A^*$ beliebig.
- ▶ Sei $f_{w'} : A^* \rightarrow A^*$ die Abbildung, die w' anhängt, also $f_{w'}(v) = vw'$.
- ▶ Behauptung: $\equiv_L$ ist mit $f_{w'}$ verträglich ist, d. h.:

$$\forall w_1, w_2 \in A^* : w_1 \equiv_L w_2 \implies w_1 w' \equiv_L w_2 w'$$

- ▶ Zeige: Wenn $w_1 \equiv_L w_2$ ist, dann ist auch $w_1 w' \equiv_L w_2 w'$.
- ▶ Also: für *alle* $w \in A^*$ gelte $w_1 w \in L \iff w_2 w \in L$.
- ▶ Zeige: für alle $v \in A^*$ gilt: $(w_1 w')v \in L \iff (w_2 w')v \in L$.
für beliebiges $v \in A^*$ gilt:

$$\begin{aligned}(w_1 w')v \in L &\iff w_1(w'v) \in L \\ &\iff w_2(w'v) \in L && \text{weil } w_1 \equiv_L w_2 \\ &\iff (w_2 w')v \in L .\end{aligned}$$

Eine Äquivalenzrelation, die mit allen gerade interessierenden Funktionen oder/und Operationen verträglich ist, nennt man auch eine *Kongruenzrelation*.

Äquivalenzrelationen

Definition

Äquivalenzrelationen von Nerode

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

Wohldefiniertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Ordnungen

Eine Abbildung für Nerode-Äquivalenzklassen (1)

- ▶ L eine beliebige formale Sprache $L \subseteq A^*$.
- ▶ für jedes $x \in A$ ist die Abbildung $f_x : A^* \rightarrow A^* : w \mapsto wx$ mit $\equiv_L$ verträglich.
- ▶ Wir schreiben nun einmal hin:

$$f'_x : A^*_{/\equiv_L} \rightarrow A^*_{/\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

- ▶ Ist das in Ordnung?
- ▶ Huch? Wo kann ein Problem sein?

Eine Abbildung für Nerode-Äquivalenzklassen (1)

- ▶ L eine beliebige formale Sprache $L \subseteq A^*$.
- ▶ für jedes $x \in A$ ist die Abbildung $f_x : A^* \rightarrow A^* : w \mapsto wx$ mit $\equiv_L$ verträglich.
- ▶ Wir schreiben nun einmal hin:

$$f'_x : A^*_{/\equiv_L} \rightarrow A^*_{/\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

- ▶ Ist das in Ordnung?
- ▶ Huch? Wo kann ein Problem sein?

Eine Abbildung für Nerode-Äquivalenzklassen (2)

- ▶ Versuch Abbildung zu definieren, die Äquivalenzklasse auf Äquivalenzklasse abbildet.
- ▶ Aber $[w]$ enthält ja im allgemeinen nicht nur w , sondern noch viele andere Wörter.
- ▶ Zum Beispiel hatten wir uns weiter vorne überlegt, dass im Fall $L = \langle \mathbf{a*b*} \rangle$ die Wörter ε , $\mathbf{a}$, $\mathbf{a^2}$, $\mathbf{a^3}$, usw. alle in einer Äquivalenzklasse liegen.
- ▶ also $[\varepsilon] = [\mathbf{a}] = [\mathbf{a^2}] = \dots$.
- ▶ damit $[w] \mapsto [wx]$ wirklich eine Definition ist, die für jedes Argument **eindeutig** einen Funktionswert festlegt,
- ▶ sollte bitte auch $[\varepsilon x] = [\mathbf{a}x] = [\mathbf{a^2}x] = \dots$ sein.
- ▶ Aha: Das sichert gerade die Verträglichkeitsbedingung zu!

$$w_1 \equiv_L w_2 \implies w_1x \equiv_L w_2x$$

$$\text{also } w_1 \equiv_L w_2 \implies f_x(w_1) \equiv_L f_x(w_2)$$

$$\text{also } [w_1] = [w_2] \implies [f_x(w_1)] = [f_x(w_2)]$$

Allgemein gilt: Wenn $\equiv$ mit $f : M \rightarrow M$ verträglich ist, dann ist

$$f' : M_{/\equiv} \rightarrow M_{/\equiv} : f'([x]) = [f(x)]$$

wohldefiniert.

Ein letzter Blick auf die Nerode-Äquivalenzen (1)

- ▶ sei L eine formale Sprache, für die $\equiv_L$ nur endlich viele Äquivalenzklassen hat.
- ▶ schreibe abkürzend $Z = A^*_{/\equiv_L}$
- ▶ definiere

$$f : Z \times A \rightarrow Z : f([w], x) = [wx]$$

- ▶ Diese Abbildung ist wohldefiniert.
- ▶ Die Erinnerung an endliche Akzeptoren ist kein Zufall.
- ▶ Legt man nämlich noch fest
 - ▶ $z_0 = [\varepsilon]$ und
 - ▶ $F = \{[w] \mid w \in L\}$
- ▶ dann hat man einen endlichen Akzeptor, der genau L erkennt.
- ▶ Überlegen Sie sich das!

Ohne Beweis nehme man bitte noch zu Kenntnis:

- ▶ Für jede reguläre Sprache hat $\equiv_L$ nur endlich viele Äquivalenzklassen.
- ▶ Der gerade konstruierte Akzeptor ist unter allen, die L erkennen, einer mit minimaler Zustandszahl.
- ▶ Dieser endliche Akzeptor ist bis auf Isomorphie (also Umbenennung von Zuständen) sogar eindeutig.

Das sollten Sie mitnehmen:

- ▶ Kongruenzrelationen: Verträglichkeit
- ▶ induzierte Abbildungen/Operationen für Äquivalenzklassen
- ▶ Nerode-Äquivalenzen liefern minimale Akzeptoren

Das sollten Sie üben:

- ▶ mit Äquivalenzklassen rechnen

Äquivalenzrelationen

- Definition

- Äquivalenzrelationen von Nerode

- Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

- Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

- Wohldefiniertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Ordnungen

Äquivalenzrelationen

- Definition

- Äquivalenzrelationen von Nerode

- Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

- Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

- Wohldefiniertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Ordnungen