

Grundbegriffe der Informatik

Einheit 3: Alphabete, Abbildungen, Aussagenlogik

Thomas Worsch

Karlsruher Institut für Technologie, Fakultät für Informatik

Wintersemester 2010/2011

Alphabete

ASCII

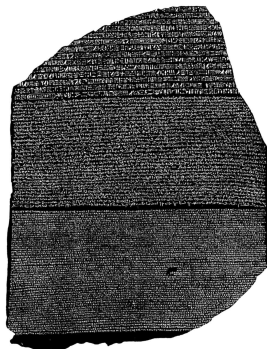
Unicode

Relationen und Funktionen

Logisches



J.-F. Champollion
1790 – 1832



Rosetta-Stein
196 v. Chr.

wesentliche Beiträge zur Entzifferung der ägyptischen Hieroglyphen

Bildquellen: http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Jean-Francois_Champollion_2.jpg
<http://www.gutenberg.org/files/16352/16352-h/images/p1.jpg>

Alphabete

ASCII

Unicode

Relationen und Funktionen

Logisches

- ▶ Ein *Alphabet* ist eine endliche nichtleere Menge sogenannter *Zeichen* oder *Symbole*.
- ▶ Was ist ein „Zeichen“?
 - ▶ Wir tun so, als wüssten wir das:
 - ▶ elementare Bausteine, aus denen Inschriften zusammengesetzt sind
- ▶ Beispiele:
 - ▶ $A = \{ | \}$
 - ▶ $A = \{ a, b, c \}$
 - ▶ $A = \{ 0, 1 \}$
 - ▶ Manchmal erfindet man auch Zeichen: $A = \{ 1, 0, \text{I} \}$
 - ▶ $A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F \}$
- ▶ Gelegentlich etwas abstrakterer Standpunkt: Jeder der folgenden „Kästen“ soll jeweils *ein* Zeichen eines gewissen Alphabetes sein: `int` `adams` `=` `42` `;`

Alphabete

ASCII

Unicode

Relationen und Funktionen

Logisches

- ▶ ASCII: *American Standard Code for Information Interchange*.
- ▶ umfasst insbesondere eine Liste von 94 „druckbaren“ und einem „unsichtbaren“ Zeichen
- ▶ es fehlen Buchstaben aus nichtenglischen Alphabeten, z. B. ä, ç, è, ğ, ñ, œ, ß, û usw., von Kyrillisch, Japanisch, ... ganz zu schweigen.

- ▶ Jedes „druckbare“ Zeichen hat eine Nummer aus dem Bereich der natürlichen Zahlen zwischen 32 und 126.
- ▶ Beachte: das „Leerzeichen“ `␣`

		40	(	50	2	60	<	70	F
		41	)	51	3	61	=	71	G
32	␣	42	*	52	4	62	>	72	H
33	!	43	+	53	5	63	?	73	I
34	"	44	,	54	6	64	@	74	J
35	#	45	-	55	7	65	A	75	K
⋮									⋮
84	T	94	~	104	h	114	r	124	
85	U	95	_	105	i	115	s	125	}
86	V	96	'	106	j	116	t	126	~
87	W	97	a	107	k	117	u		
88	X	98	b	108	l	118	v		
89	Y	99	c	109	m	119	w		

- ▶ syntaktischer Aufbau spezifiziert in RFC 2822
<http://tools.ietf.org/html/rfc2822>
- ▶ Nur die Zeichen des ASCII-Zeichensatzes erlaubt.
- ▶ Was ist mit Umlauten oder anderen Zeichen, die *keine* ASCII-Zeichen sind?
- ▶ Wie das geht, werden wir in dem Kapitel über Codierungen sehen ...

- ▶ syntaktischer Aufbau spezifiziert in RFC 2822
<http://tools.ietf.org/html/rfc2822>
- ▶ Nur die Zeichen des ASCII-Zeichensatzes erlaubt.
- ▶ Was ist mit Umlauten oder anderen Zeichen, die *keine* ASCII-Zeichen sind?
- ▶ Wie das geht, werden wir in dem Kapitel über Codierungen sehen ...

Alphabete

ASCII

Unicode

Relationen und Funktionen

Logisches

- ▶ Unicode: <http://www.unicode.org>
- ▶ Der Unicode-Standard definiert viele Dinge
- ▶ im Zentrum: ein *sehr großes* Alphabet
 - ▶ rund 100 000 Zeichen
 - ▶ siehe <http://www.unicode.org/charts/>
- ▶ weitere Aspekte:
 - ▶ Jedes Zeichen hat einen Namen. Z. B.
„LATIN SMALL LETTER C WITH CEDILLA“ für ç
 - ▶ Sortierreihenfolge von Buchstaben
(im Schwedischen: ö *nach* z, im Deutschen: ö *vor* z)
 - ▶ Zuordnung von Groß- zu Kleinbuchstaben und umgekehrt
 - ▶ und vieles mehr ...

- ▶ Es wird ein Alphabet A_U festgelegt, und
- ▶ eine Nummerierung dieser Zeichen
Jedenfalls in einem gewissen Sinne:
 - ▶ Jedem Zeichen aus A_U ist eine nichtnegative ganze Zahl zugeordnet, der *Code Point* des Zeichens.
 - ▶ Die Liste der benutzten Code Points ist aber nicht „zusammenhängend“.
- ▶ Es liegt eine Beziehung zwischen Unicode-Zeichen und nichtnegativen ganzen Zahlen vor.
- ▶ Man spricht von einer Relation.
- ▶ Womit wir bei ein bisschen Mathematik wären ...

Alphabete

ASCII

Unicode

Relationen und Funktionen

Logisches

- ▶ Wie kann man die Beziehung zwischen Unicode-Zeichen in A_U und nichtnegativen ganzen Zahlen beschreiben?
- ▶ Z. B. durch die Angabe aller Paare (a, n) , für die $a \in A_U$ ist und n der zu a gehörenden Code Point
- ▶ Für die Menge U aller dieser Paare gilt: $U \subseteq A_U \times \mathbb{N}_0$.
- ▶ *kartesisches Produkt* $A \times B$ der Mengen A und B :
Das ist die Menge *aller* Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

- ▶ Eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$ heißt auch eine *Relation* oder genauer *binäre Relation* von A in B .
- ▶ Beispiele:

$$(\text{A}, 65) \in U \quad \text{aber} \quad (\text{B}, 4711) \notin U$$

Die Unicoderelation $U \subseteq A_U \times \mathbb{N}_0$ hat zusätzliche „schöne“ Eigenschaften:

- ▶ Für jedes Zeichen $a \in A_U$ existiert (mindestens) ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $(a, n) \in U$.
 $R \subseteq A \times B$ heißt *linkstotal*, wenn für jedes $a \in A$ ein $b \in B$ existiert mit $(a, b) \in R$.
- ▶ Für kein Zeichen $a \in A_U$ gibt es mehrere $n \in \mathbb{N}_0$ mit der Eigenschaft $(a, n) \in U$.
 $R \subseteq A \times B$ heißt *rechtseindeutig*, wenn es für kein $a \in A$ zwei $b_1 \in B$ und $b_2 \in B$ mit $b_1 \neq b_2$ gibt, so dass sowohl $(a, b_1) \in R$ als auch $(a, b_2) \in R$ ist.
- ▶ Relationen, die linkstotal und rechtseindeutig sind, heißen *Abbildungen* oder *Funktionen*. Schreibweise $R : A \rightarrow B$.
- ▶ Gelegentlich (in einem der letzten Kapitel) betrachtet man *partielle Funktionen*: man verzichtet auf die Linkstotalität und fordert nur Rechtseindeutigkeit.

- ▶ Bei Unicode gibt es keine zwei verschiedene Zeichen a_1 und a_2 , denen der gleiche Code Point zugeordnet ist.

$R \subseteq A \times B$ heißt *linkseindeutig*, wenn für alle $(a_1, b_1) \in R$ und alle $(a_2, b_2) \in R$ gilt:

$$\text{wenn } a_1 \neq a_2, \text{ dann } b_1 \neq b_2 .$$

- ▶ Eine Abbildung, die linkseindeutig ist, heißt *injektiv*.
- ▶ $R \subseteq A \times B$ heißt *rechtstotal*, wenn für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ existiert, für das $(a, b) \in R$ ist.
- ▶ Eine Abbildung, die rechtstotal ist, heißt *surjektiv*.
- ▶ Eine Abbildung, die sowohl injektiv als auch surjektiv ist, heißt *bijektiv*.

Beachte

($\mathbb{R}_0^+$ sei die Menge der nicht negativen reellen Zahlen)

- ▶ Um die Injektivität einer Abbildung $f : A \rightarrow B$ beurteilen zu können, muss man A kennen:
 - ▶ $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto x^2$ ist injektiv, aber
 - ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv
- ▶ Um die Surjektivität einer Abbildung $f : A \rightarrow B$ beurteilen zu können, muss man B kennen:
 - ▶ $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto x^2$ ist surjektiv, aber
 - ▶ $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist nicht surjektiv
- ▶ **generell:** Zu einer Abbildung gehört nicht nur die Abbildungsvorschrift, sondern auch
 - ▶ der Definitionsbereich A und
 - ▶ der Zielbereich B

Alphabete

ASCII

Unicode

Relationen und Funktionen

Logisches

- ▶ „Die Abbildung $U : A_U \rightarrow \mathbb{N}_0$ ist injektiv.“
Das ist eine Aussage. Sie ist *wahr*.
- ▶ „Die Abbildung $U : A_U \rightarrow \mathbb{N}_0$ ist surjektiv.“
Das ist auch eine Aussage. Sie ist *falsch*.
- ▶ Aussagen sind Sätze, die „objektiv“ wahr oder falsch sind.
Dazu braucht man eine Interpretation der Zeichen, aus denen die zu Grunde liegende Nachricht zusammengesetzt ist.
- ▶ Wir bauen ganz massiv darauf, dass es keine Missverständnisse durch unterschiedliche Interpretationsmöglichkeiten gibt.
Was ist $\mathbb{N}$? Enthält es die 0?
- ▶ Manche umgangssprachlichen Sätze sind nicht wahr oder falsch, sondern sinnlos:
*„Ein Barbier ist ein Mann, der genau die Männer rasiert,
die sich nicht selbst rasieren.“*
Rasiert sich ein Barbier selbst . . . ?

Häufig setzt man aus einfachen Aussagen ($\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$) kompliziertere auf eine der folgenden Arten zusammen:

logische Negation: „Nicht $\mathcal{A}$ “

kurz $\neg \mathcal{A}$.

logisches Und: „ $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ “

kurz $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$.

logisches Oder: „ $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$ “

kurz $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.

logische Implikation: „Wenn $\mathcal{A}$, dann $\mathcal{B}$ “

kurz $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

- ▶ Ob eine so zusammengesetzte Aussage wahr oder falsch ist, hängt dabei *nicht* vom konkreten Inhalt der Aussagen ab!
- ▶ Wesentlich ist nur, welche Wahrheitswerte die Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ haben.

► *aussagenlogische Formel*

- nach obigen Regeln zusammengesetzt und
- statt elementarer Aussagen einfach *Aussagevariablen*,
- die als Werte „wahr“ und „falsch“ annehmen können.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	wahr	falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr	falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch	falsch	wahr	falsch
wahr	wahr	falsch	wahr	wahr	wahr

► *aussagenlogische Formel*

- nach obigen Regeln zusammengesetzt und
- statt elementarer Aussagen einfach *Aussagevariablen*,
- die als Werte „wahr“ und „falsch“ annehmen können.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	wahr	falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr	falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch	falsch	wahr	falsch
wahr	wahr	falsch	wahr	wahr	wahr

► *aussagenlogische Formel*

- nach obigen Regeln zusammengesetzt und
- statt elementarer Aussagen einfach *Aussagevariablen*,
- die als Werte „wahr“ und „falsch“ annehmen können.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	wahr	falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr	falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch	falsch	wahr	falsch
wahr	wahr	falsch	wahr	wahr	wahr

► *aussagenlogische Formel*

- nach obigen Regeln zusammengesetzt und
- statt elementarer Aussagen einfach *Aussagevariablen*,
- die als Werte „wahr“ und „falsch“ annehmen können.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	wahr	falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr	falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch	falsch	wahr	falsch
wahr	wahr	falsch	wahr	wahr	wahr

► *aussagenlogische Formel*

- nach obigen Regeln zusammengesetzt und
- statt elementarer Aussagen einfach *Aussagevariablen*,
- die als Werte „wahr“ und „falsch“ annehmen können.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	wahr	falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr	falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch	falsch	wahr	falsch
wahr	wahr	falsch	wahr	wahr	wahr

- ▶ Das „Oder“ ist „inklusiv“ (und nicht „exklusiv“): Wenn A und B beide wahr sind, dann auch $A \vee B$.
- ▶ Man kann für komplizierte Aussagen anhand der obigen Tabellen „ausrechnen“, wenn sie wahr sind und wann falsch.
 - ▶ einfaches Rechnen bzw. scharfes Hinsehen:
die Aussagen $\neg(A \vee B)$ und $(\neg A) \wedge (\neg B)$ immer gleichzeitig wahr bzw. falsch sind.
 - ▶ Gleiches gilt für $\neg \neg A$ und A .
 - ▶ Solche Aussagen nennt man *äquivalent*.

- ▶ Um Klammern zu sparen, legt man z. B. in der Arithmetik Vorrangregeln fest:

$$x \cdot y + z \quad \text{bedeutet} \quad (x \cdot y) + z$$

- ▶ Analog in der Aussagenlogik:

Was soll $\neg A \wedge B \vee C \Rightarrow D$ bedeuten?

- ▶ wir vereinbaren:
 - ▶ $\neg$ bindet am stärksten
 - ▶ $\wedge$ bindet weniger stark
 - ▶ $\vee$ bindet noch schwächer
 - ▶ $\Rightarrow$ bindet am schwächsten

- ▶ Um Klammern zu sparen, legt man z. B. in der Arithmetik Vorrangregeln fest:

$$x \cdot y + z \quad \text{bedeutet} \quad (x \cdot y) + z$$

- ▶ Analog in der Aussagenlogik:

$$\begin{array}{lll} \text{Was soll} & \neg A \wedge B \vee C \Rightarrow D & \text{bedeuten?} \\ \text{das} & ((\neg A) \wedge B) \vee C \Rightarrow D & \end{array}$$

- ▶ wir vereinbaren:
 - ▶ $\neg$ bindet am stärksten
 - ▶ $\wedge$ bindet weniger stark
 - ▶ $\vee$ bindet noch schwächer
 - ▶ $\Rightarrow$ bindet am schwächsten

- ▶ Beobachtung: Bei $A \wedge B$ und $A \vee B$ hängt der Wahrheitswert der ganzen Formel
 - ▶ nur von den Wahrheitswerten von A und B ab, und
 - ▶ nicht davon, worum es in den Aussagen A und B geht.
- ▶ Ziel: Bei $A \Rightarrow B$ wollen wir das auch

- ▶ Wahrheitswert von $A \Rightarrow B$ soll nur von den Wahrheitswerten von A und B abhängen
- ▶ und nichts anderem
(Können Sie sich darauf einlassen?)
- ▶ relativ unstrittig (?) ist, was sein soll, wenn A wahr ist:
 - ▶ wenn A wahr ist und B falsch, dann soll $A \Rightarrow B$ falsch sein
 - ▶ wenn A und B wahr sind, dann soll auch $A \Rightarrow B$ wahr sein

A	B	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	
falsch	wahr	
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

- ▶ nun der Fall, dass A falsch ist und B falsch ist
 - ▶ z. B. $0 = 1$ und $0 = 3$
 - ▶ Man darf die beiden Seiten einer Gleichung mit der gleichen Konstanten multiplizieren.
 - ▶ liefert Beweis, dass $0 = 3$ „logisch“ aus $0 = 1$ folgt.
- ▶ nun der Fall, dass A falsch ist und B wahr
 - ▶ z. B. $0 = 1$ und $1 = 1$
 - ▶ wenn $0 = 1$, dann $1 = 0$ und daher $0 + 1 = 1 + 0$, also $1 = 1$
 - ▶ liefert Beweis, dass $1 = 1$ „logisch“ aus $0 = 1$ folgt.

A	B	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

- ▶ nun der Fall, dass A falsch ist und B falsch ist
 - ▶ z. B. $0 = 1$ und $0 = 3$
 - ▶ Man darf die beiden Seiten einer Gleichung mit der gleichen Konstanten multiplizieren.
 - ▶ liefert Beweis, dass $0 = 3$ „logisch“ aus $0 = 1$ folgt.
- ▶ nun der Fall, dass A falsch ist und B wahr
 - ▶ z. B. $0 = 1$ und $1 = 1$
 - ▶ wenn $0 = 1$, dann $1 = 0$ und daher $0 + 1 = 1 + 0$, also $1 = 1$
 - ▶ liefert Beweis, dass $1 = 1$ „logisch“ aus $0 = 1$ folgt.

A	B	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

- ▶ nun der Fall, dass A falsch ist und B falsch ist
 - ▶ z. B. $0 = 1$ und $0 = 3$
 - ▶ Man darf die beiden Seiten einer Gleichung mit der gleichen Konstanten multiplizieren.
 - ▶ liefert Beweis, dass $0 = 3$ „logisch“ aus $0 = 1$ folgt.
- ▶ nun der Fall, dass A falsch ist und B wahr
 - ▶ z. B. $0 = 1$ und $1 = 1$
 - ▶ wenn $0 = 1$, dann $1 = 0$ und daher $0 + 1 = 1 + 0$, also $1 = 1$
 - ▶ liefert Beweis, dass $1 = 1$ „logisch“ aus $0 = 1$ folgt.

A	B	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

- ▶ nun der Fall, dass A falsch ist und B falsch ist
 - ▶ z. B. $0 = 1$ und $0 = 3$
 - ▶ Man darf die beiden Seiten einer Gleichung mit der gleichen Konstanten multiplizieren.
 - ▶ liefert Beweis, dass $0 = 3$ „logisch“ aus $0 = 1$ folgt.
- ▶ nun der Fall, dass A falsch ist und B wahr
 - ▶ z. B. $0 = 1$ und $1 = 1$
 - ▶ wenn $0 = 1$, dann $1 = 0$ und daher $0 + 1 = 1 + 0$, also $1 = 1$
 - ▶ liefert Beweis, dass $1 = 1$ „logisch“ aus $0 = 1$ folgt.

A	B	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

A	B	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

- ▶ Die Implikation $A \Rightarrow B$ wird vielleicht auch so noch etwas klarer:
 - ▶ Was ist denn das „Gegenteil“ von $A \Rightarrow B$?
 - ▶ Doch wohl $A \wedge \neg B$.
 - ▶ Also ist $A \Rightarrow B$ äquivalent zu $\neg(A \wedge \neg B)$
 - ▶ Das ist äquivalent zu $(\neg A) \vee (\neg \neg B)$ und
 - ▶ das ist äquivalent zu $(\neg A) \vee B$.
- ▶ Auswirkung auf Beweise
 - ▶ Man muss nur etwas tun, wenn A wahr ist.

A	B	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

- ▶ Die Implikation $A \Rightarrow B$ wird vielleicht auch so noch etwas klarer:
 - ▶ Was ist denn das „Gegenteil“ von $A \Rightarrow B$?
 - ▶ Doch wohl $A \wedge \neg B$.
 - ▶ Also ist $A \Rightarrow B$ äquivalent zu $\neg(A \wedge \neg B)$
 - ▶ Das ist äquivalent zu $(\neg A) \vee (\neg \neg B)$ und
 - ▶ das ist äquivalent zu $(\neg A) \vee B$.
- ▶ Auswirkung auf Beweise
 - ▶ Man muss nur etwas tun, wenn A wahr ist.

A	B	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

- ▶ Die Implikation $A \Rightarrow B$ wird vielleicht auch so noch etwas klarer:
 - ▶ Was ist denn das „Gegenteil“ von $A \Rightarrow B$?
 - ▶ Doch wohl $A \wedge \neg B$.
 - ▶ Also ist $A \Rightarrow B$ äquivalent zu $\neg(A \wedge \neg B)$
 - ▶ Das ist äquivalent zu $(\neg A) \vee (\neg \neg B)$ und
 - ▶ das ist äquivalent zu $(\neg A) \vee B$.
- ▶ Auswirkung auf Beweise
 - ▶ Man muss nur etwas tun, wenn A wahr ist.

A	B	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

- ▶ Die Implikation $A \Rightarrow B$ wird vielleicht auch so noch etwas klarer:
 - ▶ Was ist denn das „Gegenteil“ von $A \Rightarrow B$?
 - ▶ Doch wohl $A \wedge \neg B$.
 - ▶ Also ist $A \Rightarrow B$ äquivalent zu $\neg(A \wedge \neg B)$
 - ▶ Das ist äquivalent zu $(\neg A) \vee (\neg \neg B)$ und
 - ▶ das ist äquivalent zu $(\neg A) \vee B$.
- ▶ Auswirkung auf Beweise
 - ▶ Man muss nur etwas tun, wenn A wahr ist.

A	B	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

- ▶ Die Implikation $A \Rightarrow B$ wird vielleicht auch so noch etwas klarer:
 - ▶ Was ist denn das „Gegenteil“ von $A \Rightarrow B$?
 - ▶ Doch wohl $A \wedge \neg B$.
 - ▶ Also ist $A \Rightarrow B$ äquivalent zu $\neg(A \wedge \neg B)$
 - ▶ Das ist äquivalent zu $(\neg A) \vee (\neg \neg B)$ und
 - ▶ das ist äquivalent zu $(\neg A) \vee B$.
- ▶ Auswirkung auf Beweise
 - ▶ Man muss nur etwas tun, wenn A wahr ist.

A	B	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

- ▶ Die Implikation $A \Rightarrow B$ wird vielleicht auch so noch etwas klarer:
 - ▶ Was ist denn das „Gegenteil“ von $A \Rightarrow B$?
 - ▶ Doch wohl $A \wedge \neg B$.
 - ▶ Also ist $A \Rightarrow B$ äquivalent zu $\neg(A \wedge \neg B)$
 - ▶ Das ist äquivalent zu $(\neg A) \vee (\neg \neg B)$ und
 - ▶ das ist äquivalent zu $(\neg A) \vee B$.
- ▶ Auswirkung auf Beweise
 - ▶ Man muss nur etwas tun, wenn A wahr ist.

A	B	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

- ▶ Die Implikation $A \Rightarrow B$ wird vielleicht auch so noch etwas klarer:
 - ▶ Was ist denn das „Gegenteil“ von $A \Rightarrow B$?
 - ▶ Doch wohl $A \wedge \neg B$.
 - ▶ Also ist $A \Rightarrow B$ äquivalent zu $\neg(A \wedge \neg B)$
 - ▶ Das ist äquivalent zu $(\neg A) \vee (\neg \neg B)$ und
 - ▶ das ist äquivalent zu $(\neg A) \vee B$.
- ▶ Auswirkung auf Beweise
 - ▶ Man muss nur etwas tun, wenn A wahr ist.

A	B	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

- ▶ Die Implikation $A \Rightarrow B$ wird vielleicht auch so noch etwas klarer:
 - ▶ Was ist denn das „Gegenteil“ von $A \Rightarrow B$?
 - ▶ Doch wohl $A \wedge \neg B$.
 - ▶ Also ist $A \Rightarrow B$ äquivalent zu $\neg(A \wedge \neg B)$
 - ▶ Das ist äquivalent zu $(\neg A) \vee (\neg \neg B)$ und
 - ▶ das ist äquivalent zu $(\neg A) \vee B$.
- ▶ Auswirkung auf Beweise
 - ▶ Man muss nur etwas tun, wenn A wahr ist.

- ▶ Eine nützliche Notation aus der *Prädikatenlogik*:

Allquantor $\forall$

Existenzquantor $\exists$

- ▶ In der puren Form hat eine quantifizierte Aussage eine der Formen

$$\forall x A(x) \quad \text{oder} \quad \exists x A(x)$$

- ▶ Dabei soll $A(x)$ eine Aussage sein, die von einer Variablen x abhängt (oder jedenfalls abhängen kann). A kann weitere Quantoren enthalten.
- ▶ $\forall x A(x)$ ist zu lesen als: „Für alle x gilt: $A(x)$ “.
- ▶ $\exists x A(x)$ ist zu lesen als: „Es gibt ein x mit: $A(x)$ “.
- ▶ Zum Beispiel:

$$\forall x (x \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \exists y (y \in \mathbb{N}_0 \wedge y = x + 1))$$

- ▶ noch mal dieses Beispiel:

$$\forall x (x \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \exists y (y \in \mathbb{N}_0 \wedge y = x + 1))$$

- ▶ Das hat man oft: Eine Aussage gilt nicht für alle x , sondern nur für alle x aus einer gewissen (Teil-)Menge M .
- ▶ Abkürzung: Statt

$$\forall x (x \in M \Rightarrow B(x))$$

schreibt man einfach

$$\forall x \in M : B(x)$$

- ▶ Doppelpunkt sinnvoll, wenn Lesbarkeit dadurch verbessert
- ▶ Obiges Beispiel wird zu:

$$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : y = x + 1$$

$\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : x \leq y$ ist wahr

$\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x$ ist falsch

$\neg \exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x$ ist wahr

$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \neg \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x$ ist wahr

$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : \neg(y \leq x)$ ist wahr

$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : y > x$ ist wahr

$\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : x \leq y$ ist wahr

$\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x$ ist falsch

$\neg \exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x$ ist wahr

$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \neg \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x$ ist wahr

$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : \neg(y \leq x)$ ist wahr

$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : y > x$ ist wahr

$\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : x \leq y$ ist wahr

$\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x$ ist falsch

$\neg \exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x$ ist wahr

$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \neg \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x$ ist wahr

$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : \neg(y \leq x)$ ist wahr

$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : y > x$ ist wahr

$\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : x \leq y$ ist wahr

$\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x$ ist falsch

$\neg \exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x$ ist wahr

$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \neg \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x$ ist wahr

$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : \neg(y \leq x)$ ist wahr

$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : y > x$ ist wahr

$\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : x \leq y$ ist wahr

$\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x$ ist falsch

$\neg \exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x$ ist wahr

$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \neg \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x$ ist wahr

$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : \neg(y \leq x)$ ist wahr

$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : y > x$ ist wahr

$\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : x \leq y$ ist wahr

$\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x$ ist falsch

$\neg \exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x$ ist wahr

$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \neg \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x$ ist wahr

$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : \neg(y \leq x)$ ist wahr

$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : y > x$ ist wahr

Vereinbarung: die Quantoren binden *schwächer* als die binären aussagenlogischen Operatoren.

Also bedeutet

$$\forall x \in M : A(x) \Rightarrow B(x)$$

das gleiche wie

$$\forall x \in M : (A(x) \Rightarrow B(x))$$

Das sollten Sie mitnehmen:

- ▶ *Alphabete*
 - ▶ ASCII und Unicode sind wichtige Beispiele
- ▶ *binäre Relationen*
- ▶ *Abbildungen*
 - ▶ Spezialfälle: injektiv, surjektiv, bijektiv, partiell
- ▶ *Aussagenlogik*
- ▶ *Existenz- und Allquantor*

Das sollten Sie üben:

- ▶ Benutzung der Begriffe Alphabet, Relation, Abbildung
- ▶ Hinschreiben logischer Formeln
- ▶ Umgang mit $\Rightarrow$