

Grundbegriffe der Informatik

Einheit 11: Graphen

Thomas Worsch

Karlsruher Institut für Technologie, Fakultät für Informatik

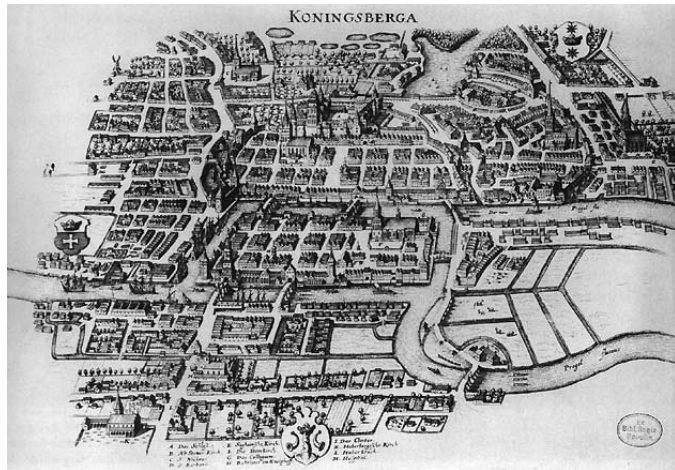
Wintersemester 2010/2011

schon an vielen Stellen Gebilde durch Linien miteinander verbunden, z. B.

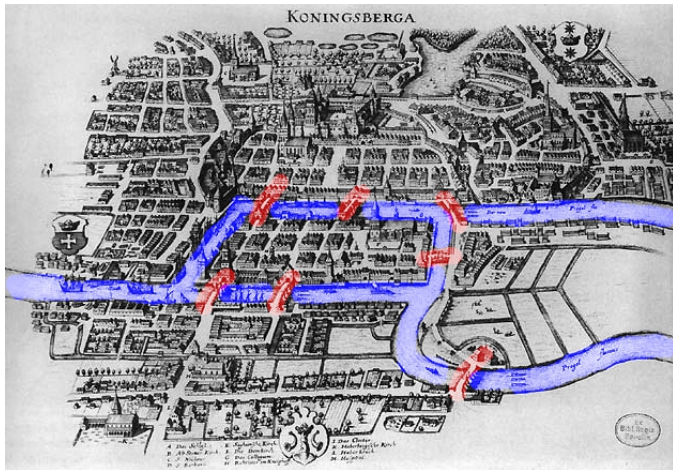
- ▶ in dieser Vorlesung
- ▶ in der Vorlesung „Programmieren“
- ▶ im realen Leben

nun allgemein Gegenstand der Betrachtungen

Königsberg, 1652 (heute Kaliningrad)

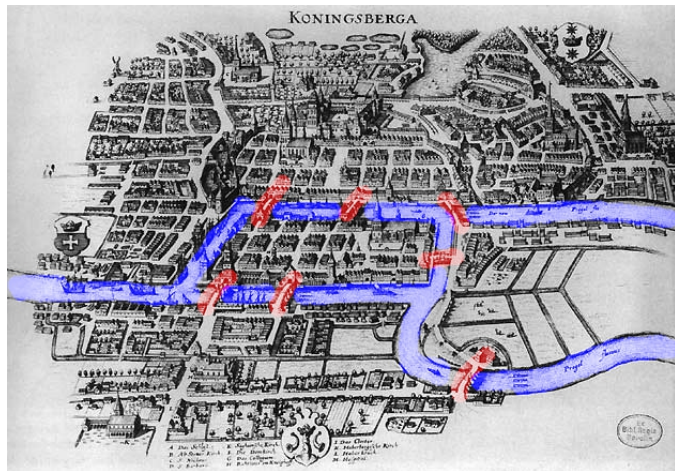


Königsberg, 1652 (heute Kaliningrad)



Leonard Euler (1736): Es gibt keinen Spaziergang, bei dem man über jede Brücke genau einmal geht.

Königsberg, 1652 (heute Kaliningrad)



Leonard Euler (1736): Es gibt keinen Spaziergang, bei dem man über jede Brücke genau einmal geht.

Gerichtete Graphen

- Graphen und Teilgraphen

- Pfade und Erreichbarkeit

- Isomorphie von Graphen

- Ein Blick zurück auf Relationen

Ungerichtete Graphen

- Übertragung der Grundbegriffe aus dem gerichteten Fall

- Eine Anmerkung zu Relationen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

- Gewichtete Graphen

Gerichtete Graphen

- Graphen und Teilgraphen

- Pfade und Erreichbarkeit

- Isomorphie von Graphen

- Ein Blick zurück auf Relationen

Ungerichtete Graphen

- Übertragung der Grundbegriffe aus dem gerichteten Fall

- Eine Anmerkung zu Relationen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

- Gewichtete Graphen

Gerichtete Graphen

- Graphen und Teilgraphen

- Pfade und Erreichbarkeit

- Isomorphie von Graphen

- Ein Blick zurück auf Relationen

Ungerichtete Graphen

- Übertragung der Grundbegriffe aus dem gerichteten Fall

- Eine Anmerkung zu Relationen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

- Gewichtete Graphen

gerichteter Graph

- ▶ festgelegt durch ein Paar $G = (V, E)$
- ▶ V nichtleere, endliche *Knotenmenge*
- ▶ E *Kantenmenge*; darf leer sein
- ▶ $E \subseteq V \times V$ (also auch endlich)

üblich: graphische Darstellung, also nicht

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{(0, 1), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (4, 5), (5, 4)\}$$

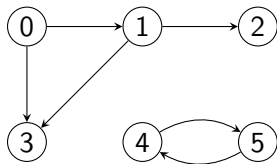
sondern ...

► statt

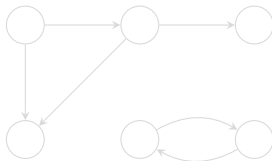
$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{(0, 1), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (4, 5), (5, 4)\}$$

► lieber



oder

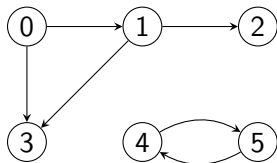


► statt

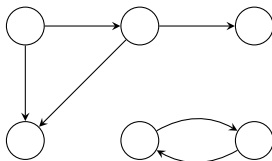
$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{(0, 1), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (4, 5), (5, 4)\}$$

► lieber

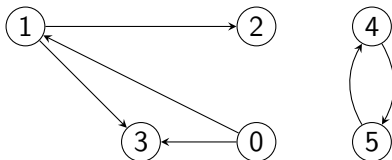
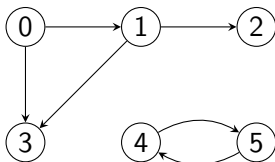


oder



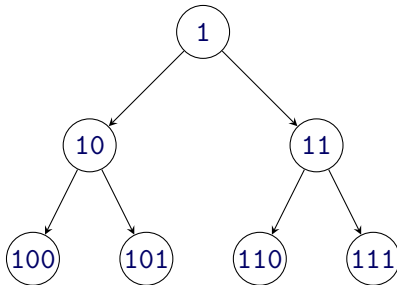
der gleiche Beispielgraph (nur anders hingemalt)

Anordnung der Knoten in der Darstellung irrelevant
zwei Darstellungen des gleichen Graphen:



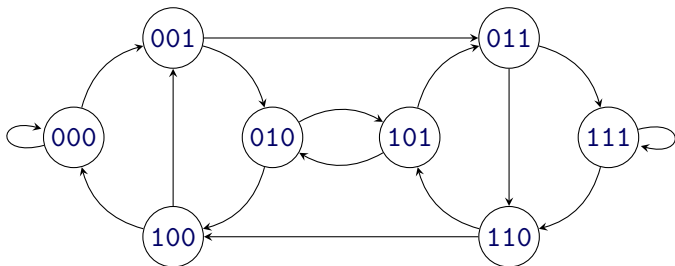
Beispielgraph 2: ein Baum

- ▶ $G = (V, E)$ mit
 - ▶ $V = \{1\} \left(\bigcup_{i=0}^2 \{0, 1\}^i \right)$
 $= \{1, 10, 11, 100, 101, 110, 111\}$
 - ▶ $E = \{(w, wx) \mid x \in \{0, 1\} \wedge w \in V \wedge wx \in V\}$
 $= \{(1, 10), (1, 11), (10, 100), (10, 101),$
 $(11, 110), (11, 111)\}$
- ▶ graphisch



Beispielgraph 3: ein de Bruijn-Graph

- ▶ $G = (V, E)$ mit
 - ▶ $V = \{0, 1\}^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$
 - ▶ $E = \{(xw, wy) \mid x, y \in \{0, 1\} \wedge w \in \{0, 1\}^2\} = \{(000, 000), \dots, (010, 101), \dots\}$
- ▶ graphisch

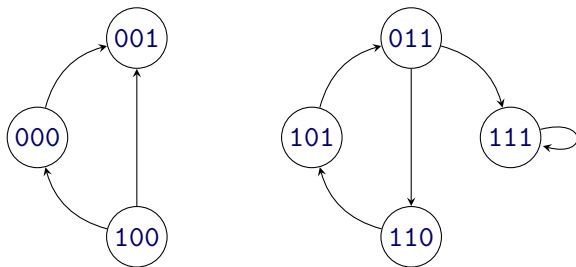


- ▶ Kante der Form $(x, x) \in E$ heißt *Schlinge*
- ▶ Graph ohne Schlingen heißt *schlingenfrei*

$G' = (V', E')$ ist ein *Teilgraph* von $G = (V, E)$, wenn

- ▶ $V' \subseteq V$
- ▶ $E' \subseteq E \cap V' \times V'$,
- ▶ also
 - ▶ Knoten- bzw. Kantenmenge von G' muss Teilmenge von Knoten- bzw. Kantenmenge von G sein, und
 - ▶ die Endpunkte jeder Kante von E' müssen auch zu V' gehören.

ein Teilgraph des de Bruijn-Graphen von vorhin:



Gerichtete Graphen

Graphen und Teilgraphen

Pfade und Erreichbarkeit

Isomorphie von Graphen

Ein Blick zurück auf Relationen

Ungerichtete Graphen

Übertragung der Grundbegriffe aus dem gerichteten Fall

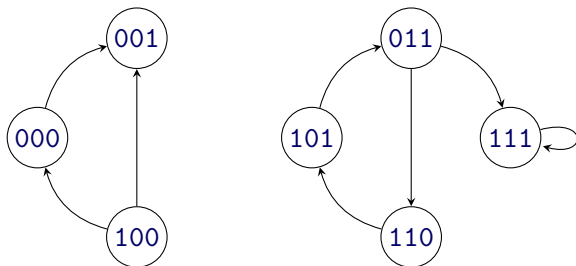
Eine Anmerkung zu Relationen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

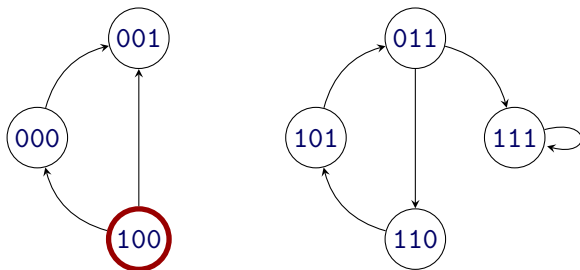
Gewichtete Graphen

- ▶ schreibe $M^{(+)}$ für die Menge aller nichtleeren Listen von Elementen aus M .
- ▶ *Pfad* in einem gerichteten Graphen
 - ▶ nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^{(+)}$ von Knoten
 - ▶ wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- ▶ *Länge eines Pfades*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- ▶ Wenn $p = (v_0, \dots, v_n)$ ein Pfad ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- ▶ Pfad $(v_0, \dots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
 - ▶ Die Knoten $v_0, \dots, v_{n-1}$ sind paarweise verschieden und
 - ▶ die Knoten $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise verschieden.
 - ▶ v_0 und v_n dürfen gleich sein
- ▶ Pfad mit $v_0 = v_n$ heißt *geschlossen* oder auch *Zyklus*
- ▶ ein wiederholungsfreier Zyklus heißt auch *einfacher Zyklus*

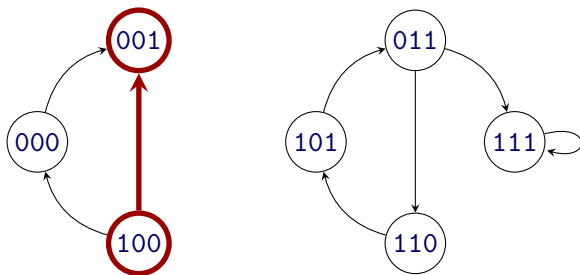
- ▶ schreibe $M^{(+)}$ für die Menge aller nichtleeren Listen von Elementen aus M .
- ▶ *Pfad* in einem gerichteten Graphen
 - ▶ nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^{(+)}$ von Knoten
 - ▶ wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- ▶ *Länge eines Pfades*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- ▶ Wenn $p = (v_0, \dots, v_n)$ ein Pfad ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- ▶ Pfad $(v_0, \dots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
 - ▶ Die Knoten $v_0, \dots, v_{n-1}$ sind paarweise verschieden und
 - ▶ die Knoten $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise verschieden.
 - ▶ v_0 und v_n dürfen gleich sein
- ▶ Pfad mit $v_0 = v_n$ heißt *geschlossen* oder auch *Zyklus*
- ▶ ein wiederholungsfreier Zyklus heißt auch *einfacher Zyklus*



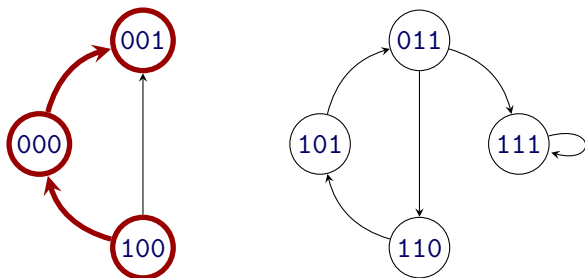
- ▶ (100) ist Pfad der Länge 0
- ▶ (100, 001) ist Pfad der Länge 1
- ▶ (100, 000, 001) ist Pfad der Länge 2
- ▶ (110, 101, 011, 111, 111, 111) ist Pfad der Länge 5
- ▶ (011, 110, 101, 011) ist einfacher Zyklus der Länge 3.



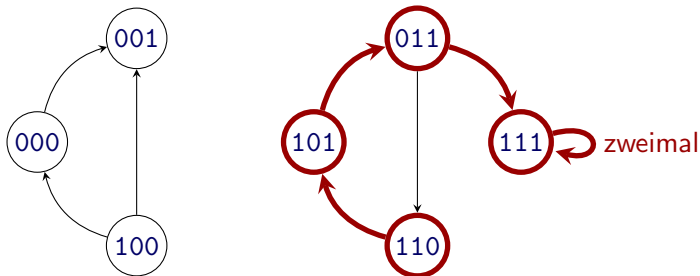
- ▶ (100) ist Pfad der Länge 0
- ▶ (100, 001) ist Pfad der Länge 1
- ▶ (100, 000, 001) ist Pfad der Länge 2
- ▶ (110, 101, 011, 111, 111, 111) ist Pfad der Länge 5
- ▶ (011, 110, 101, 011) ist einfacher Zyklus der Länge 3.



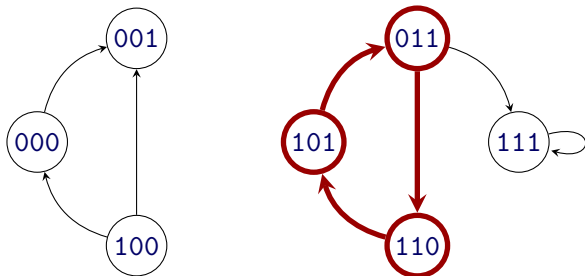
- ▶ (100) ist Pfad der Länge 0
- ▶ (100, 001) ist **Pfad der Länge 1**
- ▶ (100, 000, 001) ist Pfad der Länge 2
- ▶ (110, 101, 011, 111, 111, 111) ist Pfad der Länge 5
- ▶ (011, 110, 101, 011) ist einfacher Zyklus der Länge 3.



- ▶ (100) ist Pfad der Länge 0
- ▶ (100, 001) ist Pfad der Länge 1
- ▶ (100, 000, 001) ist **Pfad der Länge 2**
- ▶ (110, 101, 011, 111, 111, 111) ist Pfad der Länge 5
- ▶ (011, 110, 101, 011) ist einfacher Zyklus der Länge 3.

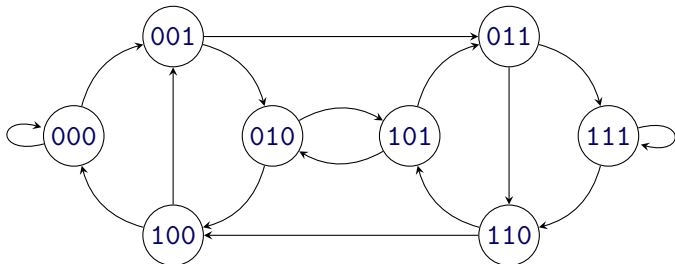


- ▶ (100) ist Pfad der Länge 0
- ▶ (100, 001) ist Pfad der Länge 1
- ▶ (100, 000, 001) ist Pfad der Länge 2
- ▶ (110, 101, 011, 111, 111, 111) ist **Pfad der Länge 5**
- ▶ (011, 110, 101, 011) ist einfacher Zyklus der Länge 3.



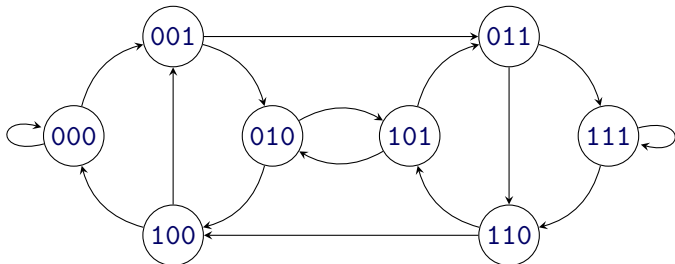
- ▶ (100) ist Pfad der Länge 0
- ▶ (100, 001) ist Pfad der Länge 1
- ▶ (100, 000, 001) ist Pfad der Länge 2
- ▶ (110, 101, 011, 111, 111, 111) ist Pfad der Länge 5
- ▶ (011, 110, 101, 011) ist **einfacher Zyklus** der Länge 3.

- ▶ gerichteter Graph heißt *streng zusammenhängend*, wenn für jedes Knotenpaar $(x, y) \in V^2$ einen Pfad in G von x nach y existiert
- ▶ Beispiel:



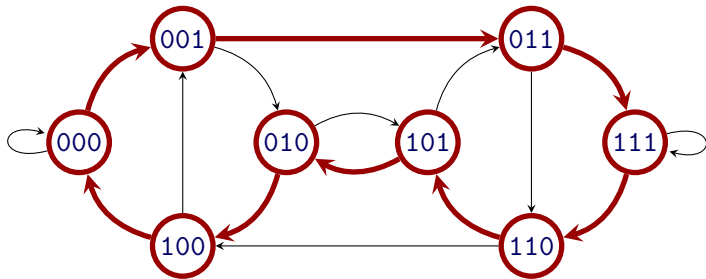
- ▶ hier existieren sogar einfache Zyklen, die alle Knoten enthalten

- ▶ gerichteter Graph heißt *streng zusammenhängend*, wenn für jedes Knotenpaar $(x, y) \in V^2$ einen Pfad in G von x nach y existiert
- ▶ Beispiel:



- ▶ hier existieren sogar einfache Zyklen, die alle Knoten enthalten

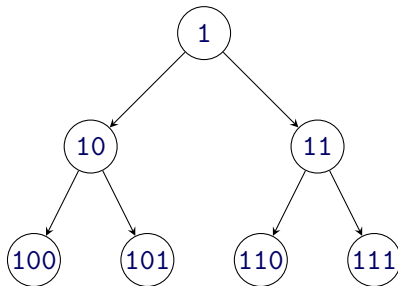
- ▶ gerichteter Graph heißt *streng zusammenhängend*, wenn für jedes Knotenpaar $(x, y) \in V^2$ einen Pfad in G von x nach y existiert
- ▶ Beispiel:



- hier existieren sogar einfache Zyklen, die alle Knoten enthalten

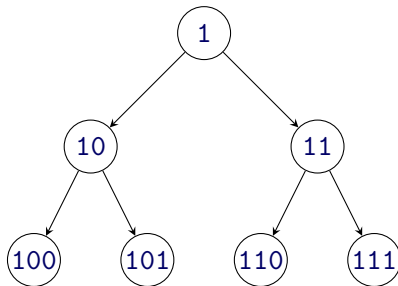
(gerichteter) Baum ist ein Graph $G = (V, E)$, in dem es einen Knoten $r \in V$ gibt mit der Eigenschaft:

- ▶ Zu jedem $x \in V$ gibt es in G **genau einen** Pfad von r nach x .
- ▶ r heißt die **Wurzel** des Baumes.
 - ▶ gleich: die Wurzel ist immer eindeutig
- ▶ Beispiel:



(gerichteter) *Baum* ist ein Graph $G = (V, E)$, in dem es einen Knoten $r \in V$ gibt mit der Eigenschaft:

- ▶ Zu jedem $x \in V$ gibt es in G **genau einen** Pfad von r nach x .
- ▶ r heißt die *Wurzel* des Baumes.
 - ▶ gleich: die Wurzel ist immer eindeutig
- ▶ Beispiel: Die Wurzel ist Knoten 1.



Lemma. Die Wurzel eines gerichteten Baumes ist eindeutig.

Beweis

- ▶ Angenommen, r und r' wären verschiedene Wurzeln
- ▶ Dann gäbe es
 - ▶ einen Pfad von r nach r' , weil r Wurzel ist, und
 - ▶ einen Pfad von r' nach r , weil r' Wurzel ist.
- ▶ „Hintereinanderhängen“ dieser Pfade der Länge > 0
 - ▶ ergäbe Pfad von r nach r ,
 - ▶ der vom Pfad (r) verschieden wäre.
- ▶ Also wäre der Pfad von r nach r gar nicht eindeutig.

Für gerichtete Graphen definiert man:

- ▶ *Eingangsgrad* eines Knoten y ist

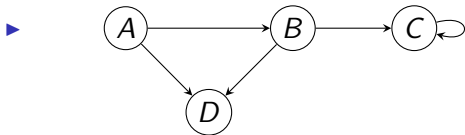
$$d^-(y) = |\{x \mid (x, y) \in E\}|$$

- ▶ *Ausgangsgrad* eines Knoten x ist

$$d^+(x) = |\{y \mid (x, y) \in E\}|$$

- ▶ *Grad* eines Knotens ist

$$d(x) = d^-(x) + d^+(x)$$



bei einem Baum heißen

- ▶ Knoten mit Ausgangsgrad $= 0$ *Blätter*
- ▶ Knoten mit Ausgangsgrad > 0 *innere Knoten*

Gerichtete Graphen

Graphen und Teilgraphen

Pfade und Erreichbarkeit

Isomorphie von Graphen

Ein Blick zurück auf Relationen

Ungerichtete Graphen

Übertragung der Grundbegriffe aus dem gerichteten Fall

Eine Anmerkung zu Relationen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

Gewichtete Graphen

Was ist die „Struktur“ eines Graphen?

- ▶ das, was gleich bleibt, wenn man die Knoten umbenennt
- ▶ Graph $G_1 = (V_1, E_1)$ heißt *isomorph* zu Graph $G_2 = (V_2, E_2)$, wenn es eine Bijektion $f : V_1 \rightarrow V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall x \in V_1 : \forall y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \iff (f(x), f(y)) \in E_2$$

- ▶ f heißt dann auch ein *(Graph-)Isomorphismus*

- ▶ Beispiel:



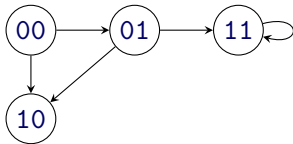
Was ist die „Struktur“ eines Graphen?

- ▶ das, was gleich bleibt, wenn man die Knoten umbenennt
- ▶ Graph $G_1 = (V_1, E_1)$ heißt *isomorph* zu Graph $G_2 = (V_2, E_2)$, wenn es eine Bijektion $f : V_1 \rightarrow V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

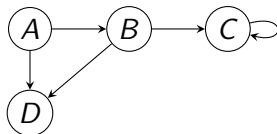
$$\forall x \in V_1 : \forall y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \iff (f(x), f(y)) \in E_2$$

- ▶ f heißt dann auch ein *(Graph-)Isomorphismus*

- ▶ Beispiel:



und



- ▶ Wenn G_1 isomorph zu G_2 , dann auch G_2 isomorph zu G_1 :
 - ▶ f^{-1} leistet das Gewünschte.
- ▶ Jeder Graph ist isomorph zu sich selbst:
 - ▶ wähle $f = I_V$
- ▶ Wenn G_1 isomorph zu G_2 (dank f) und G_2 isomorph zu G_3 (dank g), dann auch G_1 isomorph zu G_3 :
 - ▶ betrachte die Abbildung $g \circ f$

- ▶ Wenn G_1 isomorph zu G_2 , dann auch G_2 isomorph zu G_1 :
 - ▶ f^{-1} leistet das Gewünschte.
- ▶ Jeder Graph ist isomorph zu sich selbst:
 - ▶ wähle $f = I_V$
- ▶ Wenn G_1 isomorph zu G_2 (dank f) und G_2 isomorph zu G_3 (dank g), dann auch G_1 isomorph zu G_3 :
 - ▶ betrachte die Abbildung $g \circ f$

- ▶ Wenn G_1 isomorph zu G_2 , dann auch G_2 isomorph zu G_1 :
 - ▶ f^{-1} leistet das Gewünschte.
- ▶ Jeder Graph ist isomorph zu sich selbst:
 - ▶ wähle $f = I_V$
- ▶ Wenn G_1 isomorph zu G_2 (dank f) und G_2 isomorph zu G_3 (dank g), dann auch G_1 isomorph zu G_3 :
 - ▶ betrachte die Abbildung $g \circ f$

Gerichtete Graphen

Graphen und Teilgraphen

Pfade und Erreichbarkeit

Isomorphie von Graphen

Ein Blick zurück auf Relationen

Ungerichtete Graphen

Übertragung der Grundbegriffe aus dem gerichteten Fall

Eine Anmerkung zu Relationen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

Gewichtete Graphen

- ▶ $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$
- ▶ E binäre Relation auf V
- ▶ **Frage:** Bedeutung von E^i ?
- ▶ **Antwort:** Zusammenhang mit Pfaden der Länge i
- ▶ Betrachten zunächst den Fall $i = 2$:
 - ▶ $E^2 = E \circ E$, wobei

$$E \circ E = \{(x, z) \in V \times V \mid \exists y \in V : (x, y) \in E \wedge (y, z) \in E\}$$

- ▶ Pfad der Länge 2: Knotenliste $p = (v_0, v_1, v_2)$ mit der Eigenschaft, dass $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$.

Also:

- ▶ Ein Paar von Knoten ist *genau dann* in der Relation E^2 , wenn die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.

- ▶ $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$
- ▶ E binäre Relation auf V
- ▶ **Frage:** Bedeutung von E^i ?
- ▶ **Antwort:** Zusammenhang mit Pfaden der Länge i
- ▶ Betrachten zunächst den Fall $i = 2$:
 - ▶ $E^2 = E \circ E$, wobei

$$E \circ E = \{(x, z) \in V \times V \mid \exists y \in V : (x, y) \in E \wedge (y, z) \in E\}$$

- ▶ Pfad der Länge 2: Knotenliste $p = (v_0, v_1, v_2)$ mit der Eigenschaft, dass $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$.

Also:

- ▶ Ein Paar von Knoten ist *genau dann* in der Relation E^2 , wenn die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.

- ▶ $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$
- ▶ E binäre Relation auf V
- ▶ **Frage:** Bedeutung von E^i ?
- ▶ **Antwort:** Zusammenhang mit Pfaden der Länge i
- ▶ Betrachten zunächst den Fall $i = 2$:
 - ▶ $E^2 = E \circ E$, wobei

$$E \circ E = \{(x, z) \in V \times V \mid \exists y \in V : (x, y) \in E \wedge (y, z) \in E\}$$

- ▶ Pfad der Länge 2: Knotenliste $p = (v_0, v_1, v_2)$ mit der Eigenschaft, dass $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$.

Also:

- ▶ Ein Paar von Knoten ist *genau dann* in der Relation E^2 , wenn die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.

- ▶ $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$
- ▶ E binäre Relation auf V
- ▶ **Frage:** Bedeutung von E^i ?
- ▶ **Antwort:** Zusammenhang mit Pfaden der Länge i
- ▶ Betrachten zunächst den Fall $i = 2$:
 - ▶ $E^2 = E \circ E$, wobei

$$E \circ E = \{(x, z) \in V \times V \mid \exists y \in V : (x, y) \in E \wedge (y, z) \in E\}$$

- ▶ Pfad der Länge 2: Knotenliste $p = (v_0, v_1, v_2)$ mit der Eigenschaft, dass $(v_0, v_1) \in E \wedge (v_1, v_2) \in E$.

Also:

- ▶ Ein Paar von Knoten ist *genau dann* in der Relation E^2 , wenn die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.

- ▶ Ein Paar von Knoten genau dann in der Relation E^2 , wenn die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.
- ▶ Man sieht leicht:
Das Analoge gilt für $i = 0$ und $i = 1$.
Spätestens vollständige Induktion lehrt:
- ▶ **Lemma.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^i , wenn x und y in G durch einen Pfad der Länge i miteinander verbunden sind.
- ▶ **Korollar.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^* , wenn x und y in G durch einen Pfad (evtl. der Länge 0) miteinander verbunden sind.
- ▶ **Korollar.** Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ ist genau dann streng zusammenhängend, wenn $E^* = V \times V$ ist.

- ▶ Ein Paar von Knoten genau dann in der Relation E^2 , wenn die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.
- ▶ Man sieht leicht:
Das Analoge gilt für $i = 0$ und $i = 1$.
Spätestens vollständige Induktion lehrt:
- ▶ **Lemma.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^i , wenn x und y in G durch einen Pfad der Länge i miteinander verbunden sind.
- ▶ **Korollar.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^* , wenn x und y in G durch einen Pfad (evtl. der Länge 0) miteinander verbunden sind.
- ▶ **Korollar.** Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ ist genau dann streng zusammenhängend, wenn $E^* = V \times V$ ist.

- ▶ Ein Paar von Knoten genau dann in der Relation E^2 , wenn die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.
- ▶ Man sieht leicht:
Das Analoge gilt für $i = 0$ und $i = 1$.
Spätestens vollständige Induktion lehrt:
- ▶ **Lemma.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^i , wenn x und y in G durch einen Pfad der Länge i miteinander verbunden sind.
- ▶ **Korollar.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^* , wenn x und y in G durch einen Pfad (evtl. der Länge 0) miteinander verbunden sind.
- ▶ **Korollar.** Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ ist genau dann streng zusammenhängend, wenn $E^* = V \times V$ ist.

- ▶ Ein Paar von Knoten genau dann in der Relation E^2 , wenn die beiden durch Pfad der Länge 2 verbunden sind.
- ▶ Man sieht leicht:
Das Analoge gilt für $i = 0$ und $i = 1$.
Spätestens vollständige Induktion lehrt:
- ▶ **Lemma.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^i , wenn x und y in G durch einen Pfad der Länge i miteinander verbunden sind.
- ▶ **Korollar.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^* , wenn x und y in G durch einen Pfad (evtl. der Länge 0) miteinander verbunden sind.
- ▶ **Korollar.** Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ ist genau dann streng zusammenhängend, wenn $E^* = V \times V$ ist.

Das sollten Sie mitnehmen:

- ▶ gerichtete Graphen drücken Beziehungen aus (Relationen)
- ▶ Pfade
- ▶ strenger Zusammenhang
- ▶ Bäume

Das sollten Sie üben:

- ▶ Benutzung der neuen Begriffe beim Reden
- ▶ Malen von Graphen
- ▶ sehen, wann Graphen isomorph sind

Gerichtete Graphen

Graphen und Teilgraphen

Pfade und Erreichbarkeit

Isomorphie von Graphen

Ein Blick zurück auf Relationen

Ungerichtete Graphen

Übertragung der Grundbegriffe aus dem gerichteten Fall

Eine Anmerkung zu Relationen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

Gewichtete Graphen

Gerichtete Graphen

Graphen und Teilgraphen

Pfade und Erreichbarkeit

Isomorphie von Graphen

Ein Blick zurück auf Relationen

Ungerichtete Graphen

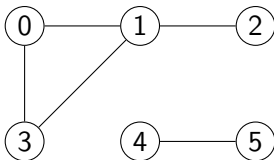
Übertragung der Grundbegriffe aus dem gerichteten Fall

Eine Anmerkung zu Relationen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

Gewichtete Graphen

- ▶ Manchmal gibt es in einem Graphen zu *jeder* Kante $(x, y) \in E$ auch die Kante $(y, x) \in E$ in umgekehrter Richtung
- ▶ dann oft graphische Darstellung der Kanten (x, y) und (y, x) nur durch **einen** Strich **ohne** Pfeilspitzen
- ▶ Man spricht dann auch nur von **einer** Kante.
- ▶ Beispiel



Ein *ungerichteter Graph* ist eine Struktur $U = (V, E)$ mit

- ▶ V : endliche nichtleere Menge von *Knoten*
- ▶ E : Menge von *Kanten* mit

$$E \subseteq \{ \{x, y\} \mid x \in V \wedge y \in V \}$$

- ▶ *adjazente Knoten*: durch eine Kante miteinander verbunden
- ▶ *Schlinge*
 - ▶ Kante mit identischen Start- und Zielknoten
 - ▶ formal ergibt sich $\{x, y\}$ mit $x = y$, also einfach $\{x\}$
- ▶ Graph ohne Schlingen heißt *schlingenfrei*

$U' = (V', E')$ ist *Teilgraph* eines ungerichteten Graphen $U = (V, E)$, wenn

- ▶ $V' \subseteq V$ und
- ▶ $E' \subseteq E \cap \{ \{x, y\} \mid x, y \in V' \}$.
- ▶ also
 - ▶ Knoten- bzw. Kantenmenge von G' muss Teilmenge von Knoten- bzw. Kantenmenge von G sein, und
 - ▶ die Endpunkte jeder Kante von E' müssen auch zu V' gehören.

- ▶ *Weg* in einem ungerichteten Graphen
 - ▶ nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^{(+)}$ von Knoten
 - ▶ wobei für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$
- ▶ *Länge eines Weges*: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)
- ▶ Wenn $p = (v_0, \dots, v_n)$ ein Weg ist, heißt v_n von v_0 aus *erreichbar*
- ▶ Weg $(v_0, \dots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:
 - ▶ Die Knoten $v_0, \dots, v_{n-1}$ sind paarweise verschieden und
 - ▶ die Knoten $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise verschieden.
 - ▶ v_0 und v_n dürfen gleich sein

Ungerichtete Kanten und Relationen

- ▶ im gerichteten Fall:
 - ▶ E binäre Relation auf V
 - ▶ alle E^i und E^* haben anschauliche Bedeutung
- ▶ im ungerichteten Fall: E keine binäre Relation, aber:
- ▶ zu $U = (V, E)$ definiere *Kantenrelation* $E_g \subseteq V \times V$:

$$E_g = \{(x, y) \mid \{x, y\} \in E\}$$

- ▶ $G = (V, E_g)$ ist der *zu U gehörende gerichtete Graph* mit gleicher Knotenmenge V wie U .
- ▶ Wenn in U Knoten x und y durch Kante verbunden sind, dann gibt es in G
 - ▶ Kante (x, y) von x nach y und
 - ▶ Kante (y, x) von y nach x (denn $\{x, y\} = \{y, x\}$).

Ungerichtete Kanten und Relationen

- ▶ im gerichteten Fall:
 - ▶ E binäre Relation auf V
 - ▶ alle E^i und E^* haben anschauliche Bedeutung
- ▶ im ungerichteten Fall: E keine binäre Relation, aber:
- ▶ zu $U = (V, E)$ definiere **Kantenrelation** $E_g \subseteq V \times V$:

$$E_g = \{(x, y) \mid \{x, y\} \in E\}$$

- ▶ $G = (V, E_g)$ ist der *zu U gehörende gerichtete Graph* mit gleicher Knotenmenge V wie U .
- ▶ Wenn in U Knoten x und y durch Kante verbunden sind, dann gibt es in G
 - ▶ Kante (x, y) von x nach y und
 - ▶ Kante (y, x) von y nach x (denn $\{x, y\} = \{y, x\}$).

Ungerichtete Kanten und Relationen

- ▶ im gerichteten Fall:
 - ▶ E binäre Relation auf V
 - ▶ alle E^i und E^* haben anschauliche Bedeutung
- ▶ im ungerichteten Fall: E keine binäre Relation, aber:
- ▶ zu $U = (V, E)$ definiere **Kantenrelation** $E_g \subseteq V \times V$:

$$E_g = \{(x, y) \mid \{x, y\} \in E\}$$

- ▶ $G = (V, E_g)$ ist der **zu U gehörende gerichtete Graph** mit gleicher Knotenmenge V wie U .
- ▶ Wenn in U Knoten x und y durch Kante verbunden sind, dann gibt es in G
 - ▶ Kante (x, y) von x nach y und
 - ▶ Kante (y, x) von y nach x (denn $\{x, y\} = \{y, x\}$).

Ungerichtete Kanten und Relationen

- ▶ im gerichteten Fall:
 - ▶ E binäre Relation auf V
 - ▶ alle E^i und E^* haben anschauliche Bedeutung
- ▶ im ungerichteten Fall: E keine binäre Relation, aber:
- ▶ zu $U = (V, E)$ definiere *Kantenrelation* $E_g \subseteq V \times V$:

$$E_g = \{(x, y) \mid \{x, y\} \in E\}$$

- ▶ $G = (V, E_g)$ ist der *zu U gehörende gerichtete Graph* mit gleicher Knotenmenge V wie U .
- ▶ Wenn in U Knoten x und y durch Kante verbunden sind, dann gibt es in G
 - ▶ Kante (x, y) von x nach y und
 - ▶ Kante (y, x) von y nach x (denn $\{x, y\} = \{y, x\}$).

- ▶ ungerichteter Graph (V, E) heißt *zusammenhängend*, wenn der zugehörige gerichtete Graph (V, E_g) streng zusammenhängend ist.

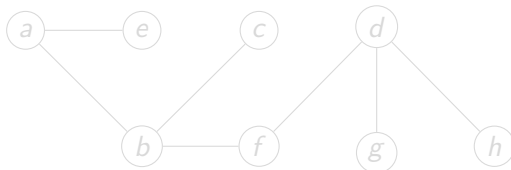
nun umgekehrt:

- ▶ Ist $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, dann definiere

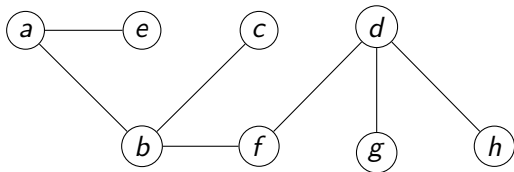
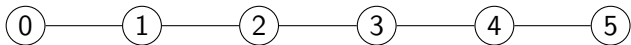
$$E_u = \{ \{x, y\} \mid (x, y) \in E \}$$

- ▶ $U = (V, E_u)$ ist der *zu G gehörige ungerichtete Graph*
- ▶ U entsteht aus G durch „Entfernen“ der Pfeilspitzen

- ▶ ungerichteter Graph $U = (V, E)$ heißt ein (*ungerichteter*) *Baum*, wenn es einen gerichteten Baum $G = (V, E')$ gibt mit $E = E'_u$.
- ▶ Beispiele: zwei Bäume



- ▶ ungerichteter Graph $U = (V, E)$ heißt ein (*ungerichteter*) *Baum*, wenn es einen gerichteten Baum $G = (V, E')$ gibt mit $E = E'_u$.
- ▶ Beispiele: zwei Bäume



- ▶ Aus verschiedenen gerichteten Bäumen entsteht durch Weglassen der Pfeilspitzen der gleiche ungerichtete Baum.
- ▶ Wurzel
 - ▶ gerichteter Fall: Wurzel leicht zu identifizieren.
 - ▶ ungerichteter Fall:
 - ▶ Von jedem Knoten führt ein Weg (sogar viele) zu jedem anderen Knoten.
 - ▶ trotzdem manchmal ausgezeichnete Knoten „irgendwie klar“
 - ▶ falls nötig, explizit dazu sagen

- ▶ bei ungerichteten Graphen ein heikles Thema:
 - ▶ Was macht man mit Schlingen?
 - ▶ in der Literatur: verschiedene Vorgehensweisen
- ▶ Der *Grad* eines Knotens $x \in V$ in einem ungerichteten Graphen ist

$$d(x) = |\{y \mid y \neq x \wedge \{x, y\} \in E\}| + \begin{cases} 2 & \text{falls } \{x, x\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Gerichtete Graphen

Graphen und Teilgraphen

Pfade und Erreichbarkeit

Isomorphie von Graphen

Ein Blick zurück auf Relationen

Ungerichtete Graphen

Übertragung der Grundbegriffe aus dem gerichteten Fall

Eine Anmerkung zu Relationen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

Gewichtete Graphen

- ▶ Kantenrelation eines ungerichteten Graphen hat die Eigenschaft: Wenn $(x, y) \in E_g$, dann immer auch $(y, x) \in E_g$.
- ▶ So etwas kommt öfter vor und verdient einen Namen:
- ▶ Relation $R \subseteq M \times M$ heißt *symmetrisch*, wenn für alle $x \in M$ und $y \in M$ gilt:

$$(x, y) \in R \implies (y, x) \in R .$$

- ▶ Eine Relation, die
 - ▶ reflexiv,
 - ▶ transitiv und
 - ▶ symmetrischist, heißt *Äquivalenzrelation*.
- ▶ Beispiel: Isomorphie von Graphen

Das sollten Sie mitnehmen:

- ▶ ungerichtete Graphen:
 - ▶ Unterschiede zu gerichteten Graphen
 - ▶ Gemeinsamkeiten mit gerichteten Graphen

Das sollten Sie üben:

- ▶ Benutzung der Begriffe
- ▶ Malen von Graphen, hübsche und hässliche

Gerichtete Graphen

Graphen und Teilgraphen

Pfade und Erreichbarkeit

Isomorphie von Graphen

Ein Blick zurück auf Relationen

Ungerichtete Graphen

Übertragung der Grundbegriffe aus dem gerichteten Fall

Eine Anmerkung zu Relationen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

Gewichtete Graphen

- ▶ Manchmal beinhaltet die Graphstruktur nicht alle Informationen, die von Interesse sind.
 - ▶ bei Huffman-Bäumen: Symbole als Beschriftungen an den Kanten, Zahlen als Gewichte an den Knoten
 - ▶ Straßenkarten: Entfernungsangaben an Kanten
 - ▶ ...
- ▶ Ein *knotenmarkierter Graph* ist ein Graph $G = (V, E)$ (gerichtet oder ungerichtet), bei dem zusätzlich
 - ▶ eine Menge M_V von *(Knoten-)Markierungen* und
 - ▶ eine *Markierungsfunktion* $m_V : V \rightarrow M_V$gegeben sind.
- ▶ Ein *kantenmarkierter Graph* ist ein Graph $G = (V, E)$ (gerichtet oder ungerichtet), bei dem zusätzlich
 - ▶ eine Menge M_E von *(Kanten-)Markierungen* und
 - ▶ eine *Markierungsfunktion* $m_E : E \rightarrow M_E$gegeben sind.

- ▶ Landkarte als Graph
 - ▶ Jeder Knoten entspricht einem Land.
 - ▶ Eine Kante verbindet zwei verschiedene Knoten, wenn die repräsentierten Länder „benachbart sind“, d. h. ein Stück gemeinsame Grenzen haben.
- ▶ Färbung der Landkarte:
 - ▶ benachbarte Länder in verschiedenen Farben gefärbt
- ▶ Färbung des Graphen:
 - ▶ adjazente Knoten haben verschiedenen Farben als Markierung
- ▶ Färbung $m_V : V \rightarrow M_V$ heißt *legal*, wenn gilt

$$\{x, y\} \in E \implies m_V(x) \neq m_V(y)$$

- ▶ Wieviele Farben braucht man für eine legale Färbung?
 - ▶ höchstens $|V|$
 - ▶ mindestens ?
 - ▶ dieses Problem taucht in Compilern wieder auf ...

- ▶ Landkarte als Graph
 - ▶ Jeder Knoten entspricht einem Land.
 - ▶ Eine Kante verbindet zwei verschiedene Knoten, wenn die repräsentierten Länder „benachbart sind“, d. h. ein Stück gemeinsame Grenzen haben.
- ▶ Färbung der Landkarte:
 - ▶ benachbarte Länder in verschiedenen Farben gefärbt
- ▶ Färbung des Graphen:
 - ▶ adjazente Knoten haben verschiedenen Farben als Markierung
- ▶ Färbung $m_V : V \rightarrow M_V$ heißt *legal*, wenn gilt

$$\{x, y\} \in E \implies m_V(x) \neq m_V(y)$$

- ▶ Wieviele Farben braucht man für eine legale Färbung?
 - ▶ höchstens $|V|$
 - ▶ mindestens ?
 - ▶ dieses Problem taucht in Compilern wieder auf ...

- ▶ Landkarte als Graph
 - ▶ Jeder Knoten entspricht einem Land.
 - ▶ Eine Kante verbindet zwei verschiedene Knoten, wenn die repräsentierten Länder „benachbart sind“, d. h. ein Stück gemeinsame Grenzen haben.
- ▶ Färbung der Landkarte:
 - ▶ benachbarte Länder in verschiedenen Farben gefärbt
- ▶ Färbung des Graphen:
 - ▶ adjazente Knoten haben verschiedenen Farben als Markierung
- ▶ Färbung $m_V : V \rightarrow M_V$ heißt *legal*, wenn gilt

$$\{x, y\} \in E \implies m_V(x) \neq m_V(y)$$

- ▶ Wieviele Farben braucht man für eine legale Färbung?
 - ▶ höchstens $|V|$
 - ▶ mindestens ?
 - ▶ dieses Problem taucht in Compilern wieder auf ...

Gerichtete Graphen

Graphen und Teilgraphen

Pfade und Erreichbarkeit

Isomorphie von Graphen

Ein Blick zurück auf Relationen

Ungerichtete Graphen

Übertragung der Grundbegriffe aus dem gerichteten Fall

Eine Anmerkung zu Relationen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

Gewichtete Graphen

Wenn die Knoten- oder Kantenmarkierungen Zahlen sind, dann spricht man auch von *gewichteten* Graphen.

Beispiele für kantengewichtete Graphen:

- ▶ Verkehrsnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Entfernungen/Reisezeiten
 - ▶ Problem: finde kürzesten/schnellsten Weg von x nach y
 - ▶ Problem: finde kürzeste Rundreise (einfachen Zyklus) die alle Knoten besucht
- ▶ Kabelnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Baukosten
 - ▶ Problem: finde billigste Möglichkeit, „alle miteinander“ zu verbinden
 - ▶ Lösung von Borůvka (1926) für die Stromversorgung in Mähren
- ▶ Rohrleitungsnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Rohrquerschnitte
 - ▶ Problem: finde maximal möglichen Fluss von x nach y

Wenn die Knoten- oder Kantenmarkierungen Zahlen sind, dann spricht man auch von *gewichteten* Graphen.

Beispiele für kantengewichtete Graphen:

- ▶ Verkehrsnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Entfernungen/Reisezeiten
 - ▶ Problem: finde kürzesten/schnellsten Weg von x nach y
 - ▶ Problem: finde kürzeste Rundreise (einfachen Zyklus) die alle Knoten besucht
- ▶ Kabelnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Baukosten
 - ▶ Problem: finde billigste Möglichkeit, „alle miteinander“ zu verbinden
 - ▶ Lösung von Borůvka (1926) für die Stromversorgung in Mähren
- ▶ Rohrleitungsnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Rohrquerschnitte
 - ▶ Problem: finde maximal möglichen Fluss von x nach y

Wenn die Knoten- oder Kantenmarkierungen Zahlen sind, dann spricht man auch von *gewichteten* Graphen.

Beispiele für kantengewichtete Graphen:

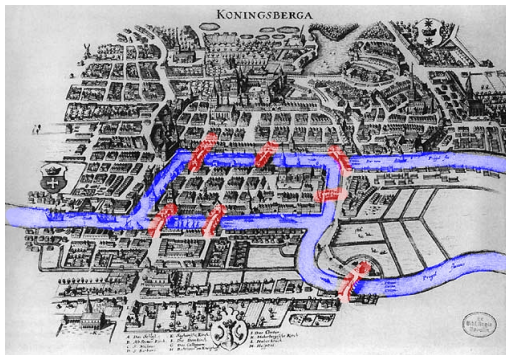
- ▶ Verkehrsnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Entfernungen/Reisezeiten
 - ▶ Problem: finde kürzesten/schnellsten Weg von x nach y
 - ▶ Problem: finde kürzeste Rundreise (einfachen Zyklus) die alle Knoten besucht
- ▶ Kabelnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Baukosten
 - ▶ Problem: finde billigste Möglichkeit, „alle miteinander“ zu verbinden
 - ▶ Lösung von Borůvka (1926) für die Stromversorgung in Mähren
- ▶ Rohrleitungsnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Rohrquerschnitte
 - ▶ Problem: finde maximal möglichen Fluss von x nach y

Wenn die Knoten- oder Kantenmarkierungen Zahlen sind, dann spricht man auch von *gewichteten* Graphen.

Beispiele für kantengewichtete Graphen:

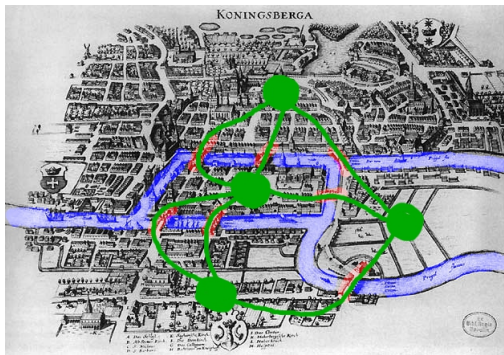
- ▶ Verkehrsnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Entfernungen/Reisezeiten
 - ▶ Problem: finde kürzesten/schnellsten Weg von x nach y
 - ▶ Problem: finde kürzeste Rundreise (einfachen Zyklus) die alle Knoten besucht
- ▶ Kabelnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Baukosten
 - ▶ Problem: finde billigste Möglichkeit, „alle miteinander“ zu verbinden
 - ▶ Lösung von Borůvka (1926) für die Stromversorgung in Mähren
- ▶ Rohrleitungsnetz:
 - ▶ Kantengewichte sind Rohrquerschnitte
 - ▶ Problem: finde maximal möglichen Fluss von x nach y

Nichtbeispiel: noch mal die Brücken in Königsberg



- ▶ das können wir gar nicht als Graph formalisieren,
- ▶ denn von einem Knoten zu einem anderen kann es bei unserer Definition höchstens *eine* Kante geben

Nichtbeispiel: noch mal die Brücken in Königsberg



- ▶ das können wir gar nicht als Graph formalisieren,
- ▶ denn von einem Knoten zu einem anderen kann es bei unserer Definition höchstens *eine* Kante geben

Das sollten Sie mitnehmen:

- ▶ vielfältige Beispiele für Knoten- und Kantenmarkierungen
- ▶ man stößt leicht auf diverse Optimierungsprobleme

Das könnten Sie mal ausprobieren:

- ▶ an einfachen Beispielen Optimierungen versuchen (leicht? schwer?)

- ▶ gerichtete und ungerichtete Graphen
 - ▶ wichtige Begriffe (Pfad, Zyklus, Baum, ...)
 - ▶ Gemeinsamkeiten und Unterschiede
- ▶ Relationen
 - ▶ symmetrische Relationen
 - ▶ Äquivalenzrelationen