Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
7. März 2013

Klausur-nummer

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	9	7	7	11	6	10	10
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:	Note:

Aufgabe 1 (9 Punkte)
Kreuzen Sie für die folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Wenn Sie kein Kreuz setzen, bekommen Sie weder Plus- noch Minuspunkt, für das Ankreuzen beider Möglichkeiten wird ein Punkt abgezogen. Die gesamte Aufgabe wird mit mindestens 0 Punkten bewertet.

a) Für alle Relationen $R_1, R_2 \subseteq M \times M$ gilt: $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

wahr: □ falsch: □

b) Gegeben seien zwei Relationen $R_1, R_2 \subseteq M \times M$.
R_1 ist reflexiv $\Rightarrow R_1 \cup R_2$ ist reflexiv.

wahr: □ falsch: □

c) Gegeben seien zwei Relationen $R_1, R_2 \subseteq M \times M$. Wenn R_1 und R_2 antisymmetrisch sind, dann ist $R_1 \cup R_2$ antisymmetrisch.

wahr: □ falsch: □

d) $(\{\mathtt{a}\} \cup \{\mathtt{b}\})^* = \{\mathtt{a}\}^* \cup \{\mathtt{b}\}^*$

wahr: □ falsch: □

e) Besitzt die Menge der oberen Schranken einer Teilmenge T ein größtes Element, so heißt dies das Supremum von T.

wahr: □ falsch: □

f) Für einen wie in der Vorlesung definierten Akzeptor $A = (Z, z_0, X, f, F)$ mit $F = Z$ gilt: $L(A) = X^*$

wahr: □ falsch: □

g) Es gibt 256 Sprachen L mit $L \subseteq \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid |w| = 3\}$

wahr: □ falsch: □

h) $n^{\frac{42}{41}} \in O(n(\log n)^2)$

wahr: □ falsch: □

i) Sei A die Adjazenzmatrix zu einem Graphen mit n Knoten. Es gilt:
$\forall m > n : \operatorname{sgn}(\sum_{i=1}^{n} A^i) = \operatorname{sgn}(\sum_{i=1}^{m} A^i)$

wahr: □ falsch: □

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 1:

Aufgabe 2 (7 Punkte)
In dieser Aufgabe geht es um Huffman-Codierungen.

Gegeben seien zwei Codierungen über dem Alphabet $A = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{d}, \texttt{e}\}$

a	b	c	d	e
00	10	11	010	011

a	b	c	d	e
10	11	001	010	011

a) Welche der beiden Codierungen ist eine gültige Huffman-Codierung c_g? Eine gültige Huffman-Codierung ist eine Codierung zu einem wie in der Vorlesung konstruierten Huffman-Baum. Begründen Sie Ihre Entscheidung kurz. [2 *Punkte*]

b) Zeichnen Sie zur gültigen Huffman-Codierung c_g aus Teilaufgabe a) den Huffman-Baum. [2 *Punkte*]

c) Für alle $x \in A$ bezeichne $f(x)$ die absolute Häufigkeit von x. Zu c_g seien folgende absoluten Häufigkeiten gegeben:

   $f(\texttt{d}) = 1, \qquad f(\texttt{e}) = 2, \qquad f(\texttt{a}) = 4$

   Geben Sie alle möglichen Paare von absoluten Häufigkeiten $(f(\texttt{b}), f(\texttt{c})) \in \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$ an, so dass $\sum_{\texttt{i} \in A} f(\texttt{i}) \leq 15$ und die Huffman-Codierung c_g entsteht. [3 *Punkte*]

   Hinweis: Falsche Paare geben Punktabzug.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

Aufgabe 3 (7 Punkte)

1. Gegeben sei folgende Funktion $f : \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \to \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$:

$$\begin{aligned} & f(\epsilon) = \epsilon \\ \forall w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* : \quad & f(\mathtt{a}w) = \mathtt{b}f(w) \\ \forall w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* : \quad & f(\mathtt{b}w) = \mathtt{a}f(w) \end{aligned}$$

   Beweisen Sie per Induktion, dass gilt:

$$\forall w_1, w_2 \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* : f(w_1 w_2) = f(w_1) f(w_2)$$

   [*4 Punkte*]

2. Zu einem beliebigen Alphabet A sei folgende Funktion $g : A^* \times \mathbb{N}_0 \to A^*$ gegeben:

$$\forall k \in \mathbb{N}_+, \forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall x_1, \ldots, x_k \in A :$$
$$g(x_1 \ldots x_k, n) = \begin{cases} x_{n+1} \ldots x_k & \text{falls } k > n \\ \epsilon & \text{sonst} \end{cases}$$

   Geben Sie eine rekursive Definition für g an. [*3 Punkte*]

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

Aufgabe 4 (11 Punkte)
Gegeben sei folgender regulärer Ausdruck $R = (\mathtt{01} \mid \mathtt{010} \mid \mathtt{000})*$

a) Geben Sie über dem Alphabet $X = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ einen endlichen Akzeptor A (wie in der Vorlesung definiert) an, so dass $L(A) = \langle R \rangle$. [*6 Punkte*]

   Hinweis: Es genügen 7 Zustände. Akzeptoren mit mehr als 7 Zuständen geben Punktabzug.

b) Zeichnen Sie einen Kantorowitsch-Baum zu R. [*2 Punkte*]

c) Geben Sie drei Nerode-Äquivalenzklassen bzgl. $\langle R \rangle$ durch Nennung je eines Repräsentanten r_0, r_1, r_2 an, sowie drei Wörter $w_0, w_1, w_2 \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$, so dass $\forall i, j \in \mathbb{G}_3 \wedge i \neq j$ gilt:
   $r_i w_i \in \langle R \rangle$, aber $r_j w_i \notin \langle R \rangle$ [*3 Punkte*]

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Gegeben sei folgende formale Sprache $L \subseteq \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*$ für die gilt: Jedes Suffix hat höchstens ein a mehr als b und höchstens ein b mehr als a, also

$$L = \{w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* \mid \text{ Für alle Suffixe } s \text{ von } w \text{ gilt} : |N_{\mathtt{a}}(s) - N_{\mathtt{b}}(s)| \leq 1\}$$

a) Geben Sie einen regulären Ausdruck R mit $\langle R \rangle = L$ an. [*3 Punkte*]

b) Weiter sei folgende Relation $R \subseteq \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* \times \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*$ gegeben

$$R = \{(x,y) \mid (x \in L \wedge y \in L) \Rightarrow x \cdot y \in L\}$$

Überpüfen Sie R jeweils auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität und begründen Sie Ihre Entscheidung. [*3 Punkte*]

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

Aufgabe 6 (10 Punkte)

1. Zeichnen Sie alle nicht-isomorphen ungerichteten Bäume $U = (V, E)$ mit 7 Knoten für die gilt:

   $$\forall x \in V : d(x) \leq 3$$

   Hinweis: Es gibt Punktabzug für Graphen, die nicht verlangt waren. Sie brauchen die Knoten nicht zu benennen. [*5 Punkte*]

2. Für $n \in \mathbb{N}_+$ sei folgender Graph $G_n = (V_n, E_n)$ definiert:
   $V_n = \{x \mid x \subseteq \mathbb{G}_n \wedge |x| = 2\}$,
   $E_n = \{\{u, v\} \mid u \in V, v \in V, u \cap v = \varnothing\}$.

   a) Zeichnen Sie G_4. [*2 Punkte*]

   b) Wie viele Kanten hat G_5? [*2 Punkte*]

   c) Geben Sie die Wegematrix zu G_3 an. [*1 Punkt*]

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

Aufgabe 7 (10 Punkte)
Gegeben sei folgende Turingmaschine T:

- Zustandsmenge ist $Z = \{s, z_1, z_2, z_3, z_4\}$.
- Anfangszustand ist s.
- Bandalphabet ist $X = \{\square, \mathtt{1}, \mathtt{X}, \sharp\}$.
- Die Arbeitsweise ist wie folgt festgelegt:

	s	z_1	z_2	z_3	z_4
$\mathtt{1}$	$(s, \mathtt{1}, R)$	$(z_2, \mathtt{X}, R)$	-	$(z_4, \mathtt{X}, L)$	-
$\mathtt{X}$	-	$(z_1, \mathtt{X}, L)$	$(z_2, \mathtt{X}, R)$	$(z_3, \mathtt{X}, R)$	$(z_4, \mathtt{X}, L)$
$\sharp$	$(z_1, \sharp, L)$	-	$(z_3, \sharp, R)$	-	$(z_1, \sharp, L)$
$\square$	-	-	-	-	-

(Darstellung als Graph auf der nächsten Seite)

Die Turingmaschine wird im folgenden für Eingaben $w \in \{\mathtt{1}^n\sharp\mathtt{1}^m \mid n, m \in \mathbb{N}_+\}$ verwendet. Was T für andere Eingaben macht, muss nicht betrachtet werden. Der Kopf der Turingmaschine stehe anfangs auf dem ersten Zeichen von w.

a) Geben Sie für die Eingabe $\mathtt{11\sharp111}$ die Anfangskonfiguration, die Endkonfiguration und jede weitere Konfiguration an, die sich während der Berechnung nach einer Änderung der Bandbeschriftung ergibt.[*3 Punkte*]

b) In welchen Zuständen kann T halten für eine Eingabe $w_0\sharp w_1$, mit $w_0, w_1 \in \{\mathtt{1}\}^+$ und

1.) $|w_0| > |w_1|$

2.) $|w_0| \leq |w_1|$? [*1 Punkt*]

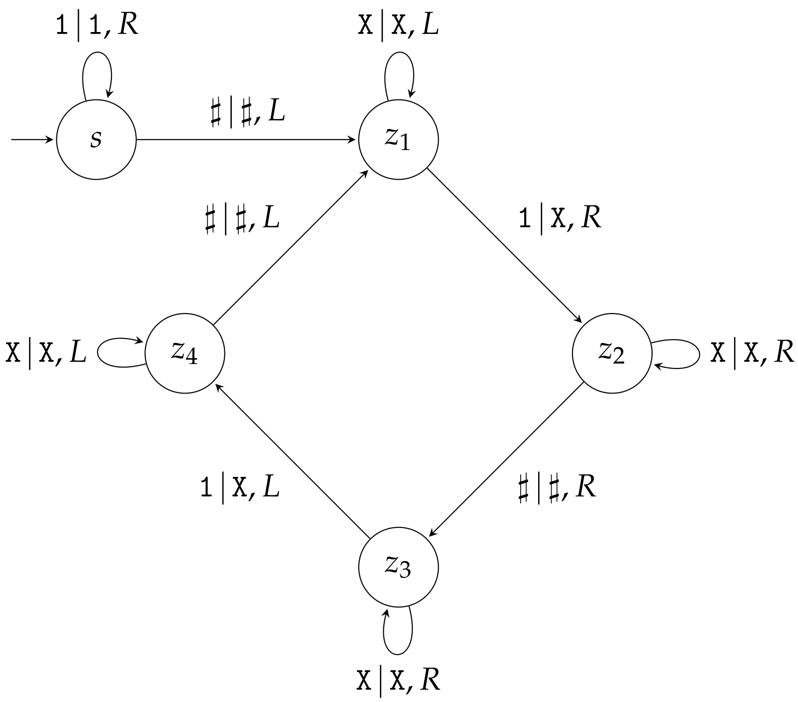
c) Erweitern Sie T so zu T', dass $L(T') = L$ gilt, mit

$$L = \{w_0\sharp \ldots \sharp w_n \mid n \in \mathbb{N}_+ \wedge w_n \in \{1\}^+ \wedge \forall \mathrm{i} \in \mathbb{G}_n : w_\mathrm{i} \in \{1\}^+ \wedge |w_\mathrm{i}| \leq |w_{\mathrm{i}+1}|\}$$

T' soll dabei $\forall w \in L$ im akzeptierenden Zustand a halten. [*4 Punkte*]

d) Beschreiben Sie in maximal zwei Sätzen den Unterschied zwischen entscheidbaren und aufzählbaren Sprachen. [*2 Punkte*]

Darstellung der Turingmaschine als Graph:



Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7:

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7:

Schmierpapier

Schmierpapier

Schmierpapier

Schmierpapier