Lösungsvorschläge zur Klausur zur Vorlesung Grundbegriffe der Informatik 7. September 2010

Klausur-nummer

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	6	5	6	8	6	7	8
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:	Note:

Aufgabe 1 (6 Punkte)
In dieser Aufgabe geht es um formale Sprachen.

Begründen oder widerlegen Sie:

a) Für alle formalen Sprachen L_1, L_2 gilt: $(L_1^* \cdot L_2^*)^* = (L_1 \cdot L_2)^*$.

Lösung:
Diese Aussage ist falsch: Sei $L_1 = \{\mathtt{a}\}$ und $L_2 = \{\mathtt{b}\}$; dann liegt $\mathtt{aa} = \mathtt{aa} \cdot \epsilon$ in $(L_1^* \cdot L_2^*) \subseteq (L_1^* \cdot L_2^*)^*$, aber nicht in $(L_1 \cdot L_2)^* = (\mathtt{ab})^*$.

b) Für alle formalen Sprachen L_1, L_2 gilt: $L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$.

Lösung:
Diese Aussage ist falsch: Sei $L_1 = \{\mathtt{a}\}$ und $L_2 = \{\mathtt{b}\}$; dann liegt $\mathtt{ab}$ in $(L_1 \cup L_2)^* = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ aber nicht in $L_1^* \cup L_2^* = \{\mathtt{a}\}^* \cup \{\mathtt{b}\}^*$

c) Für alle formalen Sprachen L_1, L_2 gilt: $(L_1^* \cup L_2^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$.

Lösung:
Die Aussage ist korrekt: Ein Wort w aus $(L_1^* \cup L_2^*)^*$ lässt sich in Teilwörter $w_1, \ldots, w_k$ unterteilen, so dass für $1 \leq i \leq k$ gilt: $w_i \in L_1^* \vee w_i \in L_2^*$; dies bedeutet, dass jedes Teilwort w_i in n_i Teilwörter zerlegt werden kann, die alle in L_1 liegen, falls $w_i \in L_1^*$ gilt, oder in L_2, falls $w_i \in L_2^*$ gilt. Damit lässt sich w in Teilwörter aus $L_1 \cup L_2$ unterteilen, und es folgt $w \in (L_1 \cup L_2)^*$.

Umgekehrt lässt sich Ein Wort w aus $(L_1 \cup L_2)^*$ in Teilwörter $w_1, \ldots, w_k$ unterteilen, so dass für $1 \leq i \leq k$ gilt $w_i \in L_1 \subseteq L_1^*$ oder $w_i \in L_2 \subseteq L_2^*$; somit lässt sich w in Teilwörter aus $L_1^* \cup L_2^*$ unterteilen, und es folgt $w \in (L_1^* \cup L_2^*)^*$.

Aufgabe 2 (3+2 = 5 Punkte)
In dieser Aufgabe geht es um Aussagenlogik.

a) Gegeben sei die Formel $F = (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow ((\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow B)$.

Vervollständigen Sie die unten stehende Wahrheitstabelle für F und geben sie eine äquivalente Formel F' an, in der sowohl $\mathcal{A}$ als auch $\mathcal{B}$ jeweils höchstens einmal vorkommen und für alle Wahrheitswerte von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ der Wahrheitswert von F gerade der Wahrheitswert von F' ist.

Lösung:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$(\mathcal{A}$	$\Rightarrow$	$\mathcal{B})$	$\Rightarrow$	$((\mathcal{B}$	$\Rightarrow$	$\mathcal{A})$	$\Rightarrow$	$\mathcal{B})$	F
f	f		w		f		w		f		f
f	w		w		w		f		w		w
w	f		f		w		w		f		w
w	w		w		w		w		w		w

Eine äquivalente Formel ist $F' = \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$

b) Gegeben seien die Formeln

$$F_1 = (((\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \vee \mathcal{B}) \Rightarrow (\neg \mathcal{A})) \wedge \mathcal{B}$$

und

$$F_2 = \neg \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$$

Zeigen Sie (zum Beispiel mit Wahrheitstabellen), dass F_1 und F_2 äquivalent sind.

Lösungsvorschlag:
Falls $\mathcal{B}$ falsch ist, ist sowohl F_1 als auch F_2 falsch, da beide Formeln Konjunktionen (UND-Verknüpfungen) eines Terms mit $\mathcal{B}$ sind.

Ist $\mathcal{B}$ wahr, so ist der Ausdruck $((\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \vee \mathcal{B})$ wahr, da dies eine Disjunktion (ODER-Verknüpfung) mit $\mathcal{B}$ ist.

Dies bedeutet, dass der Term $(((\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \vee \mathcal{B}) \Rightarrow (\neg \mathcal{A}))$ genau dann wahr ist, wenn $(\neg \mathcal{A})$ wahr ist, und F_1 ist genau dann wahr, wenn sowohl $(\neg \mathcal{A})$ als auch $\mathcal{B}$ wahr sind, was bedeutet, dass F_1 zu F_2 äquivalent ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Im folgenden sei $n \geq 1$ immer eine positive ganze Zahl.

Gegeben seien 3^n Kugeln, von denen eine Kugel 1,01 kg wiegt und alle anderen Kugeln 1 kg wiegen, und die ansonsten nicht zu unterscheiden sind.

Man hat eine Waage mit einer linken und einer rechten Waagschale, mit der man die Gewichte zweier beliebig großer Mengen von Kugeln vergleichen kann:

- Falls die Summe der Gewichte in beiden verglichenen Mengen gleich ist, gibt die Waage den Wert 0 zurück.
- Falls die Summe der Gewichte in der linken Waagschale größer als die Summe der Gewichte in der rechten Waagschale ist, gibt die Waage den Wert 1 zurück.
- Falls die Summe der Gewichte in der linken Waagschale kleiner als die Summe der Gewichte in der rechten Waagschale ist, gibt die Waage den Wert -1 zurück.

Zeigen Sie durch vollständige Induktion über n:

Man kann durch n-maliges Vergleichen mit der Waage die Kugel K herausfinden, die 1,01 kg wiegt.

Hinweis: Beginnen Sie für den Induktionsanfang bei $n = 1$!

Lösungsvorschlag:

Induktionsanfang: $n = 1$: Man hat $3^1 = 3$ Kugeln, unter denen man mit einer Wiegung K herausfinden soll. Dazu legt man in jede Waagschale jeweils eine Kugel.

Gibt die Waage 0 aus, sind die Kugeln auf der Waage gleich schwer und die einzige schwerere Kugel K muss die Kugel sein, die nicht gewogen wurde.

Gibt die Waage 1 aus, so liegt K in der linken Waagschale.

Gibt die Waage -1 aus, so liegt K in der rechten Waagschale.

K wurde also in einem Schritt gefunden.

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_+$ gelte: Man kann aus 3^n Kugeln mit n Wiegungen die Kugel K bestimmen.

Induktionsschritt: $n \to n + 1$: Wir haben nun 3^{n+1} Kugeln, die wir in 3 disjunkte Mengen der Größe 3^n unterteilen; von diesen 3 Mengen vergleichen wir zwei auf der Waage.

Gibt die Waage 0 aus, sind alle Kugeln auf der Waage gleich schwer und die einzige schwerere Kugel K muss unter den 3^n Kugeln sein, die nicht gewogen wurden.

Gibt die Waage 1 aus, so befindet sich K unter den 3^n Kugeln in der linken Waagschale.

Gibt die Waage -1 aus, so befindet sich K unter den 3^n Kugeln in der rechten Waagschale.

Man hat also nach einer Wiegung in jedem Fall eine Menge von 3^n Kugeln bestimmt, unter denen sich K befinden muss.

Nach Induktionsvoraussetzung kann man mit weiteren n Wiegungen K bestimmen, und hat insgesamt $n + 1$ Wiegungen für diese Bestimmung benötigt.

Aufgabe 4 (3+3+2 = 8 Punkte)

Für ein Wort w und ein Symbol x bezeichne $N_x(w)$ die Anzahl der Vorkommnisse von x in w.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathbb{G}_n$ definiert als die Menge aller nicht negativen ganzen Zahlen, die echt kleiner als n sind, also $\mathbb{G}_n = \{k \in \mathbb{N}_0 \mid k < n\}$.

Für $k \geq 1$ sei die Sprache L_k definiert als die Menge aller Wörter w über dem Alphabet $\{\mathtt{a},\ \mathtt{b}\}$, für die gilt:

- $N_{\mathtt{a}}(w) = N_{\mathtt{b}}(w)$.
- Für alle Präfixe v von w gilt: $N_{\mathtt{a}}(v) \geq N_{\mathtt{b}}(v)$ und $N_{\mathtt{a}}(v) - N_{\mathtt{b}}(v) \leq k$.

So liegt beispielsweise das Wort `ababab` in L_1 und das Wort `aababbaabb` in L_2.

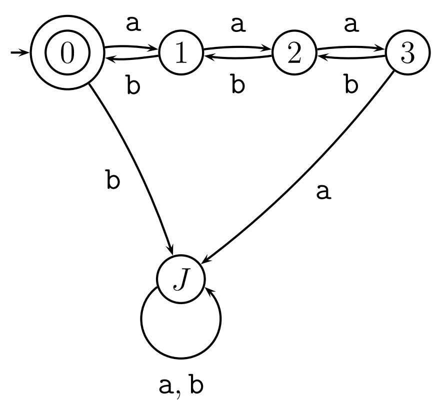
a) Geben Sie reguläre Ausdrücke R_1, R_2 an, so dass gilt: $\langle R_1 \rangle = L_1$ und $\langle R_2 \rangle = L_2$.

Lösungsvorschlag:

$R_1 = (\mathtt{ab})*$ und $R_2 = (\mathtt{a}(\mathtt{ab}) * \mathtt{b})*$

b) Geben Sie einen endlichen Akzeptor an, der L_3 akzeptiert.

Lösungsvorschlag:



c) Geben Sie in Abhängigkeit von k eine formale Beschreibung für einen endlichen Akzeptor $A_k = (X, Z_k, z_{0k}, F_k, \delta_k)$ mit
$X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, $Z_k = \mathbb{G}_{k+1} \cup \{J\}$, $z_{0k} = 0$ an, der die Sprache L_k akzeptiert.

Lösungsvorschlag:

$F_k = \{0\}$ und

$$\delta_k(z,x) = \begin{cases} z+1 & \text{falls } x = \mathtt{a} \wedge z \in \mathbb{G}_{k+1} \wedge z < k \\ z-1 & \text{falls } x = \mathtt{b} \wedge z \in \mathbb{G}_{k+1} \wedge z > 0 \\ J & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 5 (1+1+1+1+1+1 = 6 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um gerichtete Bäume mit Knotenmenge $\mathbb{G}_n$ und Wurzel 0.

Weiterhin gelte für alle Kanten (i, j) eines solchen Baumes: $i < j$.

a) Woran erkennt man in der Adjazenzmatrix eines Baumes ein Blatt?

Lösung: Die entsprechende Zeile enthält nur Nullen.

b) Geben Sie eine schematische Darstellung der Adjazenzmatrix eines solchen Baumes mit n Knoten und $n-1$ Blättern an.

Lösung:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

c) Geben Sie eine schematische Darstellung der Wegematrix eines solchen Baumes mit n Knoten und $n-1$ Blättern an.

Lösung:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Wie viele solcher Bäume mit n Knoten und $n-1$ Blättern gibt es?

Lösung: Einen.

e) Geben Sie eine schematische Darstellung der Adjazenzmatrix eines solchen Baumes mit n Knoten und genau einem Blatt an.

Lösung:

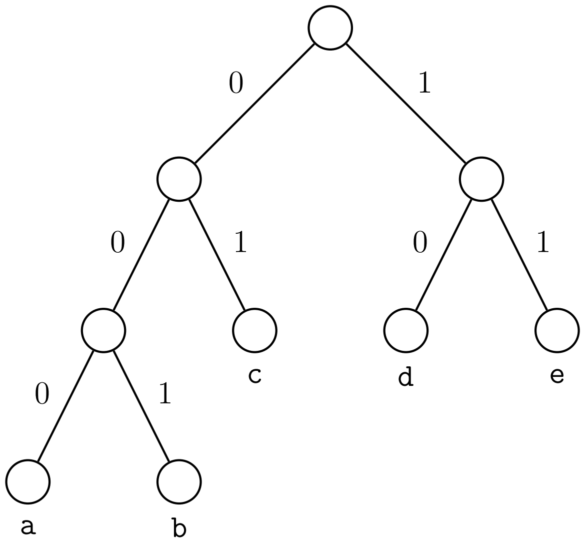
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

f) Geben Sie eine schematische Darstellung der Wegematrix eines solchen Baumes mit n Knoten und genau einem Blatt an.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (1+2+2+2 = 7 Punkte)
Gegeben sei folgender Baum:



a) Beschriften Sie die Kanten des Baumes so, dass Sie einen Huffman-Baum erhalten.

Lösung: siehe oben

b) Geben Sie die Huffman-Codierung des Wortes `cae` an.

Lösung: 0100011

c) Geben Sie paarweise verschiedene (relative oder absolute) Häufigkeiten für `a`, `b`, `c`, `d`, `e` an, so dass sich bei der Huffman-Codierung obiger Baum ergibt.

Lösung: Zum Beispiel: `a` : 1, `b` : 2, `c` : 3, `d` : 4, `e` : 5

d) Was ist ein Homomorphismus $h : A^* \to B^*$?

Lösungsvorschlag:
Ein Homomorphismus $h : A^* \to B^*$ ist eine Funktion, die folgende Eigenschaften erfüllt:

$h(\epsilon) = \epsilon$ und $\forall x \in A \;\; \forall w \in A^* : h(xw) = h(x)h(w)$.

Aufgabe 7 (2,5+2,5+1+2 = 8 Punkte)
Gegeben sei die folgende Turingmaschine T:

- Zustandsmenge ist $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}$.
- Anfangszustand ist z_0.
- Bandalphabet ist $X = \{\square, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.
- Die Arbeitsweise ist wie folgt festgelegt:

	z_0	z_1	z_2	z_3
a	$(z_0, \mathtt{a}, 1)$	$(z_2, \mathtt{b}, -1)$	$(z_0, \mathtt{a}, 1)$	$(z_4, \mathtt{b}, 1)$
b	$(z_1, \mathtt{a}, 1)$	$(z_1, \mathtt{b}, 1)$	$(z_2, \mathtt{b}, -1)$	$(z_3, \mathtt{b}, -1)$
$\square$	-	$(z_3, \square, -1)$	-	-

Die Turingmaschine wird im folgenden benutzt für Bandbeschriftungen, bei denen anfangs auf dem Band (von Blanksymbolen umgeben) ein Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$ steht.

Der Kopf der Turingmaschine stehe auf dem ersten Symbol von $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$.

a) Geben Sie für die Eingaben `aab, aba, baa` jeweils die Anfangskonfiguration, die Endkonfiguration und jede weitere Konfiguration an, die sich während der Berechnung nach einer Änderung der Bandbeschriftung ergibt.

Lösung:

z_0			
a	a	b	$\square$
			z_1
a	a	a	$\square$
			z_4
a	a	b	$\square$

z_0			
a	b	a	$\square$
		z_1	
a	a	a	$\square$
	z_2		
a	a	b	$\square$
			z_1
a	a	a	$\square$
			z_4
a	a	b	$\square$

z_0			
b	a	a	$\square$
	z_1		
a	a	a	$\square$
z_2			
a	b	a	$\square$
		z_1	
a	a	a	$\square$
	z_2		
a	a	b	$\square$
			z_1
a	a	a	$\square$
			z_4
a	a	b	$\square$

b) Die Eingabe enthalte n mal das Zeichen `a` und m mal das Zeichen `b`. Wie viele `a` und wie viele `b` stehen auf dem Band, wenn sich die Turingmaschine im Zustand z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 befindet?

Lösung:

	a	b
z_0	n	m
z_1	$n+1$	$m-1$
z_2	n	m
z_3	$n+1$	$m-1$
z_4	n	m

c) Geben Sie eine geschlossene Formel für das Wort w' an, das am Ende der Berechnung der Turingmaschine bei Eingabe von w auf dem Band steht.

Lösung: $w' = \mathtt{a}^{N_a(w)}\mathtt{b}^{N_b(w)}$

d) Geben Sie eine (möglichst einfache) Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ an, so dass die Anzahl der Schritte, die die Turingmaschine bei Eingabe des Wortes $\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n$ macht, in $\Theta(f(n))$ liegt.

$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, n \mapsto n$