Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
1. März 2011

Klausur-nummer

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	6	9	4	9	5	5	9
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:	Note:

Aufgabe 1 (1,5+1,5+1+2=6 Punkte)

a) Geben Sie das Hasse-Diagramm einer Halbordnung auf einer dreielementigen Menge an, die genau zwei maximale und zwei minimale Elemente besitzt.

b) Sei A ein Alphabet und $L \subseteq A^*$ eine **endliche** Menge.

   Geben Sie die Menge der Produktionen einer rechtslinearen Grammatik an, die L erzeugt.

c) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass gilt:

   $\langle R \rangle = \{vw \mid v, w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \wedge N_{\mathtt{c}}(v) = N_{\mathtt{b}}(w) = 0\}$

   ($N_{\mathtt{b}}(w)$ ist die Anzahl der Vorkommen des Zeichens $\mathtt{b}$ in w).

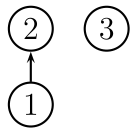
d) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ an, für die gilt:

   $f(n) \notin O(n^2) \wedge f(n) \notin \Omega(n^2 \log n)$

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 1:

Lösung:

a) Das Hassediagramm sieht z. B. wie folgt aus:



b) $P = \{(S, w) \mid w \in L\}$ bzw. $P = \{S \to w \mid w \in L\}$

c) `(a|b)*(a|c)*`

d) Beispiele:

- $f(n) = n^2 \log(\log n), f(n) = n^2 \sqrt{\log n}, \ldots$
- aber z. B. auch

$$f(n) = \begin{cases} n^2 & \text{falls n gerade} \\ n^2 \log n & \text{falls n ungerade} \end{cases} .$$

Aufgabe 2 (5+2+2 = 9 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}_0, n \geq 2$ sei ein Graph $U_n = (\mathbb{G}_{2n}, E_n)$ definiert mit Kantenmenge $E_n = \big\{\{x, y\} \mid ggT(x + y, 2n) = 1\big\}$.

Zur Erinnerung: Für $m \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathbb{G}_m = \{i \mid 0 \leq i < m\}$ und $ggT(x, y)$ ist der größte gemeinsame Teiler von x und y.

a) Zeichnen Sie die Graphen U_3, U_4 und U_5.

b) Geben Sie für U_4 und U_5 jeweils einen Weg an, bei dem der Anfangsknoten gleich dem Endknoten ist, und jeder andere Knoten des Graphen genau einmal in dem Weg vorkommt.

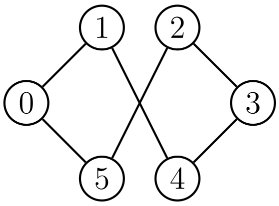
c) Geben Sie die Adjazenzmatrix für U_4 an.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

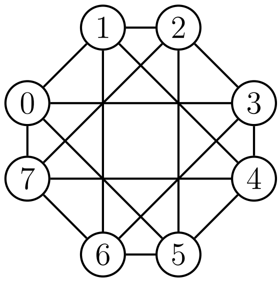
Lösung:

a)

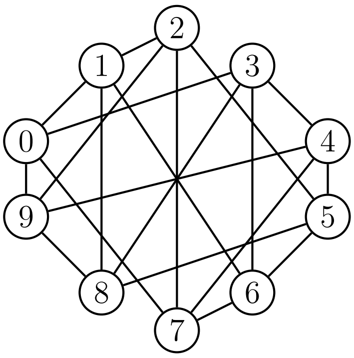
U_3:



U_4:



U_5:



b) Weg für U_4: $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0)$.

Weg für U_5: $(0, 1, 2, 7, 6, 5, 4, 3, 8, 9, 0)$.

c)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Die Menge $M \subseteq \mathbb{N}_0$ sei definiert durch:

- 5 und 8 liegen in M.
- Für alle m, n gilt:
  Wenn n und m in M liegen, dann ist auch $n^2 + m^2$ in M.
- Keine anderen Zahlen liegen in M.

Zeigen Sie durch strukturelle Induktion:

$$\forall n \in M : n \bmod 3 = 2\ .$$

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

Lösung:

Induktionsanfang: $5 \bmod 3 = 8 \bmod 3 = 2\surd$.

Induktionsvoraussetzung:

Für beliebige aber feste $n, m \in M$ gelte: $n \bmod 3 = 2 \wedge m \bmod 3 = 2$.

Induktionsschritt: Wir zeigen, dass dann auch $(n^2 + m^2) \bmod 3 = 2$ gilt.

Da $n \bmod 3 = m \bmod 3 = 2$ ist, gibt es Zahlen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$, so dass $n = 3k_1 + 2$ und $m = 3k_2 + 2$ gilt.

Es folgt mit den binomischen Formeln:

$n^2 + m^2 = 9k_1^2 + 12k_1 + 4 + 9k_2^2 + 12k_2 + 4 = 3(3k_1^2 + 3k_2^2 + 4k_1 + 4k_2) + 8 = 3(3k_1^2 + 3k_2^2 + 4k_1 + 4k_2 + 2) + 2$, und es gilt $(n^2 + m^2) \bmod 3 = 2$.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

(Alternativ: Aus $n \bmod 3 = 2$ folgt $n^2 \bmod 3 = 2^2 \bmod 3 = 4 \bmod 3 = 1$; ebenso gilt $m^2 \bmod 3 = 1$, und es folgt $(n^2 + m^2) \bmod 3 = 1 + 1 = 2$.)

Aufgabe 4 (3+2+2+2 = 9 Punkte)

Gegeben sei das Alphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

Wir betrachten die Sprache $L = \{\mathtt{a}^k\mathtt{b}^m\mathtt{a}^{m-k} \mid m, k \in \mathbb{N}_0 \wedge m \geq k\}$ über A.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, so dass gilt: $L(G) = L$.

b) Geben Sie für Ihre Grammatik aus Teilaufgabe a) einen Ableitungsbaum für das Wort `aabbba` an.

c) Geben Sie alle $n \in \mathbb{N}_0$ an, für die gilt: $L \cap A^n \neq \{\,\}$

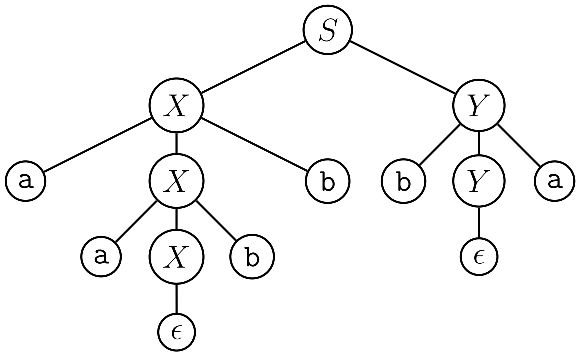
d) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ so gewählt, dass $L \cap A^n \neq \{\,\}$ gilt. Wie viele Elemente enthält $L \cap A^n$?

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

Lösung:

a) $G = (\{S, X, Y\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, P\}$ mit
$P = \{S \to XY, X \to aXb \mid \epsilon,\ \ Y \to bYa \mid \epsilon\}$.

b) Der Ableitunsbaum sieht wie folgt aus:



c) Es gilt $L \cap A^n \neq \{\}$ genau dann, wenn n gerade ist.

d) $L \cap A^n = \{\mathtt{a}^k \mathtt{b}^{n/2} \mathtt{a}^{n/2-k} \mid 0 \leq k \leq n/2\}$.
Es folgt $|L \cap A^n| = n/2 + 1$.

Aufgabe 5 (1+2+2 = 5 Punkte)

Für eine Relation $R \subseteq M \times M$ auf einer Menge M definieren wir die Relation R^{-1} wie folgt:

$$R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\} \ .$$

Außerdem hatten wir in der Vorlesung festgelegt:

$$R^0 = \{(x, x) \mid x \in M\} \ .$$

Widerlegen Sie durch Gegenbeispiel oder beweisen Sie:

a) Wenn $R \cap R^{-1} = R^0$ gilt, ist R reflexiv.

b) Wenn $R \cap R^{-1} = R^0$ gilt, ist R symmetrisch.

c) Wenn $R \cap R^{-1} = R^0$ gilt, ist R antisymmetrisch.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

Lösung:

a) Die Aussage ist korrekt:

Wenn $R \cap R^{-1} = R^0$ gilt, gilt für alle $x \in M : (x, x) \in R^0 = R \cap R^{-1} \subseteq R$.

Somit ist R reflexiv.

b) Die Aussage ist falsch:

Sei $M = \{1, 2\}$ und $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$.

Dann gilt $R \cap R^{-1} = \{(1, 1), (2, 2)\} = R^0$, aber R ist nicht symmetrisch, da $(1, 2) \in R$ aber $(2, 1) \notin R$ gilt.

c) Die Aussage ist korrekt:

Es gelte $R \cap R^{-1} = R^0$.

Wir betrachten $x, y \in M$ mit $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$. Dann gilt nach Definition von R^{-1}: $(y, x) \in R^{-1}$ und $(x, y) \in R^{-1}$.

Somit folgt $(x, y) \in R \cap R^{-1} = R^0 = \{(z, z) \mid z \in M\}$, und somit muss $x = y$ gelten, was die Antisymmetrie beweist.

Aufgabe 6 (1+2+2 = 5 Punkte)

Die Sprache $L \subseteq \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*$ sei definiert als die Menge aller Wörter w, die folgende Bedingungen erfüllen:

- $N_{\mathtt{b}}(w) > N_{\mathtt{a}}(w)$ und
- $\forall v_1, v_2 \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* : w \neq v_1\mathtt{bb}v_2$

a) Geben Sie alle Wörter aus L an, die genau 4 mal das Zeichen b enthalten.

b) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass gilt:
$\langle R \rangle = L$.

c) Geben sie einen endlichen Akzeptor an, der L erkennt.

Hinweis: Es muss sich um einen vollständigen deterministischen endlichen Akzeptor handeln wie er in der Vorlesung definiert wurde.

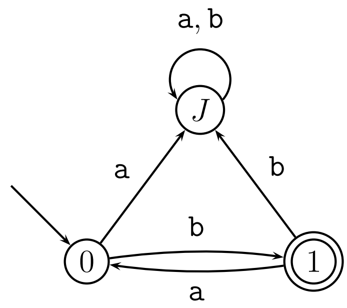
Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

Lösung:

a) `bababab`

b) $R =$ `(ba)*b`.

c) Der Automat sieht folgendermaßen aus:



Aufgabe 7 (4+2+1+2 = 9 Punkte)
Gegeben sei die folgende Turingmaschine T:

- Zustandsmenge ist $Z = \{r, s, u, d_{\mathtt{b}}, d_{\mathtt{a}}\}$.
- Anfangszustand ist r.
- Bandalphabet ist $X = \{\square, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{0}, \mathtt{1}\}$.
- Die Arbeitsweise ist wie folgt festgelegt:

	r	s	u	$d_{\mathtt{b}}$	$d_{\mathtt{a}}$
0	$(r, \mathtt{0}, 1)$	$(s, \mathtt{1}, -1)$	$(r, \mathtt{0}, 1)$	–	–
1	$(r, \mathtt{1}, 1)$	$(r, \mathtt{0}, 1)$	$(r, \mathtt{1}, 1)$	$(d_{\mathtt{b}}, \square, 1)$	–
a	$(s, \mathtt{b}, -1)$	–	–	–	$(d_{\mathtt{a}}, \square, 1)$
b	$(r, \mathtt{b}, 1)$	$(s, \mathtt{b}, -1)$	$(u, \mathtt{a}, -1)$	$(d_{\mathtt{a}}, \square, 1)$	$(d_{\mathtt{a}}, \mathtt{b}, 1)$
$\square$	$(u, \square, -1)$	$(d_{\mathtt{b}}, \square, 1)$	–	–	–

Die Turingmaschine wird im folgenden benutzt für Bandbeschriftungen, bei denen zu Beginn der Berechnung auf dem Band ein Wort $v \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^+ \cdot \{\mathtt{a}\}^+$ steht, das von Blanksymbolen umgeben ist.

Der Kopf der Turingmaschine stehe anfangs auf dem ersten Symbol des Eingabewortes.

a) Geben Sie für die Eingabe `0100aaa` folgende Konfigurationen an:
   - die Anfangskonfiguration;
   - die Endkonfiguration;
   - jede Konfiguration, die in einem Zeitschritt vorliegt, nachdem die Turingmaschine von einem Zustand ungleich r in den Zustand r wechselt.

b) Am Anfang stehe ein Wort $w\mathtt{a}^k$ mit $w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^+$ und $k \in \mathbb{N}_+$ auf dem Band, für das gelte, dass die Turingmaschine während der Berechnung mindestens einmal in den Zustand u übergehen wird.

   Welches Wort steht auf dem Band, nachdem T zum ersten Mal vom Zustand u in den Zustand r übergegangen ist?

c) Am Anfang stehe ein Wort $w\mathtt{a}^k$ mit $w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^+$ und $k \in \mathbb{N}_+$ auf dem Band.

   Was muss für w und k gelten, damit T niemals in den Zustand u übergeht?

d) Am Anfang stehe ein Wort $w\mathtt{a}^k$ mit $w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^+$ und $k \in \mathbb{N}_+$ auf dem Band.

   Welches Wort steht am Ende der Berechnung auf dem Band?

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7:

Lösung:

a) Wir schreiben den Zustand der Turingmaschine immer vor das Zeichen, auf dem sich der Kopf befindet.

Anfangskonfiguration: $r\mathtt{0100aaa}$

Zwischenkonfigurationen:

$\mathtt{00}r\mathtt{11baa}$
$\mathtt{0010}r\mathtt{bba}$
$\mathtt{000}r\mathtt{1bbb}$
$\mathtt{0001}r\mathtt{aaa}$
$\mathtt{0000}r\mathtt{baa}$

Endkonfiguration: $\mathtt{b}\square d_{\mathtt{a}}\square$

b) $\mathtt{0}^{|w|-|Repr_2(Num_2(w)-k)|}Repr_2(Num_2(w)-k)\mathtt{a}^k$

(Hinweis: $Repr_2(Num_2(w)-k)\mathtt{a}^k$ gibt auch noch viele Punkte.)

c) $Num_2(w) < k$.

d) $\mathtt{b}^{Num_2(w) \bmod k}$