Name: Matr.-Nr.:

Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zur Klausur am 7.3.2013

Lösungsvorschlag:

a) Für alle Relationen $R_1, R_2 \subseteq M \times M$ gilt: $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

falsch

b) Gegeben seien zwei Relationen $R_1, R_2 \subseteq M \times M$.
R_1 ist reflexiv $\Rightarrow R_1 \cup R_2$ ist reflexiv.

wahr

c) Gegeben seien zwei Relationen $R_1, R_2 \subseteq M \times M$. Wenn R_1 und R_2 antisymmetrisch sind, dann ist $R_1 \cup R_2$ antisymmetrisch.

falsch

d) $(\{\mathtt{a}\} \cup \{\mathtt{b}\})^* = \{\mathtt{a}\}^* \cup \{\mathtt{b}\}^*$

falsch

e) Besitzt die Menge der oberen Schranken einer Teilmenge T ein größtes Element, so heisst dies das Supremum von T.

falsch

f) Für einen wie in der Vorlesung definierten Akzeptor $A = (Z, z_0, X, f, F)$ mit $F = Z$ gilt: $L(A) = X^*$

wahr

g) Es gibt 256 Sprachen L mit $L \subseteq \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid |w| = 3\}$

wahr

h) $n^{\frac{42}{41}} \in O(n(\log n)^2)$

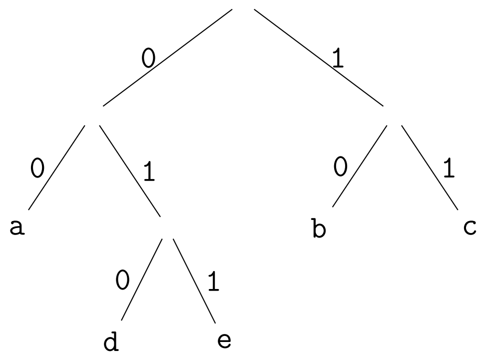
falsch

i) Sei A die Adjazenzmatrix zu einem Graphen mit n Knoten. Es gilt:
$\forall m > n : \operatorname{sgn}(\sum_{i=1}^{n} A^i) = \operatorname{sgn}(\sum_{i=1}^{m} A^i)$

wahr

Lösungsvorschlag

a) Die linke Codierung ist eine gültige Huffman-Codierung. Die rechte Codierung ist zwar präfixfrei, sie ist jedoch unter den präfixfreien Codierungen nicht minimal, bzw es gibt keinen gültigen Huffman-Baum zur rechten Codierung, da h(c)=001 zu lang ist.



b)

c) Die gültigen Paare sind: $(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)$ und $(4,4)$.

Lösungsvorschlag:

1. Wir führen Induktion über die Wortlänge $|w| = |w_1w_2|$.

   Induktionsanfang: Für $w = \epsilon$ gilt $w_1 = w_2 = \epsilon$ und daher: $f(\epsilon\epsilon) = f(\epsilon) = \epsilon = \epsilon\epsilon = f(\epsilon)f(\epsilon)\surd$.

   Induktionsvoraussetzung:

   Für alle Wörter w' mit beliebiger, aber fester Länge $n \in \mathbb{N}_0$ gelte: $\forall w' \in X^*$ mit $w' = w_1w_2 : f(w') = f(w_1w_2) = f(w_1)f(w_2)$.

   Induktionsschritt: Gezeigt wird, dass die Behauptung auch für Wörter w der Länge $n+1$ gilt. Es gibt zwei Möglichkeiten für das erste Zeichen

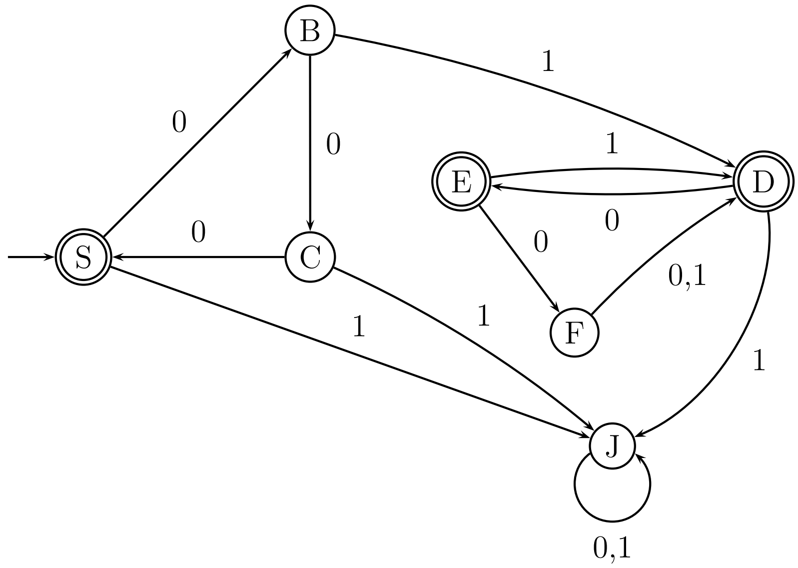
   - $\mathtt{a}$:
     $f(w) = f(\mathtt{a}w') = f(\mathtt{a}w_1w_2) = \mathtt{b}f(w_1w_2) \overset{\text{IV}}{=} \mathtt{b}f(w_1)f(w_2) \overset{\text{nach Def.}}{=} f(\mathtt{a}w_1)f(w_2)$
   - $\mathtt{b}$:
     $f(w) = f(\mathtt{b}w') = f(\mathtt{b}w_1w_2) = \mathtt{a}f(w_1w_2) \overset{\text{IV}}{=} \mathtt{a}f(w_1)f(w_2) \overset{\text{nach Def.}}{=} f(\mathtt{b}w_1)f(w_2)$ $\square$

   zur Vollständigkeit: dritte Möglichkeit für das "erste Zeichen" wäre ϵ: Da $f(\epsilon w) = f(w)$, muss nichts zusätzliches gezeigt werden.

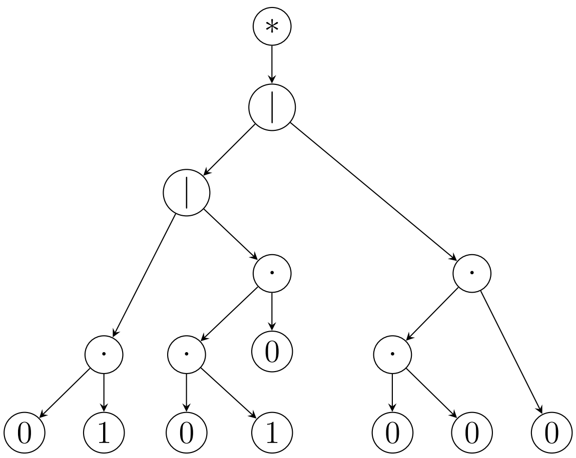
   Hinweis: Alternativ wäre auch ein Induktion über $n = |w_1|$ möglich.

2. $$\begin{aligned} \forall w \in X^* :& f(w, 0) = w \\ \forall n \in \mathbb{N}_0 :& f(\epsilon, n) = \epsilon \\ \forall w \in X^* : \forall x \in A :& f(xw, n+1) = f(w, n) \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag:



a)



b)

c)
- $r_0 = \mathsf{0}$ $\quad w_0 = \mathsf{00}$
- $r_1 = \mathsf{00}$ $\quad w_1 = \mathsf{0}$
- $r_2 = \mathsf{000}$ $\quad w_2 = \epsilon$

Lösungsvorschlag:

a) $(\mathtt{a} \mid \mathtt{b} \mid \emptyset *)(\mathtt{ab} \mid \mathtt{ba})*$

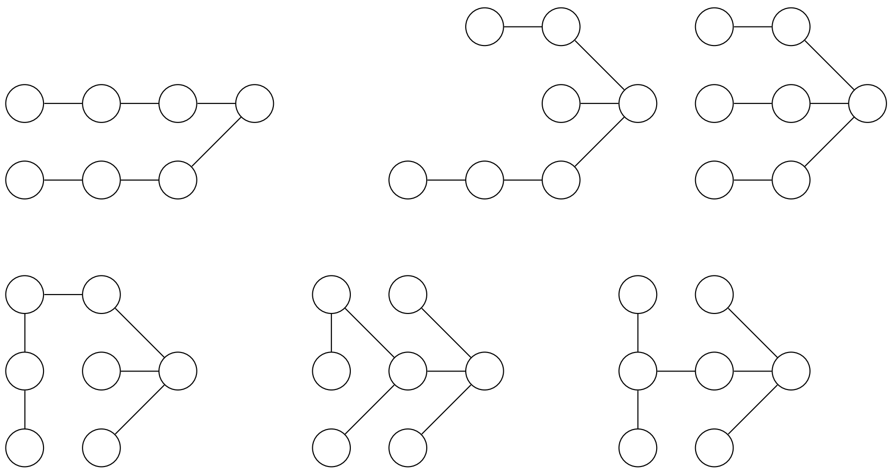
b) R ist nicht reflexiv: Gegenbeispiel: $(\mathtt{a}, \mathtt{a}) \notin R$

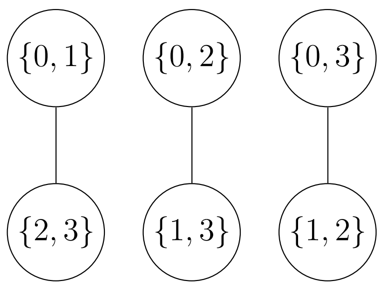
R ist nicht symmetrisch: Gegenbeispiel: $(\mathtt{a}, \mathtt{ba}) \in R$, aber $(\mathtt{ba}, \mathtt{a}) \notin R$

R ist nicht transitiv: Gegenbeispiel: $(\mathtt{a}, \mathtt{b}) \in R \wedge (\mathtt{b}, \mathtt{a}) \in R$, aber $(\mathtt{a}, \mathtt{a}) \notin R$

Lösungsvorschlag:

1. Es gibt folgende 6 Möglichkeiten:



2. (a) 

   (b) G_5 besitzt 15 Kanten.
   Begründung (nicht verlangt): G_5 besitzt $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ Knoten, von denen jeder Grad 3 besitzt. Die Kantenzahl ist folglich $\frac{10 \cdot 3}{2} = 15$.

   (c) $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lösungsvorschlag:

a) Anfangskonfiguration: $s\texttt{11}\sharp\texttt{111}$

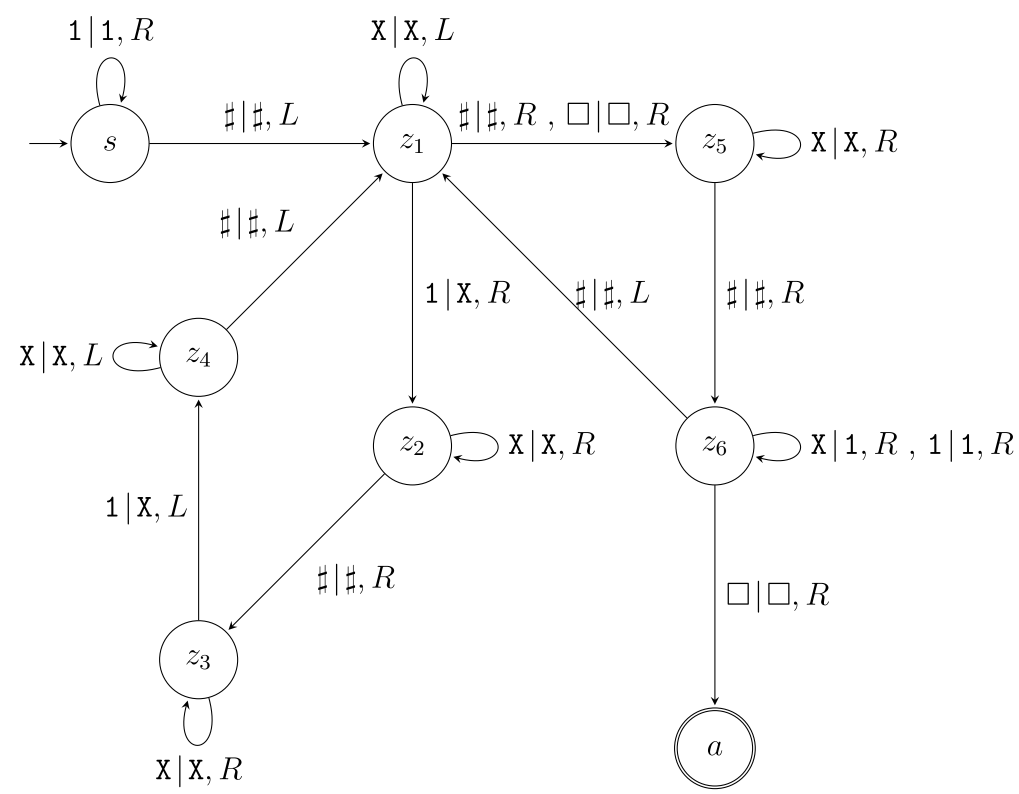
Zwischenkonfigurationen:
$\texttt{1X}z_2\sharp\texttt{111}$
$\texttt{1X}z_4\sharp\texttt{X11}$
$\texttt{X}z_2\texttt{X}\sharp\texttt{X11}$
$\texttt{XX}\sharp z_4\texttt{XX1}$

Endkonfiguration: $z_1\square\texttt{XX}\sharp\texttt{XX1}$

b) 1.) T hält in Zustand z_3

2.) T hält in Zustand z_1

c)



d) Eine formale Sprache, die von einer Turingmaschine akzeptiert werden kann, heißt aufzählbare Sprache, was dabei in den nicht akzeptierten Fällen passiert, ist unbekannt.

Wenn es eine Turingmaschine gibt, die eine Sprache L akzeptiert und dabei für **jede** Eingabe hält, dann heißt L entscheidbar.